Les nombres réels

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 12

Sommaire I

Longtemps, les mathématiques se sont développées au service des autres sciences. La séparation des différentes sciences est d'ailleurs tardive, et nombreux ont été les mathématiciens à avoir également été des physiciens de renommée, comme Newton par exemple. Les mathématiques ont d'abord été vues comme un outil :

- au service de la mécanique et de l'ingéniérie (Archimède)
- au service de l'astronomie (géométrie grecque, Ptolémée, écoles indienne et arabe)
- au service de toute étude nécessitant d'être chiffrée pour obtenir des ordres de grandeurs.

Du dernier point découle l'importance du développement du calcul numérique (calcul approché, en opposition au calcul algébrique). C'est ce point de vue qui est à la base des procédés d'approximation (méthode de Newton de recherche d'un zéro, méthodes approchées de calcul d'intégrales), aboutissant notamment à la notion de convergence (qui donne la validité de l'approximation à l'infini).

Ainsi, l'utilisation de l'outil est souvent à la base de sa définition, et a souvent précédé sa théorisation : les mathématiques ont évolué de façon empirique.

De fait, vous savez presque tout sur les réels - mais pas tout. Alors que vous manipulez des inégalités depuis longtemps, il y a tout de même une propriété de la relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ que vous ne connaissez pas, dite propriété de la borne supérieure et qui revêt pour les mathématiques du programme de PTSI une importance fondamentale.

Ce chapitre vise principalement à motiver et vous présenter cette propriété, mais nous y introduirons aussi un minimum de vocabulaire topologique. En un mot, la topologie est la théorie très générale de la « proximités » des objets mathématiques les uns par rapport aux autres, mais nous nous contenterons d'y mettre un pied dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

I. Nombres entiers, décimaux, rationnels

- Tout rationnel peut s'écrire de différentes manières sous forme de fractions, par exemple $\dfrac{p}{q} = \dfrac{2p}{2q} = \ldots$, mais tout nombre rationnel s'écrit de manière unique sous forme de fraction irréductible *i.e.* sous la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux.

- Tout rationnel peut s'écrire de différentes manières sous forme de fractions, par exemple $\frac{p}{q} = \frac{2p}{2q} = \ldots$, mais tout nombre rationnel s'écrit de manière unique sous forme de fraction irréductible *i.e.* sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux.

  L'égalité des produits en croix, caractérise ces classes d'équivalence :

$$\forall \left(\frac{a}{b}\,;\frac{c}{d}\right) \in \mathbb{Q}^2, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc \quad \text{avec } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0.$$

- Tout rationnel peut s'écrire de différentes manières sous forme de fractions, par exemple $\dfrac{p}{q} = \dfrac{2p}{2q} = \ldots$, mais tout nombre rationnel s'écrit de manière unique sous forme de fraction irréductible *i.e.* sous la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux.

  L'égalité des produits en croix, caractérise ces classes d'équivalence :

$$\forall \left(\frac{a}{b}\,;\frac{c}{d}\right) \in \mathbb{Q}^2, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc \quad \text{avec } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0.$$

- L'ensemble $\mathbb{Q}$ est muni de deux lois de composition interne :

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'} \qquad \text{et} \qquad \frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}.$$

- Tout rationnel peut s'écrire de différentes manières sous forme de fractions, par exemple $\dfrac{p}{q} = \dfrac{2p}{2q} = \ldots$, mais tout nombre rationnel s'écrit de manière unique sous forme de fraction irréductible *i.e.* sous la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux.

  L'égalité des produits en croix, caractérise ces classes d'équivalence :

$$\forall \left(\frac{a}{b}\,;\frac{c}{d}\right) \in \mathbb{Q}^2, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc \quad \text{avec } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0.$$

- L'ensemble $\mathbb{Q}$ est muni de deux lois de composition interne :

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'} \qquad \text{et} \qquad \frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}.$$

Muni de ces deux lois $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps commutatif.
On vérifie également que $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \times)$ et $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ sont des groupes commutatifs.

Exercice 1 :

Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible :

1. $\dfrac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\dfrac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$, distincts deux à deux.

Exercice 1 :

Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible :

1. $\dfrac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\dfrac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$, distincts deux à deux.
2. $\dfrac{\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\dfrac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$.

I. Nombres entiers, décimaux, rationnels

2. L'ensemble des rationnels est insuffisant :

En termes d'approximations numériques, $\mathbb{Q}$ peut paraître suffisant en sciences appliquées. Le problème se pose lorsqu'on a besoin de connaître la valeur exacte de certaines grandeurs.

En termes d'approximations numériques, $\mathbb{Q}$ peut paraître suffisant en sciences appliquées. Le problème se pose lorsqu'on a besoin de connaître la valeur exacte de certaines grandeurs.

Par exemple, peut-on mesurer dans $\mathbb{Q}$ la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ? D'après le théorème de Pythagore, cela revient à se demander s'il existe un rationnel dont le carré est égal à 2, or nous avons déjà établi que la réponse est négative : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

En termes d'approximations numériques, $\mathbb{Q}$ peut paraître suffisant en sciences appliquées. Le problème se pose lorsqu'on a besoin de connaître la valeur exacte de certaines grandeurs.

Par exemple, peut-on mesurer dans $\mathbb{Q}$ la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ? D'après le théorème de Pythagore, cela revient à se demander s'il existe un rationnel dont le carré est égal à 2, or nous avons déjà établi que la réponse est négative : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Cette lacune de $\mathbb{Q}$ avait été remarquée par les Pythagoriciens, ce qui a conduit les mathématiciens à introduire de nouveaux nombres, les irrationnels, en concevant un ensemble plus vaste que $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$.

