Nombres réels

I Calculs dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 (Vrai ou Faux ?) :

1. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad (a \leqslant b \implies a^2 \leqslant b^2)$
2. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad (a^2 \leqslant b^2 \implies a \leqslant b)$
3. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}_+, \quad (\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b} \implies a \leqslant b)$
4. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}_+, \quad (a \leqslant b \implies \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b})$
5. $\forall\, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_+, \quad (a \leqslant \sqrt{b} \implies a^2 \leqslant b)$

Exercice 2 : Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall\, x \in [-1, 1], \quad -1 \leqslant 4x^3 - 3x \leqslant 1.$
2. $\forall\, x, y \in]-1, 1[, \quad -1 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1.$
3. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}.$
4. $\forall\, x, y \in [0\,;1[$ tels que $x \leqslant y, \quad \dfrac{x}{1-x} \leqslant \dfrac{y}{1-y}.$

Correction :

1. Étudier la fonction $x \longmapsto 4x^3 - 3x$ sur $[-1\,;1]$.
2. $1+xy-(x+y) = (1-x)(1-y) > 0$ si $x, y < 1$ et $1+xy+(x+y) = (1+x)(1+y) > 0$ si $x, y > -1$.

Exercice 3 : Le maximum de deux nombres x, y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x, y)$. De même on notera $\min(x, y)$ le plus petit des deux nombres x, y.

Démontrer que :

$$\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x, y, z)$.

Correction : Explicitons la formule pour $\max(x, y)$.

Si $x \geqslant y$, alors $|x-y| = x-y$ donc $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+x-y) = x$.

De même si $x \leqslant y$, alors $|x-y| = -x+y$ donc $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-x+y) = y$.

Pour trois éléments, nous avons $\max(x, y, z) = \max\big(\max(x, y), z\big)$, donc d'après les formules pour deux éléments :

$$\begin{aligned}\max(x, y, z) &= \frac{\max(x, y) + z + |\max(x, y) - z|}{2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) + z + \left|\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) - z\right|}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $x \geqslant \dfrac{1}{x}$.
2. $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{x+1}$.
3. $\sqrt{x} - \sqrt{2-x} \geqslant 1$.
4. $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} \geqslant \dfrac{3}{2}$.
5. $(3x+1)^2 \leqslant 2(3x+1)(x+1)$.
6. $\dfrac{x-1}{x+3} \geqslant 2$.
7. $\sqrt{3x^2 - 11x + 21} < 2x - 3$
8. $\dfrac{2x+1}{x-2} \leqslant \dfrac{x+1}{x+3}$.
9. $2 < (2x-3)^2 \leqslant \dfrac{25}{4}$.

Exercice 5 : Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. On pose $m = \dfrac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique), $g = \sqrt{xy}$ (moyenne géométrique) et $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y})$ (moyenne harmonique).

Montrer que $x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y$.

Correction : Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$.

1. On a déjà $x = \dfrac{x+x}{2} \leqslant \dfrac{x+y}{2} = m \leqslant \dfrac{y+y}{2} = y$ et donc $x \leqslant m \leqslant y$.

   (on peut aussi écrire : $m - x = \dfrac{x+y}{2} - x = \dfrac{y-x}{2} \geqslant 0$).
2. On a ensuite $x = \sqrt{x.x} \leqslant \sqrt{xy} = g \leqslant \sqrt{y.y} = y$ et donc $x \leqslant g \leqslant y$.
3. $m - g = \dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \dfrac{1}{2}((\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \geqslant 0$ et donc, $x \leqslant g \leqslant m \leqslant y$.
4. D'après 1), la moyenne arithmétique de $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ est comprise entre $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$, ce qui fournit $\dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{h} \leqslant \dfrac{1}{x}$, ou encore $x \leqslant h \leqslant y$.
5. D'après 3), la moyenne géométrique des deux réels $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique. Ceci fournit $\sqrt{\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{y}} \leqslant \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y})$ ou encore $\dfrac{1}{g} \leqslant \dfrac{1}{h}$ et finalement

