Autour des nombres réels

Exercice 1 : Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, et $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une application croissante.

1. Montrer que $f(\mathrm{A})$ admet une borne supérieure et que de plus $\sup(f(\mathrm{A})) \leqslant f(\sup(\mathrm{A}))$.
2. Donner un exemple où l'inégalité est stricte.

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor - \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ pour tout réel x.

1. Montrer que $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
2. Démontrer que f est périodique.
3. Démontrer que f est nulle sur $[0\,;1[$. Aide : On pourra considérer deux cas suivant que $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$ ou $x \geqslant \frac{1}{2}$.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$.
5. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.