L'ensemble des réels est un ensemble plus difficile théoriquement à construire (théorie hors programme de PTSI). Intuitivement certains nombres que vous connaissez comme $\sqrt{2}$ ou π sont des nombres qui ne font pas partie des rationnels. On pourrait alors définir $\mathbb{R}$ comme l'union des rationnels et des irrationnels.

En poussant plus loin, on se rendrait compte que tous ces irrationnels peuvent cependant tous être vus comme des limites de suites de rationnels (cf. corollaire (13.2)). L'ensemble $\mathbb{R}$ est alors, pour le dire vite et de façon peu rigoureuse, l'ensemble des limites des suites de $\mathbb{Q}$ qui convergent.

Enfin, pour un point de vue plus géométrique mais tout aussi peu satisfaisant,

Définition 1 :

L'ensemble des abscisses des points d'une droite orienté est l'ensemble des nombres réels.

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Enfin, pour un point de vue plus géométrique mais tout aussi peu satisfaisant,

Définition 1 :

L'ensemble des abscisses des points d'une droite orienté est l'ensemble des nombres réels.

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Les abscisses des points de la demie-droite $[OI)$ appartiennent à $\mathbb{R}_+$.

Un peu d'histoire : *En mathématiques, un nombre réel est un nombre qui peut être représenté par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales. Cette définition s'applique donc aux nombres rationnels, dont les décimales se répètent de façon périodique à partir d'un certain rang, mais aussi à d'autres nombres dits irrationnels, tels que la racine carrée de* 2, π *et* e.

Un peu d'histoire : *En mathématiques, un nombre réel est un nombre qui peut être représenté par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales. Cette définition s'applique donc aux nombres rationnels, dont les décimales se répètent de façon périodique à partir d'un certain rang, mais aussi à d'autres nombres dits irrationnels, tels que la racine carrée de* 2*,* π *et* e*.*

L'ensemble des nombres réels, est alors un corps totalement ordonné, c'est-à-dire qu'il est muni des quatre opérations arithmétiques satisfaisant les mêmes règles que celles sur les fractions et ces opérations sont compatibles avec la relation d'ordre. Mais il satisfait en plus la propriété de la borne supérieure qui fonde l'analyse réelle.

Un peu d'histoire : *En mathématiques, un nombre réel est un nombre qui peut être représenté par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales. Cette définition s'applique donc aux nombres rationnels, dont les décimales se répètent de façon périodique à partir d'un certain rang, mais aussi à d'autres nombres dits irrationnels, tels que la racine carrée de* 2, π *et* e.

L'ensemble des nombres réels, est alors un corps totalement ordonné, c'est-à-dire qu'il est muni des quatre opérations arithmétiques satisfaisant les mêmes règles que celles sur les fractions et ces opérations sont compatibles avec la relation d'ordre. Mais il satisfait en plus la propriété de la borne supérieure qui fonde l'analyse réelle.

Enfin, cet ensemble est caractérisé par Hilbert comme le plus grand corps archimédien.

Remarque : L'ensemble des réels n'est pas dénombrable *i.e.* il n'existe aucune bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$. **(Hors-Programme)**

Remarque : L'ensemble des réels n'est pas dénombrable *i.e.* il n'existe aucune bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$. **(Hors-Programme)**

Preuve :
On suppose le contraire et on va montrer que $[0\,;1]$ n'est pas dénombrable ce qui suffira.

Remarque : L'ensemble des réels n'est pas dénombrable *i.e.* il n'existe aucune bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$. **(Hors-Programme)**

Preuve :
On suppose le contraire et on va montrer que $[0\,;1]$ n'est pas dénombrable ce qui suffira.
Si $[0\,;1]$ était dénombrable alors on pourrait écrire $[0\,;1] = \{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$.

Remarque : L'ensemble des réels n'est pas dénombrable *i.e.* il n'existe aucune bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$. **(Hors-Programme)**

Preuve :

On suppose le contraire et on va montrer que $[0\,;1]$ n'est pas dénombrable ce qui suffira.

Si $[0\,;1]$ était dénombrable alors on pourrait écrire $[0\,;1] = \{\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_n, \dots\}$.

Or, des 3 segments $\left[0\,;\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right]$ et $\left[\frac{2}{3}\,;1\right]$, il y en a nécessairement un dont X_1 n'est pas élément. Notons le $\mathrm{I}_1 = [a_1\,;b_1]$.

Remarque : L'ensemble des réels n'est pas dénombrable *i.e.* il n'existe aucune bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$. **(Hors-Programme)**

Preuve :
Si $[0\,;1]$ était dénombrable alors on pourrait écrire $[0\,;1] = \{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$.

Or, des 3 segments $\left[0\,;\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right]$ et $\left[\frac{2}{3}\,;1\right]$, il y en a nécessairement un dont X_1 n'est pas élément. Notons le $I_1 = [a_1\,;b_1]$.

De même, des 3 segments $\left[a_1\,;a_1+\frac{1}{3}\right]$, $\left[a_1+\frac{1}{3}\,;a_1+\frac{2}{3}\right]$ et $\left[a_1+\frac{2}{3}\,;a_1\right]$, il y en a au moins, un dont X_2 n'est pas l'élément. On le note $I_2 = [a_2\,;b_2]$. Ainsi, X_1 et X_2 ne sont pas dans I_2.