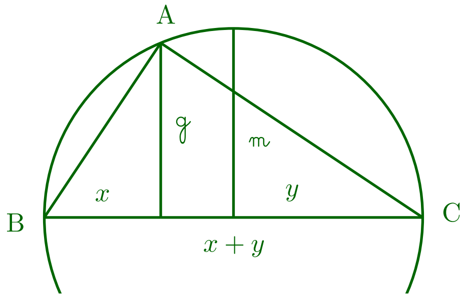
$$\boxed{x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y \text{ où } \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right),\ g = \sqrt{xy} \text{ et } m = \frac{x+y}{2}.}$$

Remarque : On a $h = \dfrac{2xy}{x+y}$, mais cette expression ne permet pas de comprendre que $\dfrac{1}{h}$ est la moyenne arithmétique de $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$.

On peut visualiser l'inégalité entre moyenne arithmétique et géométrique.

Si (ABC) est un triangle rectangle en A et A′ est le pied de la hauteur issue de A, on sait que $AA'^2 = A'B.A'C$. On se sert de cette remarque pour construire g et la comparer graphiquement à m.

On accole deux segments de longueurs respectives x et y. On construit alors un triangle rectangle d'hypoténuse ce segment (de longueur $x+y$) noté [BC], tel que le troisième sommet A ait une projection orthogonale A′ sur (BC) vérifiant $BA' = x$ et $CA' = y$.



La moyenne arithmétique de x et y est $m = \dfrac{x+y}{2}$, le rayon du cercle, et la moyenne géométrique de x et y est $g = \sqrt{xy} = \sqrt{\mathrm{A'B.A'C}} = \mathrm{AA'}$, la hauteur issue de A du triangle (ABC).

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|2x-1| = |5x+1|$.
2. $|2x-1| \leqslant |x+2|$.
3. $|x^2-x+5| = |x-1|$.
4. $|x^2+x-3| > |x|$
5. $|2x-5| = |x^2-4|$
6. $|x+3| \leqslant |x^2-3|$.
7. $|x+2|+|2x-1|+|x-3| = 8$.
8. $4x^2-7|x|+3 = 0$.
9. $|x^2-2x+3| = |-x^2+3x+2|$.

Exercice 7 : On définit la relation $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \preccurlyeq y \iff |x| \leqslant |y|$$

1. La relation $\preccurlyeq$ est-elle réflexive ? antisymétrique ? transitive ?
2. Deux réels x et y sont-ils toujours comparables pour $\preccurlyeq$?

Exercice 8 :

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x-2| \leqslant 1$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $-5 \leqslant y \leqslant -4$.

   Encadrer $x+y$, $x-y$, xy et $\dfrac{x}{y}$.
2. Soit $(x\,;y) \in]-1\,;1[^2$. Montrer que $\left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right| < 1$.

Exercice 9 : Soient x et y deux réels vérifiant $\left|x - \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$ et $|y+1| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Montrer que $\left|\dfrac{x}{y} + \dfrac{5}{6}\right| \leqslant \dfrac{2}{3}$.

Exercice 10 : A-t-on : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |e^x| \leqslant e^{|x|}$?

Exercice 11 (Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski) : Soient $a_1,\dots, a_n, b_1,\dots, b_n$ des nombres réels.

1. En considérant la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+xb_k)^2$, montrer que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \qquad \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)}$$

2. En déduire :

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \qquad \text{(inégalité de Minkowski)}$$

Correction :

1. Si les b_k sont tous nuls, l'inégalité est claire.

Sinon, pour x réel, posons

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k + xb_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) x + \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

P est un trinôme du second degré de signe constant sur $\mathbb{R}$. Son discriminant réduit est donc négatif ou nul ce qui fournit :

$$0 \geqslant \Delta' = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right),$$

ou encore $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$, qui est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \quad \text{(Cauchy-Schwarz)}\\ &= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2\end{aligned}$$

et donc, $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$, qui est l'inégalité de Minkowski.

