XII

Les nombres réels

Contenu

I Nombres entiers, décimaux, rationnels

I.1 Rappels sur les rationnels

— Tout rationnel peut s'écrire de différentes manières sous forme de fractions, par exemple $\dfrac{p}{q} = \dfrac{2p}{2q} = \ldots$, mais tout nombre rationnel s'écrit de manière unique sous forme de *fraction irréductible* *i.e.* sous la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux.

L'*égalité des produits en croix*, caractérise ces classes d'équivalence :

$$\forall \left(\frac{a}{b} ; \frac{c}{d}\right) \in \mathbb{Q}^2, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc \quad \text{avec } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0.$$

— L'ensemble $\mathbb{Q}$ est muni de deux lois de composition interne :

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'} \qquad \text{et} \qquad \frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}.$$

Exercice 1 : Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible :

A$= \dfrac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \dfrac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, distincts deux à deux.

B$= \dfrac{\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\dfrac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

I.2 L'ensemble des rationnels est insuffisant :

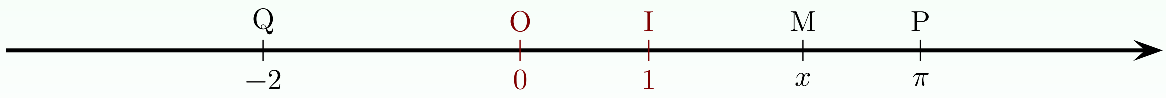
En termes d'approximations numériques, $\mathbb{Q}$ peut paraître suffisant en sciences appliquées. Le problème se pose lorsqu'on a besoin de connaître la valeur exacte de certaines grandeurs.

Par exemple, peut-on mesurer dans $\mathbb{Q}$ la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ? D'après le théorème de Pythagore, cela revient à se demander s'il existe un rationnel dont le carré est égal à 2, or nous avons déjà établi que la réponse est négative : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Cette lacune de $\mathbb{Q}$ avait été remarquée par les Pythagoriciens, ce qui a conduit les mathématiciens à introduire de nouveaux nombres, les *irrationnels*, en concevant un ensemble plus vaste que $\mathbb{Q}$, l'ensemble des *nombres réels* noté $\mathbb{R}$.

I.3 L'ensemble des réels

Définition 1 : L'ensemble des abscisses des points d'une droite orienté est l'ensemble des *nombres réels*.



L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Les abscisses des points de la demie-droite [OI) appartiennent à $\mathbb{R}_+$.

II RELATION D'ORDRE SUR $\mathbb{R}$

II.1 Être inférieur à

Définition 2 : Soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que « *x est inférieur à y* » et on note $x \leqslant y$ si, et seulement si $y - x \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 1 :

$(\mathbb{R}\,;\leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné.

En particulier, tous les éléments de $\mathbb{R}$ sont comparables :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \quad \text{ou} \quad y \leqslant x.$$

Remarques :

— La relation $\geqslant$ est aussi une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.

— La relation $<$ est définie par $x < y \iff y - x \in \mathbb{R}_+^* \iff x \leqslant y$ et $x \neq y$.

ATTENTION La relation $<$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est ni réflexive, ni anti-symétrique.

Proposition 2 (Compatibilité de $\leqslant$ avec $+$ et $\times$) : Soient a, b, c et d des nombres réels.

1. Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $a + c \leqslant b + d$.
2. Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$ alors $ac \leqslant bd$.
3. $a \leqslant b \iff -b \leqslant -a$.
4. Si a et b sont non nuls de même signe alors $a \leqslant b \iff \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.

En particulier,

— $a \leqslant b \iff \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ a + \lambda \leqslant b + \lambda$.

— $\forall\, \lambda > 0,\ a \leqslant b \iff \lambda\, a \leqslant \lambda\, b$ et $\forall\, \lambda < 0,\ a \leqslant b \iff \lambda\, a \geqslant \lambda\, b$.

ATTENTION L'assertion 4 ne dit pas que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$ mais seulement qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

ATTENTION On ne soustrait ni de divise des inégalités !

$$\begin{cases} 1 \leqslant 3 \\ 2 \leqslant 5 \end{cases} \qquad \text{mais} \qquad 1 - 2 > 3 - 5.$$

On pourra cependant les ajouter membre à membre ou les multiplier si tous les membres sont strictement positifs.

Exercice 2 : Soient a, b des réels strictement positifs.

1. Ordonner les réels $\dfrac{a+b}{2}$ et $\sqrt{ab}$.
2. Montrer que leur distance est majorée par $\dfrac{|b-a|^3}{8ab}$.