Remarque : L'ensemble des réels n'est pas dénombrable *i.e.* il n'existe aucune bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$. **(Hors-Programme)**

Preuve :

Or, des 3 segments $\left[0\,;\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right]$ et $\left[\frac{2}{3}\,;1\right]$, il y en a nécessairement un dont X_1 n'est pas élément. Notons le $I_1 = [a_1\,; b_1]$.

De même, des 3 segments $\left[a_1\,; a_1+\frac{1}{3}\right]$, $\left[a_1+\frac{1}{3}\,; a_1+\frac{2}{3}\right]$ et $\left[a_1+\frac{2}{3}\,; a_1\right]$, il y en a au moins, un dont X_2 n'est pas l'élément. On le note $I_2 = [a_2\,; b_2]$. Ainsi, X_1 et X_2 ne sont pas dans I_2.

En itérant le procédé, on construit ainsi une suite infinie de segments $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, telle que :

Pour tout entier naturel n, X_1, X_2, ..., X_n ne sont pas dans I_1, I_2, ..., I_n et de longueur $\frac{1}{3^n}$ qui tend vers 0.

Remarque : L'ensemble des réels n'est pas dénombrable *i.e.* il n'existe aucune bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$. **(Hors-Programme)**

Preuve :

De même, des 3 segments $\left[a_1\,;a_1+\dfrac{1}{3}\right]$, $\left[a_1+\dfrac{1}{3}\,;a_1+\dfrac{2}{3}\right]$ et $\left[a_1+\dfrac{2}{3}\,;a_1\right]$, il y en a au moins, un dont X_2 n'est pas l'élément. On le note $\mathrm{I}_2=[a_2\,;b_2]$. Ainsi, X_1 et X_2 ne sont pas dans I_2.

En itérant le procédé, on construit ainsi une suite infinie de segments $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, telle que :

Pour tout entier naturel n, X_1, X_2, ..., X_n ne sont pas dans I_1, I_2, ..., I_n et de longueur $\dfrac{1}{3^n}$ qui tend vers 0.

D'après le théorème des intervalles fermés emboités (que l'on verra bientôt), il existe un nombre réel x dans $[0\,;1]$ tel que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\mathrm{I}_n=\{x\}$.

Remarque : L'ensemble des réels n'est pas dénombrable *i.e.* il n'existe aucune bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$. **(Hors-Programme)**

Preuve :

En itérant le procédé, on construit ainsi une suite infinie de segments $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, telle que :

Pour tout entier naturel n, X_1, X_2, ..., X_n ne sont pas dans I_1, I_2, ..., I_n et de longueur $\dfrac{1}{3^n}$ qui tend vers 0.

D'après le théorème des intervalles fermés emboités (que l'on verra bientôt), il existe un nombre réel x dans $[0\,;1]$ tel que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{I}_n = \{x\}$.

Or, comme $x \in [0\,;1] = \{\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_n, \dots\}$, il existe donc un entier n tel que $x = \mathrm{X}_n$.

Remarque : L'ensemble des réels n'est pas dénombrable *i.e.* il n'existe aucune bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$. **(Hors-Programme)**

Preuve :

D'après le théorème des intervalles fermés emboités (que l'on verra bientôt), il existe un nombre réel x dans $[0\,;1]$ tel que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{I}_n = \{x\}$.

Or, comme $x \in [0\,;1] = \{\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_n, \dots\}$, il existe donc un entier n tel que $x = \mathrm{X}_n$.

Mais alors, par construction de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x = \mathrm{X}_n$ n'est pas dans I_n, ce qui est absurde.

D'où le résultat.

II. Relation d’ordre sur $\mathbb{R}$

II. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

1. Être inférieur à

Définition 2 :

Soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que « x est inférieur à y » et on note $x \leqslant y$ si, et seulement si $y - x \in \mathbb{R}_+$.

II. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

1. Être inférieur à

Définition 2 :

Soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que « x est inférieur à y » et on note $x \leqslant y$ si, et seulement si $y-x \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 1 :

$(\mathbb{R}\,;\leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné.

II. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

1. Être inférieur à

Définition 2 :

Soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que « x est inférieur à y » et on note $x \leqslant y$ si, et seulement si $y - x \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 1 :

$(\mathbb{R}\,;\leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné.

En particulier, tous les éléments de $\mathbb{R}$ sont comparables :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \quad \text{ou} \quad y \leqslant x.$$

Définition 2 :

Soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que « x est inférieur à y » et on note $x \leqslant y$ si, et seulement si $y - x \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 1 :

$(\mathbb{R}\,;\leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné.

En particulier, tous les éléments de $\mathbb{R}$ sont comparables :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \quad \text{ou} \quad y \leqslant x.$$

Remarques :

- La relation $\geqslant$ est aussi une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.

Définition 2 :

Soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que « x est inférieur à y » et on note $x \leqslant y$ si, et seulement si $y - x \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 1 :

$(\mathbb{R}\,;\leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné.

En particulier, tous les éléments de $\mathbb{R}$ sont comparables :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \quad \text{ou} \quad y \leqslant x.$$

Remarques :

- La relation $\geqslant$ est aussi une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.
- La relation $<$ est définie par $x < y \iff y - x \in \mathbb{R}_+^* \iff x \leqslant y$ et $x \neq y$.

Définition 2 :

Soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que « x est inférieur à y » et on note $x \leqslant y$ si, et seulement si $y - x \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 1 :

$(\mathbb{R}\,;\leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné.

