XIII

Matrices

Contenu

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et les lettres n, p, q, ...désignent des entiers naturels non nuls.

I L'ENSEMBLE DES MATRICES $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

I.1 Généralités et vocabulaire

Définition 1 : Soient n et p deux entiers non nuls.

On appelle *matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ toute famille $\mathrm{A} = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, indexée par $[\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{où } a_{ij} \in \mathbb{K},\ \forall\ (i\,;j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!].$$

On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ leur ensemble où n et p sont, réciproquement, le nombre de *lignes* et de *colonnes* et $\mathbb{K}$ est le corps auquel appartiennent les coefficients ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour nous).

- Les nombres a_{ij} sont les *coefficients* de la matrice A.
- a_{ij} est situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

On notera souvent, en abrégé, $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}}$.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \qquad (n < p)$$

$i^{\text{ème}}$ ligne $\qquad$ $j^{\text{ème}}$ colonne $\qquad$ Diagonale de la matrice

Exemples 1 :

- $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ est une matrice 2×3 réelle.

  Par exemple, $a_{21} = 4$ et $a_{13} = 0$.
- $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 4 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2}(\mathbb{C})$ est une matrice 2×2 complexe.

Une matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est donc entièrement déterminée par la donnée de $n\times p$ scalaires qui la déterminent ce qui implique notamment que :

Théorème 1 :

$$A = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} \iff \forall\ (i\,;j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!],\ a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Une matrice est nulle si, et seulement si ses coefficients sont tous nuls.

Remarque : Pour différencier les vecteurs $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ que sont les matrices colonnes (ou lignes) des coefficients $x_i \in \mathbb{K}$ qui les déterminent, on appelle *scalaire*, tout élément de $\mathbb{K}$.

Exercice 1 : Représenter les matrices suivantes telles que :

1. A est la matrice de $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ avec $a_{ij} = i + j$
2. B est la matrice de $\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ telle que $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i - j = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. C est la matrice de $\mathcal{M}_{4}(\mathbb{R})$ telle que $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. $D = \left(a^{\min(i,j)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
2. $E = \left(|i - j|\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
3. $F = \left(\delta_{i+j,n+1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
4. $G = \Big(\text{sh}\ (a_i + a_j)\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

I.2 Zoologie

— Si $n = 1$, la matrice M est appelée matrice ou *vecteur ligne*.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3.$$

— Si $p = 1$, la matrice M est appelée matrice ou *vecteur colonne*.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3.$$

— Si $m = n$, la matrice M est appelée *matrice carrée* d'ordre n. Leur ensemble est simplement noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

— On appelle *matrice unité* ou *identité* d'ordre n, notée I_n, la matrice carrée d'ordre n qui ne possède que des « 1 » sur sa diagonale et des « 0 » ailleurs :

$$I_n = \left(\delta_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}, \quad \text{où } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Vocabulaire : La notation $\delta_{i,j}$ porte le nom de *symbole de Kronecker*.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

— On appelle *matrice diagonale* d'ordre n la matrice carrée d'ordre n qui ne possède des éléments non nuls que sur sa diagonale : $a_{ij} = 0, \forall\, i \neq j$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{D}_3(\mathbb{K}).$$

On note $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ leur ensemble.

En particulier, les matrices $\lambda \mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, sont appelées *matrices scalaires*

— On appelle *matrice triangulaire* (*resp.* strictement triangulaire) d'ordre n une matrice carrée d'ordre n qui possède un triangle composé uniquement de « 0 » sous la diagonale (*resp.* strictement sous) :

$a_{ij} = 0, \forall\, i \leqslant j$ (*resp.* $i < j$) est une matrice triangulaire inférieure (*resp.* strictement inférieure).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure

On note $\mathscr{T}_{n,\mathrm{I}}(\mathbb{K})$ leur ensemble

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire supérieure

On note $\mathscr{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$ leur ensemble

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice strictement triangulaire (inférieure)

II Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

II.1 Addition

Définition 2 (Somme) : Soient $\mathrm{A} = (a_{ij}), \mathrm{B} = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices de **même** dimension.

