Autour des nombres réels

Exercice 1 :

1. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, et $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une application croissante.

A étant non vide, et f étant définie sur $\mathbb{R}$, $f(\mathrm{A})$ est non vide.

Commentaires : *C'est la définition de f dans le sens que ce n'est pas une fonction d'image vide qui permet d'affirmer que $f(\mathrm{A})$ est non vide. Pas grand chose mais il faut le dire et le justifier même brièvement.*

A étant majorée et non vide, elle admet une borne supérieure α, et on a $\forall\, a \in \mathrm{A},\ a \leqslant \alpha$.

Comme f est croissante, $\forall\, a \in \mathrm{A},\ f(a) \leqslant f(\alpha)$, c'est à dire $\forall\, x \in f(\mathrm{A}),\ x \leqslant f(\alpha)$.

L'ensemble $f(\mathrm{A})$ est donc majoré par $f(\alpha)$.

Et comme il est non vide, il admet une borne supérieure $\sup f(\mathrm{A})$.

$f(\alpha)$ étant un majorant de $f(\mathrm{A})$, il est plus grand que le plus petit d'entre eux $\sup f(\mathrm{A})$ et on a $\sup f(\mathrm{A}) \leqslant f(\alpha)$, soit $\boxed{\sup f(\mathrm{A}) \leqslant f(\sup(\mathrm{A}))}$.

2. L'inégalité peut être stricte : en prenant pour f la fonction partie entière et pour A l'ensemble $[0\,;1[$.

On a $\sup(\mathrm{A}) = 1$ donc $f(\sup(\mathrm{A})) = 1$. Or $f(\mathrm{A}) = \{0\}$ donc $\sup f(\mathrm{A}) = 0$.

Commentaires : *Il faut écrire au moins une fois la petite tirade du genre « étant un majorant de ..., il est plus grand que le plus petit d'entre eux* $\sup$ *.... »*

Exercice 2 :

1. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, notons $\lfloor x \rfloor = p$. On a donc :

$$p \leqslant x \leqslant p+1 \implies (p+n) \leqslant x+n \leqslant (p+n)+1.$$

Donc $\lfloor x+n \rfloor = p+n = \lfloor x \rfloor + n$.

Commentaires : *Soit on procède par double inégalité, soit on utilise l'unicité de la partie entière mais il faut correctement le justifier et pas par un pauvre « Par définition de la partie entière, on a » !*

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \lfloor 2x+2 \rfloor - \lfloor x+1 \rfloor - \left\lfloor x+1+\frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= \lfloor 2x \rfloor + 2 - \lfloor x \rfloor - 1 - \left\lfloor x+\frac{1}{2} \right\rfloor - 1 \\ &= \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor - \left\lfloor x+\frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= f(x). \end{aligned}$$

La fonction f est donc 1-périodique.

Commentaires : *Pour tous ceux qui ont montré que la fonction f était n-périodique avec $n \in \mathbb{Z}$, j'attire votre attention sur le fait que la période n'est pas censée varier donc choisissez ! Le plus petit d'entre eux me semble bien ce qui nous amène au deuxième problème, la période est non seulement positive mais non nulle ce qui nous fera $n \in \mathbb{N}^*$ soit 1.*

3. (a) Soit $0 \leqslant x < \dfrac{1}{2}$.

On a $0 \leqslant 2x < 1$ et $\dfrac{1}{2} \leqslant x + \dfrac{1}{2} < 1$, ce qui nous donne :

$$f(x) = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor - \left\lfloor x+\frac{1}{2} \right\rfloor = 0 - 0 - 0 = 0.$$

(b) Soit $\dfrac{1}{2} \leqslant x < 1$.

On a $1 \leqslant 2x < 2$ et $1 \leqslant x + \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{2}$, ce qui nous donne :

$$f(x) = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor - \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 1 - 0 - 1 = 0.$$

On a ainsi bien montré que f est nulle sur $[0\,;1[$.

4 On en déduit, par 1-périodicité de la fonction f, que f est la fonction nulle, ce qui implique alors immédiatement que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

5 On en déduit alors, en faisant apparaître une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor &= \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\left\lfloor 2\,\frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\left\lfloor \frac{x}{2^{k}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor \right) \\
&= \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.