En particulier, tous les éléments de $\mathbb{R}$ sont comparables :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \quad \text{ou} \quad y \leqslant x.$$

Remarques :

- La relation $\geqslant$ est aussi une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.
- La relation $<$ est définie par $x < y \iff y - x \in \mathbb{R}_+^* \iff x \leqslant y \text{ et } x \neq y$.

ATTENTION

La relation $<$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est ni réflexive, ni anti-symétrique.

Proposition 2 (Compatibilité de $\leqslant$ avec $+$ et $\times$) :

Soient a, b, c et d des nombres réels.

1. Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $a + c \leqslant b + d$.

Proposition 2 (Compatibilité de $\leqslant$ avec $+$ et $\times$) :

Soient a, b, c et d des nombres réels.

1. Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $a + c \leqslant b + d$.
2. Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$ alors $ac \leqslant bd$.

Proposition 2 (Compatibilité de $\leqslant$ avec $+$ et $\times$) :

Soient a, b, c et d des nombres réels.

1. Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $a + c \leqslant b + d$.
2. Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$ alors $ac \leqslant bd$.
3. $a \leqslant b \iff -b \leqslant -a$.

Proposition 2 (Compatibilité de $\leqslant$ avec $+$ et $\times$) :

Soient a, b, c et d des nombres réels.

1. Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $a + c \leqslant b + d$.
2. Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$ alors $ac \leqslant bd$.
3. $a \leqslant b \iff -b \leqslant -a$.
4. Si a et b sont non nuls de même signe alors $a \leqslant b \iff \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.

Proposition 2 (Compatibilité de $\leqslant$ avec $+$ et $\times$) :

Soient a, b, c et d des nombres réels.

1. Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $a + c \leqslant b + d$.
2. Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$ alors $ac \leqslant bd$.
3. $a \leqslant b \iff -b \leqslant -a$.
4. Si a et b sont non nuls de même signe alors $a \leqslant b \iff \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.

Proposition 2 (Compatibilité de $\leqslant$ avec $+$ et $\times$) :

Soient a, b, c et d des nombres réels.

1. Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $a + c \leqslant b + d$.
2. Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$ alors $ac \leqslant bd$.
3. $a \leqslant b \iff -b \leqslant -a$.
4. Si a et b sont non nuls de même signe alors $a \leqslant b \iff \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.

En particulier,

- $a \leqslant b \iff \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ a + \lambda \leqslant b + \lambda$.

Proposition 2 (Compatibilité de $\leqslant$ avec $+$ et $\times$) :

Soient a, b, c et d des nombres réels.

1. Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $a + c \leqslant b + d$.
2. Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$ alors $ac \leqslant bd$.
3. $a \leqslant b \iff -b \leqslant -a$.
4. Si a et b sont non nuls de même signe alors $a \leqslant b \iff \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.

En particulier,

- $a \leqslant b \iff \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ a + \lambda \leqslant b + \lambda$.
- $\forall\, \lambda > 0,\ a \leqslant b \iff \lambda a \leqslant \lambda b \quad$ et $\quad \forall\, \lambda < 0,\ a \leqslant b \iff \lambda a \geqslant \lambda b$.

Proposition 2 (Compatibilité de $\leqslant$ avec $+$ et $\times$) :

Soient a, b, c et d des nombres réels.

1. Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $a + c \leqslant b + d$.
2. Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$ alors $ac \leqslant bd$.
3. $a \leqslant b \iff -b \leqslant -a$.
4. Si a et b sont non nuls de même signe alors $a \leqslant b \iff \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.

En particulier,

- $a \leqslant b \iff \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\, a + \lambda \leqslant b + \lambda$.
- $\forall\, \lambda > 0,\, a \leqslant b \iff \lambda\, a \leqslant \lambda\, b$ et $\forall\, \lambda < 0,\, a \leqslant b \iff \lambda\, a \geqslant \lambda\, b$.

ATTENTION

L'assertion 4 ne dit pas que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$ mais seulement qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

ATTENTION

On ne soustrait ni de divise des inégalités !

$$\begin{cases} 1 \leqslant 3 \\ 2 \leqslant 5 \end{cases} \qquad \text{mais} \qquad 1 - 2 > 3 - 5.$$

On pourra cependant les ajouter membre à membre ou les multiplier si tous les membres sont strictement positifs.

Remarque : Sur $\mathbb{C}$, il existe des relations d'ordre (lexicographique, ...), mais non compatibles avec les opérations.

Par exemple,

- Si $\mathrm{i} \geqslant 0$ alors $\mathrm{i} \times \mathrm{i} \geqslant 0 \times \mathrm{i}$ d'où $-1 \geqslant 0$. Absurde !

Remarque : Sur $\mathbb{C}$, il existe des relations d'ordre (lexicographique, ...), mais non compatibles avec les opérations.

Par exemple,

- Si $\mathrm{i} \geqslant 0$ alors $\mathrm{i} \times \mathrm{i} \geqslant 0 \times \mathrm{i}$ d'où $-1 \geqslant 0$. Absurde !
- Si $\mathrm{i} \leqslant 0$ alors $-\mathrm{i} \geqslant 0$. $(-\mathrm{i}) \times (-\mathrm{i}) \geqslant 0 \times (-\mathrm{i})$ d'où $-1 \geqslant 0$. Absurde aussi !

Exercice 2 :

Soient a, b des réels strictement positifs.