La matrice $\mathrm{C} = \mathrm{A} \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{+} \mathrm{B}$ est la matrice dont les coefficients sont les sommes des coefficients de A et B :

$$\mathrm{C} = \mathrm{A} \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{+} \mathrm{B} \iff (a_{ij}) \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{+} (b_{ij}) = (a_{ij} \underset{\mathbb{K}}{+} b_{ij}).$$

ATTENTION Les matrices doivent avoir les mêmes dimensions sinon leur addition n'est pas définie.

— La matrice nulle $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ est l'élément neutre de l'addition définie ci-dessus :

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \mathrm{A} + (0) = (0) + \mathrm{A} = \mathrm{A}.$$

— Tout élément $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ possède un symétrique pour la loi $+$ appelé *matrice opposée* de A et notée $-\mathrm{A} = (-a_{ij})$. La matrice formée des opposés des coefficients de A :

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \mathrm{A} + (-\mathrm{A}) = (-\mathrm{A}) + \mathrm{A} = (0).$$

De même que l'addition dans $\mathbb{K}$, l'addition des matrices vérifient les mêmes lois : associativité, commutativité, élément neutre et opposé.

Proposition 2 :

$$(a_{ij})_{\substack{i\in[\![1;n]\!]\\ j\in[\![1;p]\!]}} \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{=} (b_{ij})_{\substack{i\in[\![1;n]\!]\\ j\in[\![1;p]\!]}} \iff \forall\ (i\,;j)\in[\![1\,;n]\!]\times[\![1\,;p]\!],\ a_{ij} \underset{\mathbb{K}}{=} b_{ij}.$$

Deux matrices sont égales si, et seulement si elles ont les mêmes dimensions et leurs coefficients sont égaux deux à deux.

Exemples 2 :

- $\begin{pmatrix}1&2\\4&3\\-5&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\4&3\\-5&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\\-5&-1\end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix}1&2&0\\4&3&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5&2&3\\1&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&-3\\3&1&-5\end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix}1&2&-4\\4&3&-1\\5&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&2&0\\5&0&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&-4\\0&1&-1\\0&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&-4\\0&1&-1\\0&0&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\4&2&0\\5&0&-3\end{pmatrix}.$

II.2 Loi externe

Définition 3 (Multiplication par un scalaire) : Soient $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.

- On définit le produit (externe) de la matrice A par le scalaire λ, noté $\lambda.A$ ou λA, comme la matrice dont chaque coefficient est multiplié par λ :

$$\lambda \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{.} (a_{ij}) = (\lambda \underset{\mathbb{K}}{\times} a_{ij}).$$

- Plus généralement, pour tout $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ la *combinaison linéaire* de A et $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice, notée $\lambda.A+\mu.B$, de coefficients :

$$\lambda \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{.} (a_{ij}) \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{+} \mu \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{.} (b_{ij}) = \left(\lambda \underset{\mathbb{K}}{\times} a_{ij} \underset{\mathbb{K}}{+} \mu \underset{\mathbb{K}}{\times} b_{ij}\right).$$

Exemple 3 : $2.\begin{pmatrix}1&2&0\\4&3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&0\\8&6&-2\end{pmatrix}$

Exemple 4 : $3\begin{pmatrix}2&1\\0&4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&1\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1\\4&6\end{pmatrix}.$

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le système : $\begin{cases} 3X + 4Y = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \\ -2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \end{cases}$

Définition 4 (Matrices élémentaires) : Soit $(i\,;j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$.