Commentaires : L'inégalité de Cauchy-Schwarz affirme que le produit scalaire de deux vecteurs est inférieur ou égal au produit de leurs normes et l'inégalité de Minkowski est l'inégalité triangulaire.

II Borne supérieure

Exercice 12 : Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $[0\,;1] \cap \mathbb{Q}$
2. $]0\,;1[\cap \mathbb{Q}$
3. $\mathbb{N}$
4. $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Correction :

1. $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. Les majorants : $[1,+\infty[$. Les minorants : $]-\infty\,;0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Le plus grand élément : 1. Le plus petit élément 0.
2. $]0,1[\cap\mathbb{Q}$. Les majorants : $[1,+\infty[$. Les minorants : $]-\infty\,;0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Il n'existe pas de plus grand élément ni de plus petit élément.
3. $\mathbb{N}$. Pas de majorants, pas de borne supérieure, ni de plus grand élément. Les minorants : $]-\infty\,;0]$. La borne inférieure : 0. Le plus petit élément : 0.

4 $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Les majorants : $\left[\frac{5}{4}\,;+\infty\right[$. Les minorants : $]-\infty\,;-1]$. La borne supérieure : $\frac{5}{4}$. La borne inférieure : -1. Le plus grand élément : $\frac{5}{4}$. Pas de plus petit élément.

Exercice 13 : Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de : $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ avec $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

Correction : $(u_{2k})_k$ tend vers $+\infty$ et donc A ne possède pas de majorant, ainsi A n'a pas de borne supérieure (cependant certains écrivent alors $\sup A = +\infty$).

D'autre part toutes les valeurs de (u_n) sont positives et $(u_{2k+1})_k$ tend vers 0, donc $\inf A = 0$.

Exercice 14 : Soient A et B deux parties majorées non vides de $\mathbb{R}$.

1. On note $A + B = \{a + b,\ (a\,;b) \in A \times B\}$.

   Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure, et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
2. On note $A - B = \{a - b,\ (a\,;b) \in A \times B\}$.

   Montrer que $A - B$ admet une borne supérieure, et que $\sup(A - B) = \sup(A) + \inf(B)$.
3. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

   Montrer que $\sup\{|x - y|,\ (x, y) \in A^2\} = \sup(A) - \inf(A)$.

Correction :

1. Comme A et B sont non vides, $A + B$ est non vide. Pour tout $x \in A + B$, il existe $(a\,;b) \in A \times B$ tels que $x = a + b$.

   Or, $a \leqslant \sup(A)$ et $b \leqslant \sup(B)$ donc $x \leqslant \sup(A) + \sup(B)$.

   Ainsi $A + B$ est majorée par $\sup(A) + \sup(B)$, donc admet une borne supérieure.

   En particulier, de la définition de la borne supérieure de $A + B$, on a :

   $$\sup(A + B) \leqslant \sup(A) + \sup(B). \tag{XI.1}$$

   Montrons que $\sup(A) + \sup(B)$ est le plus petit des majorants de $A + B$.

   Soit M un majorant de $A + B$, on a donc pour tout $a \in A$ et $b \in B$, $a + b \leqslant M$.

   Ainsi $a \leqslant M - b$, et ceci pour tout $a \in A$.

   $M - b$ est donc un majorant de A d'où $\sup(A) \leqslant M - b$ par définition de $\sup(A)$.

   D'où, $b \leqslant M - \sup(A)$ et ce, pour tout $b \in B$.

   Par définition de la borne supérieure de B cette fois, on a encore $\sup(B) \leqslant M - \sup(A)$.

   Finalement $\sup(A) + \sup(B) \leqslant M$ i.e. $\sup(A) + \sup(B)$ est le plus petit des majorants de $A + B$.

   Donc, $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

   Remarque : Une autre méthode est de montrer directement l'inégalité contraire de (XI.1).