II.2 Borne supérieure, borne inférieure

Rappel 1 (Parties bornées) : Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

On dit que :

- A est *majorée* dans E lorsque : $\exists\, \mathrm{M} \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M}$.
- A est *minorée* dans E lorsque : $\exists\, m \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ m \leqslant x$.
- A est *bornée* dans E lorsque A est à la fois majorée et minorée.

- A admet un *maximum* lorsque : $\exists\, b \in \mathrm{A},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant b$.
- A admet un *minimum* lorsque : $\exists\, a \in \mathrm{A},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ a \leqslant x$.

Exemple 1 : L'intervalle $[0\,;1[$ admet 0 pour plus petit élément mais n'admet PAS de plus grand élément.

1. $0 \in [0\,;1[$ et $\forall\, x \in [0\,;1[,\ 0 \leqslant x$ donc 0 est le plus petit élément de $[0\,;1[$.
2. Supposons qu'il existe $\mathrm{M} \in [0\,;1[$ qui en soit le plus grand élément. Alors $\mathrm{M}' = \dfrac{\mathrm{M}+1}{2}$ vérifie, $\mathrm{M} < \mathrm{M}'$ et $\mathrm{M}' \in [0\,;1[$ ce qui contredit la « maximalité » de M.

Il n'existe donc pas de plus grand élément dans $[0\,;1[$.

Définition 3 (Borne supérieure) :

- Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$.

  On appelle *borne supérieure* de A, notée $\sup(A)$, le plus petit des majorants de A.
- Soit B une partie minorée de $\mathbb{R}$.

  On appelle *borne inférieure* de B, notée $\inf(B)$, le plus grand des minorants de B.

ATTENTION Les bornes inférieure et supérieure n'ont aucune raison d'exister.

Théorème 3 (Propriété de la borne supérieure) :

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

ATTENTION

Ce théorème est faux dans $\mathbb{Q}$.

Par exemple $A = \{q \in \mathbb{Q}^+, q^2 \leqslant 2\}$ est non vide (elle contient 0) et majorée (par 10).

Si A admettait une borne supérieure $\alpha \in \mathbb{Q}$:

— Si $\alpha^2 < 2$, alors, on peut trouver un entier n tel que $\alpha + \dfrac{1}{n} \in A$; absurde.

— Si $\alpha^2 > 2$, alors, on peut trouver un entier n tel que $\alpha - \dfrac{1}{n}$ majore A ; absurde.

— Si $\alpha^2 = 2$, alors $\alpha \notin \mathbb{Q}$; absurde.

Conclusion, A ne possède pas de borne supérieure.

On prendra garde au fait qu'une partie A peut posséder une borne supérieure a sans avoir de plus grand élément.

Réciproquement, si A possède un plus grand élément a, alors $a = \max(A) = \sup(A)$.

Exercice 3 : Compléter :

	$\min(A)$	$\inf(A)$	$\max(A)$	$\sup(A)$
$A = \{1\}$				
$A = \{2,\ 4\}$				
$A = \left\{\dfrac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$				
$A = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, x^2 \leqslant 2\}$				

Théorème 4 (Caractérisation de la borne supérieure) : Soit A une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{M} = \sup \mathrm{A} \iff \begin{cases} \mathrm{M} \text{ est un majorant de A} \\ \forall\, \mathrm{M}' \text{ majorant de A, } \mathrm{M} \leqslant \mathrm{M}' \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \mathrm{M} \text{ est un majorant de A} \\ \forall\, b < \mathrm{M},\ b \text{ n'est pas un majorant de A} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M} \\ \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, x_\varepsilon \in \mathrm{A} \text{ tel que } \mathrm{M} - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$$

Exercice 4 : Sur le même modèle, écrire une caractérisation de la borne inférieure.

Corollaire 4.1 (Borne inférieure d'une partie non vide et minorée de ℝ) : Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Méthode 1 (Utilisation courante de la borne supérieure) :
Soient A *une partie de* $\mathbb{R}$ *admettant une borne supérieure.*

1. *Pour montrer que* $\sup(\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{M}$*, il suffit de montrer :* $\forall\, a \in \mathrm{A},\quad a \leqslant \mathrm{M}$
2. *Pour montrer que* $\sup(\mathrm{A}) \geqslant \mathrm{M}$*, il suffit de montrer :* $\exists\, a_0 \in \mathrm{A},\quad a_0 \geqslant \mathrm{M}$*;*

Exemple 2 : L'intervalle $[0\,;1[$ admet 1 comme borne supérieure.

1. Par définition, $\forall\, x \in [0\,;1[,\ x \leqslant 1$ donc $[0\,;1[$ est une partie non vide est majorée. $\sup([0\,;1[)$ existe d'après le théorème (3) et on a :
$$\sup([0\,;1[) \leqslant 1.$$
2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque. Montrons que $1-\varepsilon$ n'est pas un majorant de $[0\,;1[$.