1. Ordonner les réels $\dfrac{a+b}{2}$ et $\sqrt{ab}$.

Exercice 2 :

Soient a, b des réels strictement positifs.

1. Ordonner les réels $\dfrac{a+b}{2}$ et $\sqrt{ab}$.
2. Montrer que leur distance est majorée par $\dfrac{|b-a|^3}{8ab}$.

Rappel (Parties bornées) :

Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

On dit que :

- A est majorée dans E lorsque : $\exists\, \mathrm{M} \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M}$.

Rappel (Parties bornées) :

Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

On dit que :

- A est majorée dans E lorsque : $\exists\, \mathrm{M} \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M}$.
- A est minorée dans E lorsque : $\exists\, m \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ m \leqslant x$.

II. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

2. Borne supérieure, borne inférieure

Rappel (Parties bornées) :

Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

On dit que :

- A est majorée dans E lorsque : $\exists\, \mathrm{M} \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M}$.
- A est minorée dans E lorsque : $\exists\, m \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ m \leqslant x$.
- A est bornée dans E lorsque A est à la fois majorée et minorée.

Rappel (Parties bornées) :

Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

On dit que :

- A est majorée dans E lorsque : $\exists\, \mathrm{M} \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M}$.
- A est minorée dans E lorsque : $\exists\, m \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ m \leqslant x$.
- A est bornée dans E lorsque A est à la fois majorée et minorée.

II. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

2. Borne supérieure, borne inférieure

Rappel (Parties bornées) :

Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

On dit que :

- A est majorée dans E lorsque : $\exists\, \mathrm{M} \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M}$.
- A est minorée dans E lorsque : $\exists\, m \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ m \leqslant x$.
- A est bornée dans E lorsque A est à la fois majorée et minorée.

- A admet un maximum lorsque : $\exists\, b \in \mathrm{A},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant b$.

Rappel (Parties bornées) :

Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

On dit que :

- A est majorée dans E lorsque : $\exists\, \mathrm{M} \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M}$.
- A est minorée dans E lorsque : $\exists\, m \in \mathrm{E},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ m \leqslant x$.
- A est bornée dans E lorsque A est à la fois majorée et minorée.

- A admet un maximum lorsque : $\exists\, b \in \mathrm{A},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant b$.
- A admet un minimum lorsque : $\exists\, a \in \mathrm{A},\ \forall\, x \in \mathrm{A},\ a \leqslant x$.

Exemple 1 :

L'intervalle $[0\,;1[$ admet 0 pour plus petit élément mais n'admet PAS de plus grand élément.

1. $0 \in [0\,;1[$ et $\forall\, x \in [0\,;1[$, $0 \leqslant x$ donc 0 est le plus petit élément de $[0\,;1[$.

Exemple 1 :

L'intervalle $[0\,;1[$ admet 0 pour plus petit élément mais n'admet PAS de plus grand élément.

1. $0 \in [0\,;1[$ et $\forall\, x \in [0\,;1[$, $0 \leqslant x$ donc 0 est le plus petit élément de $[0\,;1[$.
2. Supposons qu'il existe $\mathrm{M} \in [0\,;1[$ qui en soit le plus grand élément. Alors $\mathrm{M}' = \dfrac{\mathrm{M}+1}{2}$ vérifie, $\mathrm{M} < \mathrm{M}'$ et $\mathrm{M}' \in [0\,;1[$ ce qui contredit la « maximalité » de M.

Il n'existe donc pas de plus grand élément dans $[0\,;1[$.

L'une des propriétés caractéristiques de $\mathbb{R}$ est l'existence d'une borne supérieure pour toute partie majorée.

Il s'agit d'une propriété caractéristique dans le sens où cette propriété fait partie de la définition de $\mathbb{R}$ ou des axiomes régissant la relation d'ordre de celui-ci. Il est donc hors de propos de la démontrer.

Définition 3 (Borne supérieure) :

- Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$.
  On appelle **borne supérieure** de A, notée $\sup(A)$, le plus petit des majorants de A.

L'une des propriétés caractéristiques de $\mathbb{R}$ est l'existence d'une borne supérieure pour toute partie majorée.

Il s'agit d'une propriété caractéristique dans le sens où cette propriété fait partie de la définition de $\mathbb{R}$ ou des axiomes régissant la relation d'ordre de celui-ci. Il est donc hors de propos de la démontrer.

Définition 3 (Borne supérieure) :

- Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$.
  On appelle **borne supérieure** de A, notée $\sup(A)$, le plus petit des majorants de A.
- Soit B une partie minorée de $\mathbb{R}$.
  On appelle **borne inférieure** de B, notée $\inf(B)$, le plus grand des minorants de B.

Définition 3 (Borne supérieure) :

- Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$.
  On appelle **borne supérieure** de A, notée $\sup(A)$, le plus petit des majorants de A.
- Soit B une partie minorée de $\mathbb{R}$.
  On appelle **borne inférieure** de B, notée $\inf(B)$, le plus grand des minorants de B.

Définition 3 (Borne supérieure) :

- Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$.
  On appelle **borne supérieure** de A, notée $\sup(A)$, le plus petit des majorants de A.
- Soit B une partie minorée de $\mathbb{R}$.
  On appelle **borne inférieure** de B, notée $\inf(B)$, le plus grand des minorants de B.

Notons que l’unicité de la borne supérieure (resp. inférieure) est une conséquence de l’unicité du plus petit élément (resp. plus grand élément) d’un ensemble. On pourra donc parler de LA borne supérieure mais jamais du majorant mais d’UN majorant. La borne supérieure nous apporte l’unicité qu’il nous manquait.