   Soient $a \in A$ et $b \in B$. Alors $a + b \leqslant \sup(A + B) \iff a \leqslant \sup(A + B) - b$ qui est donc un majorant de A.

   Par définition de la borne supérieure, $\sup(A) \leqslant \sup(A + B) - b$.

   Mais alors $b \leqslant \sup(A + B) - \sup(A)$ puis $\sup(B) \leqslant \sup(A + B) - \sup(A)$.

   Donc $\sup(A) + \sup(B) \leqslant \sup(A + B)$ et l'égalité.

2 Même raisonnement.

3 Posons $B = \{|y-x|,\ (x,y) \in A^2\}$.

A est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, et donc $m = \inf(A)$ et $M = \sup(A)$ existent dans $\mathbb{R}$.

Pour $(x\,;y) \in A^2$, on a $m \leqslant x \leqslant M$ et $m \leqslant y M$, et donc $y - x \leqslant M - m$ et $x - y \leqslant M - m$ ou encore $|y-x| \leqslant M - m$.

Par suite, B est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. B admet donc une borne supérieure.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(x_0\,;y_0) \in A^2$ tel que $x_0 < \inf(A) + \frac{\varepsilon}{2}$ et $y_0 > \sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}$.

Ces deux éléments x_0 et y_0 vérifient,

$$|y_0 - x_0| \geqslant y_0 - x_0 > \left(\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\inf(A) + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \sup(A) - \inf(A) - \varepsilon.$$

En résumé,

a $\forall (x,y) \in A^2,\ |y-x| \leqslant \sup(A) - \inf A$ et

b $\forall \varepsilon > 0,\ \exists (x,y) \in A^2 /\ |y-x| > \sup(A) - \inf A - \varepsilon$.

Donc, $\sup B = \sup(A) - \inf A$ i.e.

$$\sup\{|y-x|,\ (x,y) \in A^2\} = \sup(A) - \inf(A).$$

Exercice 15 : Soit $f : [0\,;1] \longmapsto [0\,;1]$ une application croissante.

On pose $A = \{x \in [0\,;1],\, f(x) \geqslant x\}$.

1 Montrer que A admet une borne supérieure m.

2 Montrer que m est un point fixe de f *i.e.* $f(m) = m$.

Correction :

1 A est une partie non-vide (car elle contient 0), et majorée (par 1) de $\mathbb{R}$.

Elle admet donc une borne supérieure m.

2 On va raisonner par l'absurde pour démontrer que $f(m) = m$.

a Si $f(m) < m$, comme m est le plus petit des majorants de A, $f(m)$ ne majore pas A.

Il existe donc un élément c de A tel que $f(m) < c \leqslant m$.

Mais alors $f(c) \geqslant c > f(m)$ alors que $c \leqslant b$. Ceci contredit que f est croissante.

b Si $f(m) > m$, comme f est croissante, on a $f(f(m)) \geqslant f(m)$, et donc $f(m) \in I$, ce qui est impossible puisque $f(m)$ est strictement supérieur à la borne supérieure de A.