   On sait déjà que $1-\varepsilon \in [0\,;1[$, de même que $\dfrac{(1-\varepsilon)+1}{2} = 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$.

   Comme $1 - \varepsilon < 1 - \dfrac{\varepsilon}{2} < 1$, le réel $1-\varepsilon$ n'est pas un majorant de $[0\,;1[$.

La réunion des points 1 et 2, montre que 1 est un majorant de $[0\,;1[$ et que c'est le plus petit. Le réel 1 est donc la borne supérieure de $[0\,;1[$.

Exercice 5 : Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et bornées telles que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$.
Montrer que $\inf(\mathrm{B}) \leqslant \inf(\mathrm{A})$ et $\sup(\mathrm{A}) \leqslant \sup(\mathrm{B})$.

II.3 Fonctions bornées

Définition 4 (Fonction bornées) : Soient I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$.

- Une fonction f est dite *majorée* sur I lorsqu'il existe un réel M tel que :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) \leqslant \mathrm{M}.$$

Le réel M est alors appelé un *majorant* de f (sur I).

On appelle alors *borne supérieure* de f sur I, notée $\sup\limits_{\mathrm{I}}(f)$, le réel

$$\sup_{\mathrm{I}}(f) = \sup\left\{f(x),\ x \in \mathrm{I}\right\}.$$

- Une fonction f est dite *minorée* sur I lorsqu'il existe un réel m tel que :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) \geqslant m.$$

Le réel m est alors appelé un *minorant* de f (sur I).

On appelle alors *borne inférieure* de f sur I, notée $\inf\limits_{\mathrm{I}}(f)$, le réel

$$\inf_{\mathrm{I}}(f) = \inf\left\{f(x),\ x \in \mathrm{I}\right\}.$$

- Une fonction f est dite *bornée* lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Exercice 6 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g \in \mathscr{F}(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.

1. Démontrer que si f et g sont majorées alors $f+g$ est majorée et

$$\sup_{\mathrm{I}}(f+g) \leqslant \sup_{\mathrm{I}} f + \sup_{\mathrm{I}} g. \tag{XII.1}$$

2. Donner un exemple où l'inégalité (XII.1) est stricte.
3. Démontrer que si f est majorée et g bornée alors $\sup\limits_{\mathrm{I}}(f+g) \geqslant \sup\limits_{\mathrm{I}} f + \inf\limits_{\mathrm{I}} g$.

III Topologie de $\mathbb{R}$

III.1 La droite numérique achevée

Définition 5 (Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$) : L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\,;+\infty\}$, noté $\overline{\mathbb{R}}$, est appelé *droite numérique achevée.*

On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation $\leqslant$, l'addition $+$ et la multiplication $\times$ de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

Prolongement de l'ordre : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ -\infty < x < +\infty$.

Prolongement de l'addition : $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

- $(+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty$.
- $(-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty$.
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

Prolongement de la multiplication :

- $\dfrac{1}{+\infty} = \dfrac{1}{-\infty} = 0.$

$\forall\, x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$,

- $x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$
- $x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = \begin{cases} -\infty & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ devient ainsi un ensemble totalement ordonné. De plus il possède un maximum $+\infty$ et un minimum $-\infty$.

On prendra garde au fait que nous n'avons pas totalement défini de loi de composition interne dans $\overline{\mathbb{R}}$ puisque nous n'avons pas défini

- $0 \times (\pm\infty)$
- $(-\infty) + (+\infty)$
- $(-\infty) - (-\infty)$
- $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

qui restent des formes indéterminées.

Proposition 5 : Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ (éventuellement $\pm\infty$).

En outre, si les bornes supérieure et inférieure existent dans $\mathbb{R}$ alors elles coïncident avec leur homologue dans $\overline{\mathbb{R}}$.

III.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 6 : Soients $(a\,;b) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$.

On définit les ensembles suivants :

- $[a\,;b] = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, a \leqslant x \leqslant b\right\}$
- $]a\,;b] = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, a < x \leqslant b\right\}$
- $[a\,;b[= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, a \leqslant x < b\right\}$
- $]a\,;b[= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, a < x < b\right\}$

On appelle *intervalle* de $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie I de $\overline{\mathbb{R}}$ vérifiant :

$$\forall\, x, y \in \mathrm{I},\ x \leqslant y \implies [x\,;y] \subset \mathrm{I}.$$

Exemples 3 :

- Lorsque $a, b \in \mathbb{R}$, on appelle *segment* l'ensemble $[a\,;b] \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \text{Si } a < b, & [a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leqslant x \leqslant b\} \\ \text{Si } a = b, & [a\,;a] = \{a\} \\ \text{Si } a > b, & [a\,;b] = \emptyset \end{cases}$$

- $\varnothing$ et $\{a\}$ sont dits *intervalles triviaux* de $\mathbb{R}$. Ce sont les seuls intervalles de $\mathbb{R}$ qui soient finis.