On appelle *matrice élémentaire* (de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$), notée $E_{i,j,n,p}$ ou $E_{i,j}$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient de position (i, j), égal à 1 :

$$E_{i,j,n,p} = (\delta_{k,i}\delta_{l,j})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant l\leqslant p}}.$$

$$E_{i,j,n,p} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow i \\ \uparrow & \\ j & \end{array}$$

Figure XIII.1 – Matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 5 : Les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ sont :

- $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- $E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
- et $E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il est assez clair que toute matrice $M \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ est combinaison linéaires de matrices élémentaires :

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{pmatrix} = m_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2 \\ 1\leqslant j\leqslant 3}} m_{ij}\, E_{i,j}.$$

Proposition 3 :

$$\forall\, A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad A = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij}\, E_{i,j}.$$

II.3 Produit matriciel

Définition 5 (Produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne) : Le produit d'un vecteur ligne L par un vecteur colonne C de même dimension n est égal au *produit scalaire* des deux vecteurs considérés comme deux vecteurs colonnes.

$$\mathrm{LC} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \vec{\mathrm{L}} \cdot \vec{\mathrm{C}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Exercice 3 : Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$.

Définition 6 : Le *produit* de la matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par la matrice $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ est égal à la matrice $\mathrm{C} = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ dont chaque coefficient c_{ij} est égal au produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ligne de la matrice A par la $j^{\text{ème}}$colonne de la matrice B :

$$\forall\ (i\,;j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;m]\!],\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}. = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pj}$$

En particulier, l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit.

Exemple 6 : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 7 & -3 & 10 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarques :

— La matrice de gauche détermine le nombre de lignes tandis que celle de droite, celui des colonnes.

ATTENTION le nombre de colonnes de la matrice de gauche doit être égal au nombre de lignes de la matrice de droite sinon le produit n'est pas défini.

— Le produit à droite d'une matrice par un vecteur colonne est un vecteur colonne et le produit à gauche d'une matrice par un vecteur ligne est un vecteur ligne.

Exercice 4 : Effectuer les sommes et produits **possibles** de matrices entre :

1. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

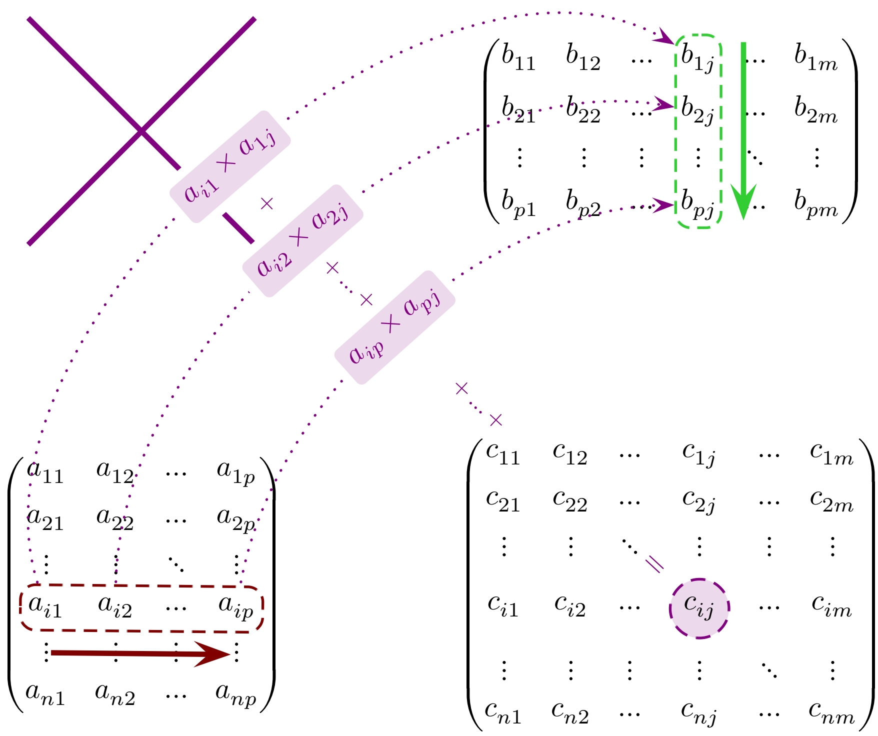

Figure XIII.2 – Produit matriciel

ATTENTION

Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.