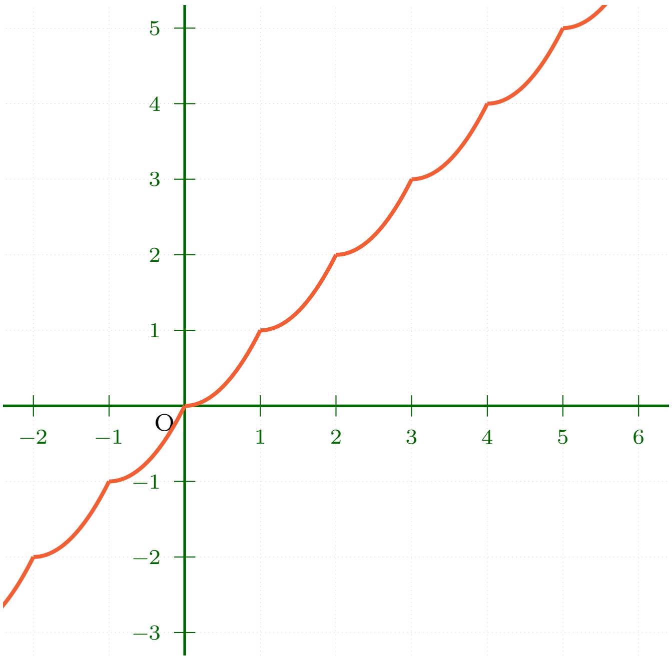
III Partie entière

Exercice 16 : Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \lfloor 2x \rfloor \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & 2\lfloor x \rfloor \end{array}$.

A-t-on $f \equiv g$?

Exercice 17 : Représenter la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Correction :



$$x \longmapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2 .$$

Exercice 18 : Soit n un entier naturel.

1. Montrer que le nombre de chiffres $\kappa(n)$ de n dans son écriture décimale est :

$$\kappa(n) = \lfloor \log n \rfloor + 1$$

2. Quel est le nombre de chiffres de n dans son écriture en base b ?

Correction :

1. Un nombre $n \geqslant 1$ est nécessairement compris entre deux puissances de 10 i.e.

$$\exists\, p \in \mathbb{N}^*,\ /\ 10^p \leqslant n < 10^{p+1} \quad \text{i.e. } n \text{ possède } p+1 \text{ chiffres.}$$

Or, comme la fonction $\log$ est une fonction croissante, on a aussi :

$$\begin{array}{rcl} \log 10^p & \leqslant \log n < & \log 10^{p+1} \\ p & \leqslant \log n < & p+1. \end{array}$$

On a donc : $\lfloor \log \mathrm{N} \rfloor = p$ où E est la fonction partie entière.

Conclusion : le nombre de chiffres de n est donc : $\lfloor \log \mathrm{N} \rfloor + 1$.

Par exemple, comme $\log\left(2021^{2022}\right) \simeq 6683,9$. Le nombre 2021^{2022} s'écrit avec 6 684 chiffres !

2. Raisonnement identique avec $\log_b$.

Exercice 19 : Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (x \in \mathbb{Z}) \iff (\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor)$.

Correction :

$\Rightarrow$: Supposons que $x \in \mathbb{Z}$. Alors $\lfloor x \rfloor = x$.

On a aussi $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad nx \in \mathbb{Z}$ donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lfloor nx \rfloor = nx = n \lfloor x \rfloor$.

$\Leftarrow$: Montrons la contraposée : si $x \notin \mathbb{Z}$ alors $\exists n \in \mathbb{N}, \quad \lfloor nx \rfloor \neq n \lfloor x \rfloor$.

Notons $x = \lfloor x \rfloor + \epsilon$ avec $\epsilon \in]0,1[$.

$\mathbb{R}$ étant archimédien, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0\epsilon > 1$.

On a donc $\lfloor n_0 x \rfloor = \lfloor n_0 \lfloor x \rfloor + n_0\epsilon \rfloor = n_0 \lfloor x \rfloor + \lfloor n_0 \epsilon \rfloor \geqslant n_0 \lfloor x \rfloor + 1$. Donc $\lfloor n_0 x \rfloor \neq n_0 \lfloor x \rfloor$. CQFD

Exercice 20 : Montrer que $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Correction : Poser $\begin{cases} x = \lfloor x \rfloor + x' \\ y = \lfloor y \rfloor + y' \end{cases}$ avec $x', y' \in [0,1[$.

$$\begin{aligned}
\lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor &\iff \lfloor x \rfloor + \lfloor \lfloor x \rfloor + x' + \lfloor y \rfloor + y' \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor 2\lfloor x \rfloor + 2x' \rfloor + \lfloor 2\lfloor y \rfloor + 2y' \rfloor \\
&\iff 2\lfloor x \rfloor + \lfloor x' + y' \rfloor + 2\lfloor y \rfloor \leqslant 2\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x' \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + \lfloor 2y' \rfloor \\
&\iff \lfloor x' + y' \rfloor \leqslant \lfloor 2x' \rfloor + \lfloor 2y' \rfloor
\end{aligned}$$

Le membre de gauche $\lfloor x' + y' \rfloor$ vaut 0 ou 1. Le membre de droite $\lfloor 2x' \rfloor + \lfloor 2y' \rfloor$ vaut 0 , 1 ou 2.