- $\mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ car $1,\ 2 \in \mathbb{Z}$ mais pas $\dfrac{3}{2} \in \mathbb{Z}$.
- $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle car $-1, 1 \in \mathbb{R}^*$ mais pas $[-1\,;1]$ qui contient $0 \notin \mathbb{R}^*$.
- $\mathbb{Q}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ (*cf.* corollaire (13.1)).

Théorème 6 (Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$) : Les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ sont exactement les ensembles
$[a\,;b]$, $[a\,;b[$, $]a\,;b]$ et $]a\,;b[$ pour a et b décrivant $\overline{\mathbb{R}}$.

Les intervalles $[a\,;b]$ et $]a\,;b[$ avec $(a\,;b) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$ sont respectivement dit *fermé* et *ouvert*.

Exemples 4 (Classification des intervalles de $\mathbb{R}$) : Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont :

- l'ensemble vide $\varnothing$,
- l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier,
- les singletons $\{a\}$, avec $a \in \mathbb{R}$ un réel,
- les segments $[a\,;b]$, avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,
- les intervalles ouverts $]a\,;b[$, avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,
- les intervalles semi-ouverts ou semi-fermés $[a\,;b[$ et $]a\,;b]$, avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,
- les demi-droites fermées $[a\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;a]$, avec $a \in \mathbb{R}$, définies respectivement par

$$[a\,;+\infty[= \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geqslant a\right\} \qquad \text{et} \qquad]-\infty\,;a] = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leqslant a\right\},$$

- les demi-droites ouvertes $]a\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;a[$, avec $a \in \mathbb{R}$, définies respectivement par

$$]a\,;+\infty[= \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > a\right\} \qquad \text{et} \qquad]-\infty\,;a[= \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < a\right\},$$

III.3 Voisinages

Définition 7 (Voisinage d'un point) : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

On appelle *voisinage* de a, noté $\mathcal{V}(a)$, toute partie $\mathrm{V} \subset \overline{\mathbb{R}}$ telle que $a \in \mathrm{V}$ et V contient un intervalle ouvert contenant a.

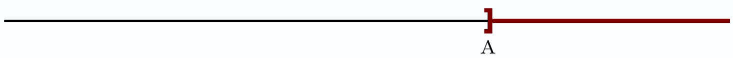
$$\mathrm{A} \in \mathcal{V}(a) \iff \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ ]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[\subset \mathrm{A}.$$

Exemples 5 (Exemples de voisinages) : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

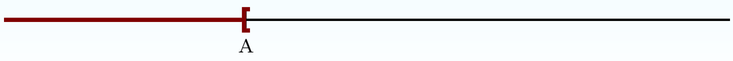
Les voisinages de a sont les intervalles de la forme :

- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[$ est un voisinage de a.

- $\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}$, $]\mathrm{A}\,;+\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.



- $\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}$, $]-\infty\,;\mathrm{A}[$ est un voisinage de $-\infty$.



Exemples 6 :

- $[0\,;1]$ est un voisinage de $0,2$: prendre $\varepsilon = 0,1$ par exemple.
- $[0\,;1]$ est un voisinage de $0,98$: prendre $\varepsilon = 0,01$ par exemple.
- $[0\,;1]$ n'est pas un voisinage de 1 : pour tout $\varepsilon > 0$, $]1-\varepsilon\,;1+\varepsilon[$ déborde à droite.
- $[0\,;1]$ est voisinage de toute réel a vérifiant $0 < a < 1$: il suffit de prendre $\varepsilon = \min\{a, 1-a\}$ (la plus petite des distances de a aux bornes de $[0\,;1]$).

Théorème 7 (Lemme de séparation) :

1. Pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, l'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a :

$$\forall\, \mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2 \in \mathcal{V}(a),\ \mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2 \in \mathcal{V}(a).$$

2. Deux points distincts de $\overline{\mathbb{R}}$ possèdent des voisinages disjoints :

$$\forall\ (a\,;b) \in \overline{\mathbb{R}}^2,\ a \neq b \implies \exists\, \mathrm{V}_a \in \mathcal{V}(a), \exists\, \mathrm{V}_b \in \mathcal{V}(b)\ \text{ tels que }\ \mathrm{V}_a \cap \mathrm{V}_b = \varnothing.$$