En effet, il se peut que AB soit défini mais pas BA, ou que AB et BA soient tous deux définis mais pas de la même taille.

Mais, même dans le cas où AB et BA sont définis et de la même taille, on a, en général, $AB \neq BA$. Les exemples suivants sont à retenir afin d'éviter d'écrire des bourdes.

Exemple 7 ($AB \neq BA$) :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{mais} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 8 ($AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$) : Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

Les matrices A et B sont alors appelées des *diviseurs de zéro*.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 9 ($AB = AC$ n'implique pas $B = C$) : On peut avoir $AB = AC$ et $B \neq C$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 : Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Résoudre $AX = B$ dans $M_2(\mathbb{R})$.

Exemples 10 (Lignes d'une matrice) : Soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $i \in [\![1\,;n]\!]$ et $j \in [\![1\,;p]\!]$.

$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \times A = \begin{pmatrix} a_{j1} & \cdots & a_{jp} \end{pmatrix}$ est la $j^{\text{ème}}$ ligne de A.

à la position j

En particulier, $E_{i,j,n,p} \times A = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ en notant $L_j = \begin{pmatrix} a_{j1} & \cdots & a_{jp} \end{pmatrix}$.

à la position i

Exemples 11 (Colonnes d'une matrice) :

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $i \in [\![1\,;n]\!]$ et $j \in [\![1\,;p]\!]$

$$A \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \text{ est la } i^{\text{ème}} \text{ colonne de A.}$$

à la position i

En particulier, $A \times E_{i,j,n,p} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & C_i & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ en notant $C_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$.

à la position j

Exercice 6 : Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$.

Proposition 4 (Produit d'une matrice par un vecteur colonne) : Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont notées A_1, ..., A_p.

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$ on a :

$$AX = \sum_{k=1}^{p} x_k A_k \in \mathbb{K}^n.$$

Autrement dit, le produit d'une matrice A par un vecteur colonne est une combinaison linéaire des colonnes de A.

$$\mathrm{AX} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{np}x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{1k}x_k \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{2k}x_k \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{nk}x_k \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{p} x_k \mathrm{A}_k.$$

Figure XIII.3 – Produit (à droite) d'une matrice par un vecteur colonne.

Proposition 5 (Propriétés algébriques de la multiplication) : Lorsque celui-ci est possible, le produit de deux matrices est :

Associatif : $\mathrm{A}(\mathrm{BC}) = (\mathrm{AB})\mathrm{C} = \mathrm{ABC}$.
Bilinéaire : $\mathrm{A}(\lambda\mathrm{B} + \mathrm{C}) = \lambda\mathrm{AB} + \mathrm{AC}$ et $(\lambda\mathrm{B} + \mathrm{C})\mathrm{A} = \lambda\mathrm{BA} + \mathrm{CA}$.
Non commutatif : $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$ en général.

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Élément neutre : $\mathrm{AI}_p = \mathrm{I}_n\mathrm{A} = \mathrm{A}$.
Élément absorbant : $(0)_{m,n}\mathrm{A} = (0)_{m,p}$ et $\mathrm{A}(0)_{p,q} = (0)_{n,q}, \quad \forall\, m, q \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7 : Trouver les matrices qui commutent avec $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

II.4 Transposition d'une matrice

Définition 7 : La *transposée* d'une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée $\mathrm{A}^\top$ ou anciennement ${}^t\mathrm{A}$, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice A.

$$\mathrm{A}^\top = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}).$$

Exemple 12 : Si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{A}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarque : La transposée d'un vecteur colonne est un vecteur ligne et réciproquement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 6 (Propriété de la transposition) :

Linéarité : Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda A + B)^\top = \lambda A^\top + B^\top$.

Involutivité : Pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(A^\top)^\top = A$.