La dernière inégalité ne serait pas vérifiée uniquement si $\begin{cases} \lfloor x' + y' \rfloor = 1 \\ \lfloor 2x' \rfloor + \lfloor 2y' \rfloor = 0 \end{cases}$.

Or $\lfloor 2x' \rfloor + \lfloor 2y' \rfloor = 0$ implique $0 \leqslant x' < \frac{1}{2}$ et $0 \leqslant y' < \frac{1}{2}$.

Et alors, $0 \leqslant x' + y' < 1$ et c'est absurde puisque $\lfloor x' + y' \rfloor = 1$.

Exercice 21 : Résoudre l'équation

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor 2x+3 \rfloor = \lfloor x+2 \rfloor$$

Correction :

Analyse : Soit x une solution. Alors en posant $n = \lfloor 2x+3 \rfloor = \lfloor x+2 \rfloor$, on a $\begin{cases} n \leqslant 2x+3 < n+1 \\ n \leqslant x+2 < n+1 \end{cases}$.

D'où $2x+3 < n+1 \leqslant x+3$, i.e. $x < 0$.

Et $x+2 < n+1 \leqslant 2x+4$ donc $-2 < x$. On en déduit que $\mathcal{S} \subset]-2,0[$.

Synthèse :

- Si $x \in]-2,-1[$, on a $x+2 \in]0,1[$ donc $\lfloor x+2 \rfloor = 0$.

  $\lfloor 2x+3 \rfloor = \lfloor x+2 \rfloor \iff \lfloor 2x+3 \rfloor = 0 \iff 0 \leqslant 2x+3 < 1 \iff -\frac{3}{2} \leqslant x < -1$.
- Si $x \in]-1,0[$, on a $x+2 \in]1,2[$ donc $\lfloor x+2 \rfloor = 1$.

  $\lfloor 2x+3 \rfloor = \lfloor x+2 \rfloor \iff \lfloor 2x+3 \rfloor = 1 \iff 1 \leqslant 2x+3 < 2 \iff -1 \leqslant x < -\frac{1}{2}$.

$$\mathcal{S} = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right[.$$

Exercice 22 :

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. En déduire la partie entière de $\mathrm{A} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{10000}}$.

Exercice 23 : Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.

Correction : L'idée est de former des paquets de termes consécutifs identiques.

En effet, lorsque l'entier k parcourt l'ensemble $\llbracket j^2\,;(j+1)^2-1\rrbracket$, l'expression $\lfloor\sqrt{k}\rfloor$ prend constamment la valeur j.

Il est donc naturel de regrouper les termes correspondants pour obtenir :

$$\mathrm{S}_n=\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{k=j^2}^{(j+1)^2-1} j\right).$$

Mais la somme interne comporte $(j+1)^2-1-j^2+1=2j+1$ termes, tous égaux à j, et donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_n&=\sum_{j=1}^{n-1} j\,(2j+1)=2\sum_{j=1}^{n-1} j^2+\sum_{j=1}^{n-1} j\\&=\frac{(n-1)n(2n-1)}{3}+\frac{(n-1)n}{2}\\&=\frac{n(n-1)(4n-1)}{6}.\end{aligned}$$

Exercice 24 : Soient $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{a+1}{b}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{a+b-1}{b}\right\rfloor=a.$$

Correction : $a=bq+r\implies\sum=\underbrace{q+q+\cdots+q}_{b-r}+\underbrace{(q+1)+\cdots+(q+1)}_{r}=bq+r=a.$