Définition 3 (Borne supérieure) :

- Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$.
  On appelle **borne supérieure** de A, notée $\sup(A)$, le plus petit des majorants de A.
- Soit B une partie minorée de $\mathbb{R}$.
  On appelle **borne inférieure** de B, notée $\inf(B)$, le plus grand des minorants de B.

Notons que l'unicité de la borne supérieure (resp. inférieure) est une conséquence de l'unicité du plus petit élément (resp. plus grand élément) d'un ensemble. On pourra donc parler de LA borne supérieure mais jamais du majorant mais d'UN majorant. La borne supérieure nous apporte l'unicité qu'il nous manquait.

ATTENTION

Les bornes inférieure et supérieure n'ont aucune raison d'exister.

Dans le cas des parties bornées, l'existence découle du théorème suivant qui est une conséquence de la construction de $\mathbb{R}$, une propriété intrinsèque dont nous verrons l'origine plus tard :

Théorème 3 (Propriété de la borne supérieure) :

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

ATTENTION

Ce théorème est faux dans $\mathbb{Q}$.

Par exemple $A = \{q \in \mathbb{Q}^+, q^2 \leqslant 2\}$ est non vide (elle contient 0) et majorée (par 10).

Si A admettait une borne supérieure $\alpha \in \mathbb{Q}$:

- Si $\alpha^2 < 2$, alors, on peut trouver un entier n tel que $\alpha + \dfrac{1}{n} \in A$; absurde.

ATTENTION

Ce théorème est faux dans $\mathbb{Q}$.

Par exemple $A = \{q \in \mathbb{Q}^+, q^2 \leqslant 2\}$ est non vide (elle contient 0) et majorée (par 10).

Si A admettait une borne supérieure $\alpha \in \mathbb{Q}$:

- Si $\alpha^2 < 2$, alors, on peut trouver un entier n tel que $\alpha + \dfrac{1}{n} \in A$; absurde.
- Si $\alpha^2 > 2$, alors, on peut trouver un entier n tel que $\alpha - \dfrac{1}{n}$ majore A ; absurde.

ATTENTION

Ce théorème est faux dans $\mathbb{Q}$.

Par exemple $\mathrm{A} = \{q \in \mathbb{Q}^+, q^2 \leqslant 2\}$ est non vide (elle contient 0) et majorée (par 10).

Si A admettait une borne supérieure $\alpha \in \mathbb{Q}$:

- Si $\alpha^2 < 2$, alors, on peut trouver un entier n tel que $\alpha + \dfrac{1}{n} \in \mathrm{A}$; absurde.
- Si $\alpha^2 > 2$, alors, on peut trouver un entier n tel que $\alpha - \dfrac{1}{n}$ majore A ; absurde.
- Si $\alpha^2 = 2$, alors $\alpha \notin \mathbb{Q}$; absurde.

ATTENTION

Ce théorème est faux dans $\mathbb{Q}$.

Par exemple $\mathrm{A} = \{q \in \mathbb{Q}^+, q^2 \leqslant 2\}$ est non vide (elle contient 0) et majorée (par 10).

Si A admettait une borne supérieure $\alpha \in \mathbb{Q}$:

- Si $\alpha^2 < 2$, alors, on peut trouver un entier n tel que $\alpha + \dfrac{1}{n} \in \mathrm{A}$; absurde.
- Si $\alpha^2 > 2$, alors, on peut trouver un entier n tel que $\alpha - \dfrac{1}{n}$ majore A ; absurde.
- Si $\alpha^2 = 2$, alors $\alpha \notin \mathbb{Q}$; absurde.

Conclusion, A ne possède pas de borne supérieure.

On prendra garde au fait qu'une partie A peut posséder une borne supérieure a sans avoir de plus grand élément.

On prendra garde au fait qu'une partie A peut posséder une borne supérieure a sans avoir de plus grand élément.

Réciproquement, si A possède un plus grand élément a, alors $a = \max(\mathrm{A}) = \sup(\mathrm{A})$.

Exercice 3 :

Compléter :

	min(A)	inf(A)	max(A)	sup(A)
$\mathrm{A} = \{1\}$				
$\mathrm{A} = \{2, 4\}$				
$\mathrm{A} = \left\{\frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$				
$\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, x^2 \leqslant 2\}$				

Théorème 4 (Caractérisation de la borne supérieure) :

Soit A une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{M} = \sup \mathrm{A} \iff \mathrm{M} \text{ est le plus petit des majorants de A}$$

Théorème 4 (Caractérisation de la borne supérieure) :

Soit A une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} = \sup \mathrm{A} &\iff \mathrm{M} \text{ est le plus petit des majorants de A} \\ &\iff \begin{cases} \mathrm{M} \text{ est un majorant de A} \\ \forall\, \mathrm{M}' \text{ majorant de A, } \mathrm{M} \leqslant \mathrm{M}' \end{cases} \end{aligned}$$

Théorème 4 (Caractérisation de la borne supérieure) :

Soit A une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} = \sup \mathrm{A} &\iff \mathrm{M} \text{ est le plus petit des majorants de A} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{M} \text{ est un majorant de A} \\ \forall\, \mathrm{M}' \text{ majorant de A, } \mathrm{M} \leqslant \mathrm{M}' \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{M} \text{ est un majorant de A} \\ \forall\, b < \mathrm{M},\ b \text{ n'est pas un majorant de A} \end{cases}
\end{aligned}$$