Contravariance : Pour tous $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Définition 8 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est *symétrique* si, et seulement si $A^\top = A$ autrement dit :

$$\forall\, i, \in [\![1\,;n]\!]\,,\ a_{ij} = a_{ji}.$$

  On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- On dit que A est *anti-symétrique* si, et seulement si $A^\top = -A$ autrement dit :

$$\forall\, i, \in [\![1\,;n]\!]\,,\ a_{ij} = -a_{ji}.$$

  On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarques :

— Les matrices symétriques sont donc les invariants de la transposition.

— En particulier, les coefficients de la diagonale d'une matrice anti-symétriques sont nécessairement nuls.

— De plus, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \left\{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\right\}$.

Exemples 13 : $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 8 : Soit A une matrice carrée à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que $A^\top A$ est symétrique.
2. Démontrer que A^2 est symétrique si A est symétrique ou antisymétrique.

III L'ALGÈBRE DES MATRICES CARRÉES $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

III.1 Matrices diagonales et triangulaires

Proposition 7 (Produits et combinaisons linéaires de matrices diagonales) :

$\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire et par produit matriciel.

- $\forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K}),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \mathrm{A} + \mathrm{B} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$.

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 + \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}.$$

- $\forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K}), \quad \mathrm{AB} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}.$$

Remarque : Pour économiser de la place on trouve souvent l'écriture $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$ abrégée en $\mathrm{D} = diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Tout le monde comprendra...

Exercice 9 : Déterminer $\left\{\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \,/\, \forall\, \mathrm{D} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K}), \mathrm{AD} = \mathrm{DA}\right\}$.

Proposition 8 (Produits et combinaisons linéaires de matrices triangulaires) :

$\mathrm{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire et par produit matriciel.

- $\forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K}),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \mathrm{A} + \mathrm{B} \in \mathscr{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$.
- $\forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K}), \quad \mathrm{AB} \in \mathscr{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \times & \times & \times \\ 0 & a_{22} & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \times & \times & \times \\ 0 & b_{22} & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \times & \times & \times \\ 0 & a_{22}b_{22} & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

En particulier, les termes diagonaux du produit sont les produits des termes diagonaux *i.e.*

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!],\ (\mathrm{AB})_{ii} = a_{ii}b_{ii}.$$

Les résultats sont similaires pour les matrices triangulaires inférieures. [1]

[1]. Le cas inférieur s'en déduit par transposition.

III.2 Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton

Définition 9 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$ la puissance $k^{\text{ème}}$ de A par récurrence :

$$A^0 = I_n$$
$$\forall\, k \in \mathbb{N},\quad A^{k+1} = AA^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k+1 \text{ fois}}.$$

Remarques :
- On ne peut définir de puissance $k^{\text{ème}}$ que pour des matrices carrées.
- Pour tout $k, l \in \mathbb{N}$, on a $A^k A^l = A^l A^k = A^{k+l}$.
- Cependant, en général, pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $(AB)^2 \neq A^2B^2$. On peut seulement affirmer que $(AB)^2 = ABAB$.

Exemple 14 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$
$$A^3 = A \times (A \times A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 21 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 : Soient $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer N^n et A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corollaire 8.1 : Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\Big(diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\Big)^p = diag(\alpha_1^p, \dots, \alpha_n^p).$$

et

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\quad \begin{pmatrix} a_{11} & \times & \times & \times \\ 0 & a_{22} & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a_{11}^p & \times & \times & \times \\ 0 & a_{22}^p & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^p \end{pmatrix}.$$

Exemple 15 : $\begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} \pi^7 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$

Théorème 9 : Soient A et B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, si $AB = BA$ alors :

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k \times B^{p-k} \qquad \text{(Binôme de Newton).}$$

$$A^p - B^p = (A-B)\left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}\right) = \left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}\right)(A-B).$$

(Factorisation de $A^p - B^p$).