Remarque : Une autre manière de voir l'assertion (2) est d'écrire : *Soient a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. Si $a < b$ alors il existe un voisinage V_a de a et un voisinage V_b de b tels que :*

$$\forall\, x \in \mathrm{V}_a \ \textit{et}\ y \in \mathrm{V}_b,\ x < y.$$

Ce théorème permettra, entre autre, de démontrer l'unicité de la limite d'une suite ou d'une fonction en un point de $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 8 (Ouvert) : Soit U une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que U est un *ouvert* si, et seulement si U est un voisinage de chacun de ses points :

$$\forall\, a \in \mathrm{U},\ \left|\begin{array}{l} \exists\, \mathrm{V} \in \mathcal{V}(a),\ \mathrm{V} \subset \mathrm{U}. \\ \text{ou} \\ \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ ]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[\subset \mathrm{U}. \end{array}\right.$$

Exemples 7 :

- $\varnothing$ est ouvert, puisqu'il n'y a même pas de point a à tester, c'est donc tout bon.
- un ensemble de cardinal fini ne peut pas être ouvert (dès qu'il y a un point a dans U, il y a alors dans U un intervalle entier $]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[$)
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas ouverts : leurs points sont isolés.
- Tout intervalle ouvert $]b\,;c[$ est ouvert !

$$\left(\text{pour } a \text{ vérifiant } b < a < c, \text{ on peut prendre } \varepsilon = \min\left\{\frac{a-b}{2}, \frac{c-a}{2}\right\}\right).$$

- $\mathbb{R}$ est ouvert.
- Une intersection de deux ouverts U et V est encore un ouvert.

- Une réunion d'ouverts est un ouvert. En particulier, toute réunion d'intervalles ouverts est ouverte.

Dernière petite remarque complètement hors-programme avant de quitter ce paragraphe. C'est précisément l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ qui s'appelle une *topologie*. Celui-ci devient alors un *espace topologique*.

IV Opérateurs réels

IV.1 Valeur absolue

Définition 9 (Valeur absolue) : Soit $x \in \mathbb{R}$.

La *valeur absolue* de x est le nombre réel noté $|x|$ défini par :

$$|x| = \max(x\,;-x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0, \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Remarque : Une partie A est bornée si, et seulement si $\exists\, \mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall\, x \in \mathrm{A},\ |x| \leqslant \mathrm{M}.$$

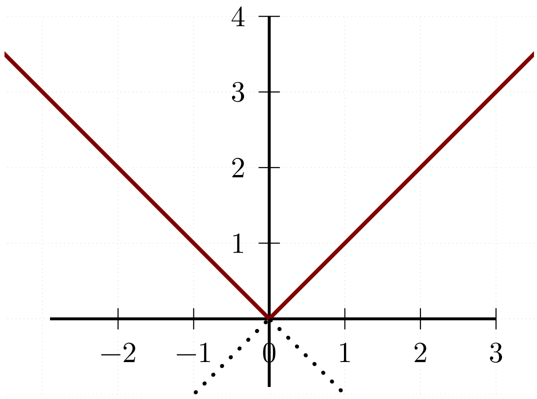


Figure XII.1 – $x \longmapsto |x|$.

Méthode 2 (Équation avec la valeur absolue) :
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

1. $|x-a| = r \iff x-a = r \quad \text{ou} \quad x-a = -r.$
2. $|x-a| \leqslant r \iff -r \leqslant x-a \leqslant r \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x-a \leqslant r \\ x-a \geqslant -r \end{cases}.$
3. $|x-a| \geqslant r \iff x-a \geqslant r \quad \text{ou} \quad x-a \leqslant -r.$

Exemple 8 : Écrire $|x-3|-|x+2|$ sans valeurs absolues.

On se ramène à la définition :

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geqslant 3 \\ -x+3 & \text{si } x < 3 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad |x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geqslant -2 \\ -x-2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

Le mieux est de représenter la situation par un tableau :

x		-2		3	
$\lvert x-3\rvert$	$3-x$		$3-x$	0	$x-3$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	0	$x+2$		$x+2$
$\lvert x-3\rvert-\lvert x+2\rvert$	5		$1-2x$		-5

$$|x-3|-|x+2| = \begin{cases} 5 & \text{si } x \in]-\infty,-2[\\ 1-2x & \text{si } x \in [-2,3[\\ -5 & \text{si } x \in [3,+\infty[\end{cases}$$

Exemple 9 : Résolution de l'équation $|x-4| = 2x+10$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$|x-4| = 2x+10 \iff \begin{cases} x-4 = 2x+10 & \text{si } x \geqslant 4 \\ \text{ou} & \\ 4-x = 2x+10 & \text{si } x < 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -14 & \text{si } x \geqslant 4 \\ \text{ou} & \\ x = -2 & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

Comme $-14 \notin [4,+\infty[$, il ne subsiste qu'une seule solution : $\mathscr{S} = \{-2\}$.