Théorème 4 (Caractérisation de la borne supérieure) :

Soit A une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} = \sup \mathrm{A} &\iff \text{M est le plus petit des majorants de A} \\
&\iff \begin{cases} \text{M est un majorant de A} \\ \forall\, \mathrm{M}' \text{ majorant de A, } \mathrm{M} \leqslant \mathrm{M}' \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \text{M est un majorant de A} \\ \forall\, b < \mathrm{M},\ b \text{ n'est pas un majorant de A} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M} \\ \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, x_\varepsilon \in \mathrm{A} \text{ tel que } \mathrm{M} - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}
\end{aligned}$$

Théorème 4 (Caractérisation de la borne supérieure) :

Soit A une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} = \sup \mathrm{A} &\iff \mathrm{M} \text{ est le plus petit des majorants de A} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{M} \text{ est un majorant de A} \\ \forall\, \mathrm{M}' \text{ majorant de A, } \mathrm{M} \leqslant \mathrm{M}' \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{M} \text{ est un majorant de A} \\ \forall\, b < \mathrm{M},\ b \text{ n'est pas un majorant de A} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M} \\ \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, x_\varepsilon \in \mathrm{A} \text{ tel que } \mathrm{M} - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}
\end{aligned}$$

Exercice 4 :

Sur le même modèle, écrire une caractérisation de la borne inférieure.

Théorème 4 (Caractérisation de la borne supérieure) :

Soit A une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} = \sup \mathrm{A} &\iff \mathrm{M} \text{ est le plus petit des majorants de A} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{M} \text{ est un majorant de A} \\ \forall\, \mathrm{M}' \text{ majorant de A, } \mathrm{M} \leqslant \mathrm{M}' \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{M} \text{ est un majorant de A} \\ \forall\, b < \mathrm{M},\ b \text{ n'est pas un majorant de A} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M} \\ \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, x_\varepsilon \in \mathrm{A} \text{ tel que } \mathrm{M} - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}
\end{aligned}$$

Corollaire 4.1 (Borne inférieure d'une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$) :

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Méthode 1 :

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure.

1. Pour montrer que $\sup(\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{M}$, il suffit de montrer : $\forall a \in \mathrm{A}, \quad a \leqslant \mathrm{M}$

Méthode 1 :

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure.

1. Pour montrer que $\sup(A) \leqslant M$, il suffit de montrer : $\forall a \in A, \quad a \leqslant M$
2. Pour montrer que $\sup(A) \geqslant M$, il suffit de montrer : $\exists a_0 \in A, \quad a_0 \geqslant M$;

Exemple 2 :

L'intervalle $[0\,;1[$ admet 1 comme borne supérieure.

1. Par définition, $\forall\, x \in [0\,;1[$, $x \leqslant 1$ donc $[0\,;1[$ est une partie non vide est majorée. $\sup([0\,;1[)$ existe d'après le théorème (3) et on a :

$$\sup([0\,;1[) \leqslant 1.$$

Exemple 2 :

L'intervalle $[0\,;1[$ admet 1 comme borne supérieure.

1. Par définition, $\forall\, x \in [0\,;1[$, $x \leqslant 1$ donc $[0\,;1[$ est une partie non vide est majorée. $\sup([0\,;1[)$ existe d'après le théorème (3) et on a :

$$\sup([0\,;1[) \leqslant 1.$$

2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque. Montrons que $1-\varepsilon$ n'est pas un majorant de $[0\,;1[$.
On sait déjà que $1-\varepsilon \in [0\,;1[$, de même que $\dfrac{(1-\varepsilon)+1}{2} = 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Comme $1-\varepsilon < 1-\dfrac{\varepsilon}{2} < 1$, le réel $1-\varepsilon$ n'est pas un majorant de $[0\,;1[$.

Exemple 2 :

L'intervalle $[0\,;1[$ admet 1 comme borne supérieure.

1. Par définition, $\forall\, x \in [0\,;1[,\ x \leqslant 1$ donc $[0\,;1[$ est une partie non vide est majorée. $\sup([0\,;1[)$ existe d'après le théorème (3) et on a :

$$\sup([0\,;1[) \leqslant 1.$$

2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque. Montrons que $1-\varepsilon$ n'est pas un majorant de $[0\,;1[$.
On sait déjà que $1-\varepsilon \in [0\,;1[$, de même que $\dfrac{(1-\varepsilon)+1}{2} = 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Comme $1-\varepsilon < 1-\dfrac{\varepsilon}{2} < 1$, le réel $1-\varepsilon$ n'est pas un majorant de $[0\,;1[$.

La réunion des points 1 et 2, montre que 1 est un majorant de $[0\,;1[$ et que c'est le plus petit. Le réel 1 est donc la borne supérieure de $[0\,;1[$.

Exercice 5 :

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et bornées telles que $A \subset B$.

Montrer que $\inf(B) \leqslant \inf(A)$ et $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.

Définition 4 (Fonction bornées) :

Soient I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$.

- Une fonction f est dite majorée sur I lorsqu'il existe un réel M tel que :

  $$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) \leqslant \mathrm{M}.$$

  Le réel M est alors appelé un majorant de f (sur I).
  On appelle alors borne supérieure de f sur I, notée $\sup\limits_{\mathrm{I}}(f)$, le réel

  $$\sup_{\mathrm{I}}(f) = \sup\left\{f(x),\ x \in \mathrm{I}\right\}.$$

Définition 4 (Fonction bornées) :

Soient I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$.