ATTENTION

Si A et B ne commutent pas *i.e.* $AB \neq BA$ alors

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B)\\ &= A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2! \ \ldots\end{aligned}$$

Et,

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2! \ldots$$

Exemple 16 : Comme toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec I_n, on a :

$$(A+I_n)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k = A^p + pA^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}A^{p-2} + \cdots + pA + \mathbf{I}_n.$$

$$I_n - A^p = (I_n - A)\sum_{k=0}^{p-1} A^k = (I_n - A)\left(A^{p-1} + A^{p-2} + \ldots + A + I_n\right).$$

Ce théorème est particulièrement intéressant dans le cas des matrices dites *nilpotentes* :

Définition 10 (Matrice nilpotente) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A est *nilpotente* si $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Le plus petit entier p pour laquelle cette identité est vraie est appelé l'*indice de nilpotence* de A :

$$p = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \,/\, A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\right\}.$$

Par définition de l'indice de nilpotence, pour tout matrice N nilpotente d'indice p,

$$\forall\, k < p,\ N^k \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \quad \text{et} \quad \forall\, k \geqslant p,\ N^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.$$

Exemple 17 : La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice 3.

Exercice 11 : Déterminer toutes les matrices carrées d'ordre n qui sont à la fois nilpotentes et idempotentes (*i.e.* $A^2 = A$).

Méthode 1 (Calcul de la puissance d'une matrice) :
Dans les cas où A peut de décomposer comme la somme de deux matrices qui **commutent**, on pourra utiliser la formule du binôme de Newton.

En particulier, si $A = \lambda I_n + N$ où N est une matrice nilpotente.

Exercice 12 : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^n, $n \in \mathbb{N}$.
2. En écrivant $A = I_3 + J$, calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$.

IV MATRICES INVERSIBLES ET $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K})$

Définition 11 (Inverse d'une matrice) : Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *inversible* (ou régulière) si, et seulement si il existe une matrice carrée B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

Si A n'est pas inversible, on dit que la matrice A est *singulière*.

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelé le *groupe linéaire* d'ordre n sur $\mathbb{K}$. On le note $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K})$.

Exemples 18 :

- Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre.
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{G}\ell_2(\mathbb{K})$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 10 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A est inversible alors sa matrice inverse est unique. On la note A^{-1}.

Exemples 19 :

- La matrice I_n est inversible avec $I_n^{-1} = I_n$.
- La matrice nulle $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ n'est pas inversible.
- $A \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K}) \iff \forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \lambda A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ et, dans ce cas, $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.
- Une matrice nilpotente n'est pas inversible.

Exemple 20 : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{K})$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ATTENTION

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, à la différence de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il existe des matrices non nulles comme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui ne sont pas inversibles.

Exercice 13 : Montrer que toute matrice carrée qui possède une ligne ou une colonne nulle N'est PAS inversible.

Exemple 21 : $A = \begin{pmatrix} i & 4 & 0 \\ 2+i & 5i & 0 \\ 3-i & 6 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{GL}_3(\mathbb{C})$.

Exercice 14 : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 5A$.
2. En déduire que $A \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{K})$ et calculer A^{-1}.

Méthode 2 (Inverser une matrice avec un polynôme annulateur) :
Soit A une matrice et P un polynôme annulateur de A dont le terme constant est non nul. Alors,

- A est inversible,
- On trouve l'expression de A^{-1} à partir de l'expression $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ en isolant le multiple de I_n et en factorisant par A.

Théorème 11 (Opérations sur les matrices inversibles) : Soient $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

Involutivité : A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
Produit : AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Puissance : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, A^k est inversible et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
Transposition : $A^\top$ est inversible et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

On retiendra donc que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est stable par inverse et produit : $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est, comme son nom l'indique, un groupe.

ATTENTION

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.
Rappelez vous que la multiplication dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas commutative : $(A^{-1}B^{-1})(AB)$ ne donne rien.

