Nombres réels

I Calculs dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 (Vrai ou Faux ?) :

1. $\forall\, a,b \in \mathbb{R}, \quad (a \leqslant b \implies a^2 \leqslant b^2)$
2. $\forall\, a,b \in \mathbb{R}, \quad (a^2 \leqslant b^2 \implies a \leqslant b)$
3. $\forall\, a,b \in \mathbb{R}_+, \quad (\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b} \implies a \leqslant b)$
4. $\forall\, a,b \in \mathbb{R}_+, \quad (a \leqslant b \implies \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b})$
5. $\forall\, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_+, \quad (a \leqslant \sqrt{b} \implies a^2 \leqslant b)$

Exercice 2 : Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall\, x \in [-1,1], \quad -1 \leqslant 4x^3 - 3x \leqslant 1.$
2. $\forall\, x,y \in]-1,1[, \quad -1 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1.$
3. $\forall\, x,y \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}.$
4. $\forall\, x,y \in [0\,;1[$ tels que $x \leqslant y, \quad \dfrac{x}{1-x} \leqslant \dfrac{y}{1-y}.$

Exercice 3 : Le maximum de deux nombres x, y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x,y)$. De même on notera $\min(x,y)$ le plus petit des deux nombres x, y.

Démontrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x,y,z)$.

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $x \geqslant \dfrac{1}{x}.$
2. $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{x+1}.$
3. $\sqrt{x} - \sqrt{2-x} \geqslant 1.$
4. $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} \geqslant \dfrac{3}{2}.$
5. $(3x+1)^2 \leqslant 2(3x+1)(x+1).$
6. $\dfrac{x-1}{x+3} \geqslant 2.$
7. $\sqrt{3x^2 - 11x + 21} < 2x - 3$
8. $\dfrac{2x+1}{x-2} \leqslant \dfrac{x+1}{x+3}.$
9. $2 < (2x-3)^2 \leqslant \dfrac{25}{4}.$

Exercice 5 : Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. On pose $m = \dfrac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique), $g = \sqrt{xy}$ (moyenne géométrique) et $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y})$ (moyenne harmonique).

Montrer que $x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y$.

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|2x-1| = |5x+1|.$
2. $|2x-1| \leqslant |x+2|.$
3. $|x^2 - x + 5| = |x-1|.$
4. $|x^2 + x - 3| > |x|$
5. $|2x-5| = |x^2 - 4|$
6. $|x+3| \leqslant |x^2 - 3|.$
7. $|x+2| + |2x-1| + |x-3| = 8.$
8. $4x^2 - 7|x| + 3 = 0.$
9. $|x^2 - 2x + 3| = |-x^2 + 3x + 2|.$

Exercice 7 : On définit la relation $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \preccurlyeq y \iff |x| \leqslant |y|$$

1. La relation $\preccurlyeq$ est-elle réflexive ? antisymétrique ? transitive ?
2. Deux réels x et y sont-ils toujours comparables pour $\preccurlyeq$?

Exercice 8 :

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x-2| \leqslant 1$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $-5 \leqslant y \leqslant -4$.

   Encadrer $x+y$, $x-y$, xy et $\dfrac{x}{y}$.
2. Soit $(x\,;y) \in \left]-1\,;1\right[^2$. Montrer que $\left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right| < 1$.

Exercice 9 : Soient x et y deux réels vérifiant $\left|x-\dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$ et $|y+1| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Montrer que $\left|\dfrac{x}{y}+\dfrac{5}{6}\right| \leqslant \dfrac{2}{3}$.

Exercice 10 : A-t-on : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |e^x| \leqslant e^{|x|}$?

Exercice 11 (Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski) : Soient $a_1,\dots, a_n, b_1,\dots, b_n$ des nombres réels.

1. En considérant la fonction $f:\ x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+xb_k)^2$, montrer que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\,\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \qquad \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)}$$

2. En déduire :

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \qquad \text{(inégalité de Minkowski)}$$

II Borne supérieure

Exercice 12 : Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $[0\,;1] \cap \mathbb{Q}$
2. $]0\,;1[\cap \mathbb{Q}$
3. $\mathbb{N}$
4. $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n^2} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Exercice 13 : Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de : $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ avec $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

Exercice 14 : Soient A et B deux parties majorées non vides de $\mathbb{R}$.

1. On note $A+B = \{a+b,\ (a\,;b) \in A \times B\}$.

   Montrer que $A+B$ admet une borne supérieure, et que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
2. On note $A-B = \{a-b,\ (a\,;b) \in A \times B\}$.

   Montrer que $A-B$ admet une borne supérieure, et que $\sup(A-B) = \sup(A) + \inf(B)$.

3. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

Montrer que $\sup\left\{|x-y|,\ (x,y)\in \mathrm{A}^2\right\} = \sup(\mathrm{A}) - \inf(\mathrm{A})$.

Exercice 15 : Soit $f : [0\,;1] \longmapsto [0\,;1]$ une application croissante.
On pose $\mathrm{A} = \{x \in [0\,;1]\,, f(x) \geqslant x\}$.

1. Montrer que A admet une borne supérieure m.
2. Montrer que m est un point fixe de f *i.e.* $f(m) = m$.

III Partie entière

Exercice 16 : Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor 2x \rfloor \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2\lfloor x \rfloor \end{array}$.

A-t-on $f \equiv g$?

Exercice 17 : Représenter la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Exercice 18 : Soit n un entier naturel.

1. Montrer que le nombre de chiffres $\kappa(n)$ de n dans son écriture décimale est :

$$\kappa(n) = \lfloor \log n \rfloor + 1$$

2. Quel est le nombre de chiffres de n dans son écriture en base b ?

Exercice 19 : Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad (x \in \mathbb{Z}) \iff (\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor)$.

Exercice 20 : Montrer que $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\quad \lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Exercice 21 : Résoudre l'équation

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \lfloor 2x+3 \rfloor = \lfloor x+2 \rfloor$$

Exercice 22 :

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. En déduire la partie entière de $\mathrm{A} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{10000}}$.

Exercice 23 : Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.

Exercice 24 : Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+1}{b} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a+b-1}{b} \right\rfloor = a.$$