Exemple 10 : Résolution de l'inéquation $|x-2| < \dfrac{3}{x}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$.

On remarque que l'inéquation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}_-^*$ car $\dfrac{3}{x} < 0$ pour tout $x < 0$ alors que $|x-2| \geqslant 0$. On restreint donc notre résolution à $\mathbb{R}_+^*$.

$$|x-2| < \frac{3}{x} \iff -\frac{3}{x} < x-2 < \frac{3}{x} \underset{x>0}{\iff} -3 < x(x-2) < 3$$

$$\iff \begin{cases} 0 < x^2-2x-3 \\ \text{et} \\ (x+1)(x-3) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \text{ car } \Delta = -8 < 0 \\ \text{et} \\ x \in]-1\,;3[\cap \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

En conclusion, $\mathscr{S} =]0\,;3[$.

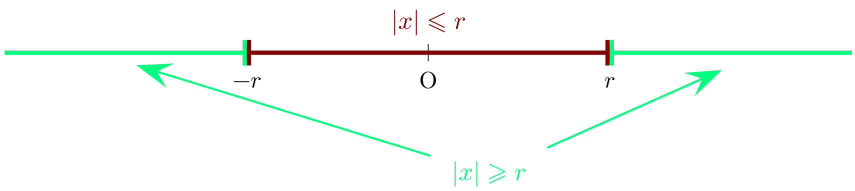


Figure XII.2 – $|x| \leqslant r$ et $|x| \geqslant r$.

Exercice 7 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|4x-5| = 3$.
2. $|4x-5| \leqslant 3$.
3. $|2x-7| > 1$.

Proposition 8 (Propriété de la valeur absolue) : Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $|x| \geqslant 0$ La valeur absolue est positive.
2. $|x| = 0 \iff x = 0$ La valeur absolue est définie.
3. $|-x| = |x|$ La valeur absolue est paire.
4. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.
5. $\sqrt{x^2} = |x|$ La valeur absolue dérive d'un produit scalaire.

En particulier,

Corollaire 8.1 :

- De la définition, $|x| = |y| \iff x = y \quad \text{ou} \quad x = -y$.
- De la parité, on n'oubliera pas que $|x-y| = |y-x|$.
- Du lien avec la racine carrée, on démontre aussi que

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ |xy| = |x|\,|y| \qquad \text{et} \qquad \forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*,\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Enfin, et de loin la propriété la plus importante :

Proposition 9 (Inégalité triangulaire) : Pour tous réels x et y, on a :

$$\Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|. \tag{XII.2}$$

Avec égalité si, et seulement si x et y sont de même signe.

Exercice 8 : Résoudre l'équation $|x+y| + y = |x-y| - y$.
Représenter graphiquement l'ensemble des solutions.

Proposition 10 (Fonction valeur absolue) :

- La fonction $x \longmapsto |x|$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \longmapsto |x|$ est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ où elle est respectivement décroissante et croissante.

ATTENTION La fonction $x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Définition 10 (Distance) : Soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.
On appelle distance entre x et y, noté $d\,(x\,;y)$, le réel $|x-y|$.

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ d\,(x\,;y) = |x-y|\,.$$

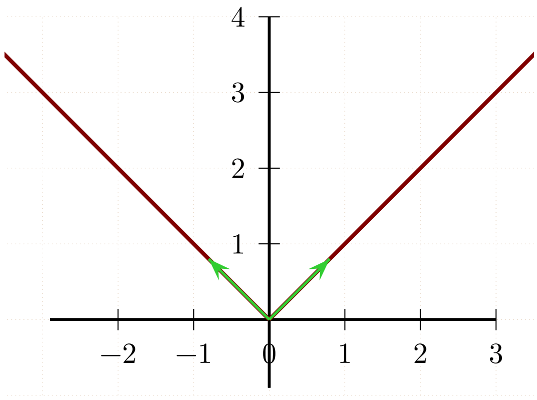


Figure XII.3 – Courbe représentative de $x \longmapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 : Compléter le tableau suivant (NB : $\varepsilon > 0$) :

Valeur absolue	Distance	Inégalités	Intervalle(s)
$\lvert x-2\rvert \leqslant 3$			
	$d(x,-1) \geqslant 5$		
		$1 \leqslant x \leqslant 2$	
			$]-5,9[$
		$10 < x < 11$	
$\lvert x+1\rvert \leqslant -1$			
	$d(x,a) \leqslant \varepsilon$		

IV.2 Partie entière

Théorème 11 ($\mathbb{R}$ est archimédien) : L'ensemble $\mathbb{R}$ est archimédien *i.e.* $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$, $\exists\, n \in \mathbb{N}, \quad y < nx$.