ATTENTION

A et B inversible $\not\Longrightarrow$ $A + B$ inversible.

IV.1 Inversibilité des matrices d'ordre 2

Définition 12 (Déterminant d'une matrice) : Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre 2, on appelle *déterminant* de la matrice A, noté $\det(A)$, le scalaire tel que :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ alors } \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemple 22 : Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ alors $\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 1 - 2 \times 3 = -2$.

Théorème 12 (Inverse d'une matrice d'ordre 2) : Une matrice carrée d'ordre deux est inversible si, et seulement si son déterminant est différent de 0.

$$\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}),\ A^{-1} \text{ existe} \iff \det(A) \neq 0.$$

On a alors :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ alors } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{XIII.1}$$

Exemple 23 : Déterminer la matrice inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. On calcule : $\det(A) = 4 \times 1 - 2 \times 3 = -2 \neq 0$ donc la matrice A est inversible.
2. La condition d'inversibilité remplie, on applique la formule (XIII.1) :

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15 :

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. On pose $D = P^{-1}MP$.

   Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k = PD^kP^{-1}$.
2. Soient $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Déterminer P^{-1} et calculer $D = P^{-1}MP$.
3. Calculer M^k, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Méthode 3 (Calcul de la puissance d'une matrice) :

- Si D est diagonale avec $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ alors

$$D^k = \mathrm{diag}(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k).$$

- Si A est semblable à une matrice diagonale i.e. $\exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PDP^{-1}$, alors :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1}.$$

IV.2 Inversibilité des matrices diagonales et triangulaires

Théorème 13 (Matrice diagonale) : Soient α_1, ..., α_n, $\beta_1 \in \mathbb{K}$, alors : $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si $\forall i \in [\![1\,;n]\!]$, $\alpha_i \neq 0$ et alors :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Théorème 14 (Matrice triangulaire) : Une matrice triangulaire A est inversible si, et seulement si ses coefficients diagonaux sont **tous** non nuls.

Dans ce cas, A^{-1} est aussi triangulaire de même type et ses coefficients diagonaux sont exactement les inverses des coefficients diagonaux de A.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \times & \times & \times \\ 0 & a_{22} & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & \times & \times & \times \\ 0 & a_{22}^{-1} & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}.$$

IV.3 Trace d'une matrice

Définition 13 (Trace d'une matrice carrée) : Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle *trace* de A et on note $\mathrm{tr}\,(A)$ la somme des éléments diagonaux de A :

$$\mathrm{tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Exemples 24 :

- $\operatorname{tr}(I_n) = n$.
- Si $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 2 & -1 & 14 \\ 5 & 9 & 13 \end{pmatrix}$ alors $\operatorname{tr}(A) = -4 - 1 + 13 = 8$.
- Si $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{tr}(A) = 0$.

Proposition 15 (Propriété de la trace) :

Linéarité : Pour tous $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\operatorname{tr}(\lambda A + B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.

Produit : Pour tous $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Remarques :

— Lorsque qu'une matrice A est *semblable* à une matrice B *i.e.* il existe une matrice P inversible, dite de *passage*, telle que $A = P^{-1}BP$, on a alors :

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\left(P^{-1}BP\right) = \operatorname{tr}\left((P^{-1}P)B\right) = \operatorname{tr}(B).$$

On dit, pour cela, que la trace est un *invariant de similitude*.

— C'est ce résultat qui motive la définition (11) seulement sur les matrices carrées.

En effet, soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice rectangulaire. Si rien n'empêche, en théorie, de définir un inverse $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ de A à partir des relations $AB = I_n$ et $BA = I_p$, on aurait cependant un petit soucis car :

$$n = \operatorname{tr}(I_n) = \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}\left(I_p\right) = p.$$

Exemple 25 : L'équation matricielle $AB - BA = I_n$ d'inconnue $(A\,;B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ n'a pas de solution car pour toutes matrices A, B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0 \neq n = \operatorname{tr}(I_n).$$