Nombres réels

1 Compléter :

Théorème 1 :

$(\mathbb{R}\,;\leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné.

Proposition 2 (Compatibilité de $\leqslant$ avec $+$ et $\times$) : Soient a, b, c et d des nombres réels.

- Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$ alors $ac \leqslant bd$.
- Si a et b sont non nuls de même signe alors $a \leqslant b \iff \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.

Rappel 1 (Parties bornées) : Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E. On dit que :

- A est *minorée* dans E lorsque : $\exists m \in \mathrm{E},\ \forall x \in \mathrm{A},\ m \leqslant x$.
- A admet un *maximum* lorsque : $\exists b \in \mathrm{A},\ \forall x \in \mathrm{A},\ x \leqslant b$.

Définition 3 (Borne supérieure) :

- Soit B une partie minorée de $\mathbb{R}$.

  On appelle *borne inférieure* de B, notée $\inf(\mathrm{B})$, le plus grand des minorants de B.

Théorème 3 (Propriété de la borne supérieure) :

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

Théorème 4 (Caractérisation de la borne supérieure) : Soit A une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{M} = \sup \mathrm{A} \iff \begin{cases} \mathrm{M} \text{ est un majorant de A} \\ \forall \mathrm{M}' \text{ majorant de A},\ \mathrm{M} \leqslant \mathrm{M}' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M} \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists x_\varepsilon \in \mathrm{A} \text{ tel que } \mathrm{M} - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$$

2 Soient a et b deux réels strictement positifs.

Montrer que $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

$\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \dfrac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2}{2} \geqslant 0$ et le résultat.

Commentaires : La moyenne arithmétique est supérieure à la moyenne géométrique.

3 Compléter :

	min(A)	inf(A)	max(A)	sup(A)
$A = \left\{ \dfrac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$				

4 Résoudre le problème de Cauchy réel suivant :

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = e^{3x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Rapidement,

(a) 3 est racine réelle double du polynôme caractéristique donc $\mathscr{S}_H = \left\{ x \longmapsto (\lambda x + \mu)\, e^{3x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$.

(b) L'argument du second membre est la racine du polynôme caractéristique donc on cherche une solution particulière sous la forme $y_P : x \longmapsto \alpha x^2\, e^{3x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

On trouve $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et une solution particulière est $y_P : x \longmapsto \dfrac{1}{2} x^2\, e^{3x}$.

(c) L'équation étant linéaire, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions générale est :

$$\mathscr{S} = \left\{ x \longmapsto (\lambda x + \mu)\, e^{3x} + \frac{1}{2} x^2\, e^{3x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

(d) On trouve les paramètres à l'aide des conditions initiales :

- $y(0) = 0$ donne $\mu = 0$.
- $y'(0) = 1$ donne $\lambda = 1$.

Donc, la solution cherché est

$$y : x \longmapsto x \left(\frac{1}{2} x + 1 \right) e^{3x}.$$

Nombres réels

1 Compléter :

Définition 2 : Soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.
On dit que « *x est inférieur à y* » et on note $x \leqslant y$ si, et seulement si $y - x \in \mathbb{R}_+$.

Proposition 2 (Compatibilité de $\leqslant$ avec $+$ et $\times$) : Soient a, b, c et d des nombres réels.

- Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $a + c \leqslant b + d$.
- $a \leqslant b \iff -b \leqslant -a$.

Rappel 1 (Parties bornées) : Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.
On dit que :

- A est *majorée* dans E lorsque : $\exists\, \mathrm{M} \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M}$.
- A admet un *maximum* lorsque : $\exists\, b \in \mathrm{A},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant b$.

Définition 3 (Borne supérieure) :

- Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$.

  On appelle *borne supérieure* de A, notée $\sup(\mathrm{A})$, le plus petit des majorants de A.

Théorème 3 (Propriété de la borne supérieure) :
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

Théorème 4 (Caractérisation de la borne supérieure) : Soit A une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{M} = \sup \mathrm{A} \iff \begin{cases} \text{M est un majorant de A} \\ \forall\, b < \mathrm{M},\ b \text{ n'est pas un majorant de A} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M} \\ \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, x_\varepsilon \in \mathrm{A} \text{ tel que } \mathrm{M} - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$$

2 Soient a et b deux réels strictement positifs.

Montrer que $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \dfrac{2ab}{a+b}$.

$\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{(a-b)^2}{a+b} \geqslant 0$ et le résultat.

Commentaires : La moyenne arithmétique est supérieure à la moyenne harmonique.

3 Compléter :

	$\min(\mathrm{A})$	$\inf(\mathrm{A})$	$\max(\mathrm{A})$	$\sup(\mathrm{A})$
$\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, x^2 \leqslant 2\}$				

4 Résoudre le problème de Cauchy réel suivant :

$$\begin{cases} y'' - 10y' + 25y = \mathrm{e}^{5x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Rapidement,

(a) 5 est racine réelle double du polynôme caractéristique donc $\mathscr{S}_{\mathrm{H}} = \left\{x \longmapsto (\lambda x+\mu)\,\mathrm{e}^{5x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$.

(b) L'argument du second membre est la racine du polynôme caractéristique donc on cherche une solution particulière sous la forme $y_{\mathrm{P}} : x \longmapsto \alpha x^2\,\mathrm{e}^{5x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

On trouve $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et une solution particulière est $y_{\mathrm{P}} : x \longmapsto \dfrac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{5x}$.

(c) L'équation étant linéaire, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions générale est :

$$\mathscr{S} = \left\{x \longmapsto (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{5x} + \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{5x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

(d) On trouve les paramètres à l'aide des conditions initiales :

- $y(0) = 0$ donne $\mu = 0$.
- $y'(0) = 1$ donne $\lambda = 1$.

Donc, la solution cherché est

$$y : x \longmapsto x\left(\frac{1}{2}x + 1\right)\mathrm{e}^{5x}.$$