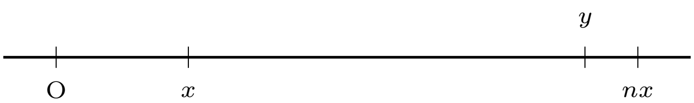


Figure XII.4 – $\mathbb{R}$ est archimédien.

Corollaire 11.1 : Pour tout $x \in]1\,;+\infty[$ et tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y < x^n$.

Définition/Théorème 11 (Partie entière) : Soit $x \in \mathbb{R}$.

Il existe un unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$p \leqslant x < p+1. \tag{XII.3}$$

Cet entier, noté $\lfloor x \rfloor$ ou $\mathrm{E}(x)$, est appelé *partie entière* de x :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

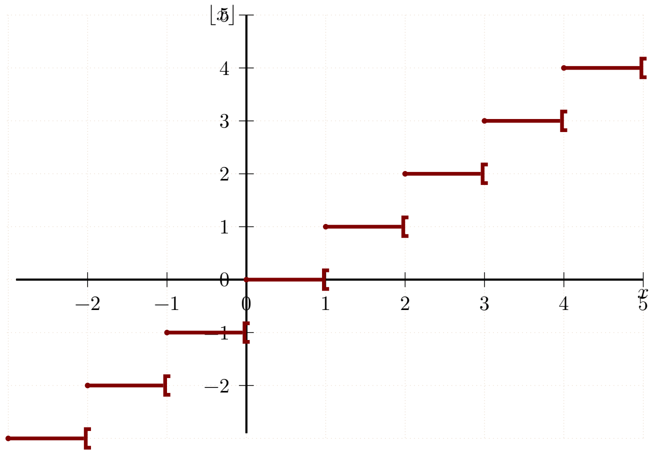


Figure XII.5 – $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$

Notamment, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Exemples 11 : $\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor -2 \rfloor = -2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$, $\lfloor \mathrm{e} \rfloor = 2$, $\lfloor -\mathrm{e} \rfloor = -3$.

ATTENTION $\lfloor -7,3 \rfloor = -8$ et non -7.

Exemple 12 : Soient $\mathrm{T} > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition sur $n \in \mathbb{Z}$, a-t-on $x - n\mathrm{T} \in [0\,;\mathrm{T}[$?

$$x - n\mathrm{T} \in [0\,;\mathrm{T}[\iff 0 \leqslant x - n\mathrm{T} < \mathrm{T} \iff n \leqslant \frac{x}{\mathrm{T}} < n+1.$$

Par définition de la partie entière, l'entier $\left\lfloor \dfrac{x}{\mathrm{T}} \right\rfloor$ convient.

À retenir, donc : $\quad x - \left\lfloor \dfrac{x}{\mathrm{T}} \right\rfloor \mathrm{T} \in [0\,;\mathrm{T}[$.

Exemples 13 : Soient $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{A} > 0$ fixés.

Le mot « rang » désigne ci-dessous uniquement des entiers naturels.

- À partir de quel rang est-il vrai que $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$?

  Cette inégalité est vraie si et seulement si $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, donc à partir du rang $\left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ car $\left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\dfrac{1}{\varepsilon}$.
- À partir de quel rang est-il vrai que $n^2 > \mathrm{A}$?

  C'est vrai si et seulement si $n > \sqrt{\mathrm{A}}$, donc à partir du rang $\left\lfloor \sqrt{\mathrm{A}} \right\rfloor + 1$.
- À partir de quel rang est-il vrai que $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$?

  C'est vrai si et seulement si $2^n > \dfrac{1}{\varepsilon} \iff n > -\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$, donc à partir du rang $\max\left\{0, \left\lfloor -\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln 2} \right\rfloor + 1\right\}$.
  Pourquoi ce « max » ? Parce que nous cherchons un entier naturel.

Corollaire II.2 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad k \leqslant x \implies k \leqslant \lfloor x \rfloor\,.$$

Méthode 3 (Utilisation de la partie entière) :
Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Pour montrer que $k \leqslant \lfloor x \rfloor$, il suffit de montrer que $k \leqslant x$.

En effet, si $k \leqslant x$ alors k est un entier inférieur à x. Il est donc plus petit que le plus grand entier inférieur à x soit $k \leqslant \lfloor x \rfloor$.

Exercice 10 :

1. Montrer que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$.

   Que peut-on en conclure pour la fonction partie entière ?
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.
3. Montrer que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}$.

   À-t-on $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?
4. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Proposition 12 (Propriétés de la partie entière) :

1.
   - Pour tout réel x et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
   - La fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.
2. La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est :
   - croissante sur $\mathbb{R}$,
   - constante sur tout intervalle de la forme $[n\,; n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$,
   - continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,
   - continue à droite mais discontinue à gauche en tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 11 : Représenter la fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$.

V Notion de densité

V.1 Place des rationnels et des irrationnels dans $\mathbb{R}$

Théorème 13 ($\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$) :

Tout intervalle $]a\,; b[$ non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$.

Moralité, il y a ainsi toujours un rationnel entre deux irrationnels distincts et un irrationnel entre deux rationnels distincts.

Corollaire 13.1 : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

- $\exists q \in \mathbb{Q}$ tel que $|x-q| < \varepsilon$.
- $\exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $|x-r| < \varepsilon$.

On dit que $\mathbb{R}$ est *adhérent* à $\mathbb{Q}$ et à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont *denses* dans $\mathbb{R}$.

En termes simples, une partie dense de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui est un peu partout sans être forcément tout.

Corollaire 13.2 :

Tout réel est la limite d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels.

Exemples 14 (Parties denses dans $\mathbb{R}$) :

- L'anneau $\mathbb{D}$ des nombres décimaux : $\mathbb{D} = \left\{ \dfrac{p}{10^n},\ p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$ (*cf.* corollaire (13.3)).
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas denses dans $\mathbb{R}$.

V.2 Approximations décimales

Définition/Théorème 12 (Approximation décimale d'un réel) : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le nombre décimal $p_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est appelé *approximation décimale par défaut* de x a la précision 10^{-n} et on a :

$$p_n \leqslant x < p_n + \frac{1}{10^n}.$$

Le nombre $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ est appelé *approximation décimale par excès* de x a la précision 10^{-n}.

Remarque : $p_0 = \lfloor x \rfloor$.

Exemple 15 (Approximation décimale de $\sqrt{2}$) :

Prenons $x = \sqrt{2}$ et posons $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

- $1^2 \leqslant x^2 < 2^2$ donc $1 \leqslant x < 2$ à 10^0 près et
$$u_0 = \lfloor x \rfloor = 1 \ \ \text{(partie entière de } x\text{)}.$$
- $(10x)^2 = 200$ et $14^2 = 196 \leqslant (10x^2) < 15^2 = 225$, donc $1,4 \leqslant x < 1,5$ à 10^{-1} près et
$$u_1 = \frac{\lfloor 10x \rfloor}{10} = \frac{14}{10} = 1,4.$$
- $(100x)^2 = 20000$ et $141^2 \leqslant (100x^2) < 142^2$, donc $1,41 \leqslant x < 1,42$ à 10^{-2} près et
$$u_2 = \frac{\lfloor 100x \rfloor}{100} = \frac{141}{100} = 1,41.$$
- ...

On construit ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des approximations décimale de $\sqrt{2}$ par défaut à 10^{-n} près.

Exemple 16 : $3,1415 \leqslant \pi < 3,1416$ à 10^{-4} près.

Corollaire 13.3 :

$\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque : Comme $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, c'est aussi une autre manière de montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Définition/Théorème 13 (Décimale) : Soit $x \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soient $p_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $d_n = 10^n(p_n - p_{n-1})$.
Alors d_n est un entier compris entre 0 et 1 appelé n-ième *décimale* de x.

Remarque : $p_n - p_{n-1} = d_n 10^{-n}$, ce qui entraîne, par télescopage, que :

$$\begin{aligned} p_n &= p_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{10^k} \\ &= p_0, d_1 d_2 \dots d_n. \end{aligned}$$

Comme la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, on écrit alors :

$$x = p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} = p_0, d_1 d_2 d_3 \dots$$

Développement décimal infini du réel x.

En conclusion :

À retenir 1 (Propriétés de $\mathbb{R}$) :

- $(\mathbb{R}, +, \times, .)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.
- $\mathbb{R}$ est doté d'une relation d'ordre totale $\leqslant$ qui permet de définir la norme $|x|$ d'un réel et la distance entre deux réels :

$$\mathrm{d}\,(x\,;y) = |x - y|.$$

- La relation d'ordre permet de doter $\mathbb{R}$ d'une famille de voisinages ouverts. $\mathbb{R}$ possède donc une structure d'espace normé et d'espace métrique.
- $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.
- $\mathbb{R}$ est archimédien. En particulier, ∀ x ℝ, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à x :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

- $\mathbb{R}$ est indénombrable.
- $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$ qui y est dense. De même que son complémentaire et l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux.

  En particulier, tout réel peut être vu comme la limite d'une suite de rationnels, d'irrationnels ou de décimaux.