- Une fonction f est dite **majorée** sur I lorsqu'il existe un réel M tel que :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) \leqslant \mathrm{M}.$$

  On appelle alors **borne supérieure** de f sur I, notée $\sup\limits_{\mathrm{I}}(f)$, le réel

$$\sup_{\mathrm{I}}(f) = \sup\left\{f(x),\ x \in \mathrm{I}\right\}.$$

- Une fonction f est dite **minorée** sur I lorsqu'il existe un réel m tel que :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) \geqslant m.$$

  Le réel m est alors appelé un **minorant** de f (sur I).
  On appelle alors **borne inférieure** de f sur I, notée $\inf\limits_{\mathrm{I}}(f)$, le réel

$$\inf_{\mathrm{I}}(f) = \inf\left\{f(x),\ x \in \mathrm{I}\right\}.$$

Définition 4 (Fonction bornées) :

Soient I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$.

- Une fonction f est dite **majorée** sur I lorsqu'il existe un réel M tel que :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) \leqslant \mathrm{M}.$$

  On appelle alors **borne supérieure** de f sur I, notée $\sup\limits_{\mathrm{I}}(f)$, le réel

$$\sup_{\mathrm{I}}(f) = \sup\left\{f(x),\ x \in \mathrm{I}\right\}.$$

- Une fonction f est dite **minorée** sur I lorsqu'il existe un réel m tel que :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) \geqslant m.$$

  On appelle alors **borne inférieure** de f sur I, notée $\inf\limits_{\mathrm{I}}(f)$, le réel

$$\inf_{\mathrm{I}}(f) = \inf\left\{f(x),\ x \in \mathrm{I}\right\}.$$

- Une fonction f est dite **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Exercice 6 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{F}(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.

1. Démontrer que si f et g sont majorées alors $f+g$ est majorée et

$$\sup_{\mathrm{I}}(f+g) \leqslant \sup_{\mathrm{I}}(f) + \sup_{\mathrm{I}}(g). \tag{1}$$

Exercice 6 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g \in \mathscr{F}(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.

1. Démontrer que si f et g sont majorées alors $f+g$ est majorée et

$$\sup_{\mathrm{I}}(f+g) \leqslant \sup_{\mathrm{I}}(f) + \sup_{\mathrm{I}}(g). \tag{1}$$

2. Donner un exemple où l'inégalité (1) est stricte.

Exercice 6 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f, $g \in \mathcal{F}(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.

1. Démontrer que si f et g sont majorées alors $f+g$ est majorée et
$$\sup_{\mathrm{I}}(f+g) \leqslant \sup_{\mathrm{I}}(f) + \sup_{\mathrm{I}}(g). \tag{1}$$
2. Donner un exemple où l'inégalité (1) est stricte.
3. Démontrer que si f est majorée et g bornée alors $\sup_{\mathrm{I}}(f+g) \geqslant \sup_{\mathrm{I}}(f) + \inf_{\mathrm{I}}(g)$.

Définition 5 (Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$) :

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\,;+\infty\}$, noté $\overline{\mathbb{R}}$, est appelé droite numérique achevée.

On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation $\leqslant$, l'addition $+$ et la multiplication $\times$ de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

Prolongement de l'ordre : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ -\infty < x < +\infty$.

Définition 5 (Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$) :

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\,;+\infty\}$, noté $\overline{\mathbb{R}}$, est appelé droite numérique achevée.

On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation $\leqslant$, l'addition $+$ et la multiplication $\times$ de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

Prolongement de l'ordre : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$.

Prolongement de l'addition : $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

Définition 5 (Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$) :

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\,;+\infty\}$, noté $\overline{\mathbb{R}}$, est appelé droite numérique achevée.

On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation $\leqslant$, l'addition $+$ et la multiplication $\times$ de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

Prolongement de l'ordre : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$.

Prolongement de l'addition : $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

- $(+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty$.

Définition 5 (Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$) :

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\,;+\infty\}$, noté $\overline{\mathbb{R}}$, est appelé droite numérique achevée.

On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation $\leqslant$, l'addition $+$ et la multiplication $\times$ de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

Prolongement de l'ordre : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ -\infty < x < +\infty$.

Prolongement de l'addition : $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

- $(+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty$.
- $(-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty$.

Définition 5 (Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$) :

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\,;+\infty\}$, noté $\overline{\mathbb{R}}$, est appelé droite numérique achevée.

On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation $\leqslant$, l'addition $+$ et la multiplication $\times$ de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

Prolongement de l'ordre : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$.

Prolongement de l'addition : $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

- $(+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty$.
- $(-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty$.
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

Définition 5 (Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$) :

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\,;+\infty\}$, noté $\overline{\mathbb{R}}$, est appelé droite numérique achevée.

On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation $\leqslant$, l'addition $+$ et la multiplication $\times$ de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

Prolongement de l'ordre : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$.

Prolongement de l'addition : $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

- $(+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty$.
- $(-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty$.
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

Définition 5 (Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$) :

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\,;+\infty\}$, noté $\overline{\mathbb{R}}$, est appelé droite numérique achevée.

On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation $\leqslant$, l'addition $+$ et la multiplication $\times$ de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

Prolongement de l'ordre : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$.

Prolongement de l'addition : $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

- $(+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty$.
- $(-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty$.
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

$\forall\, x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$,

Définition 5 (Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$) :

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\,;+\infty\}$, noté $\overline{\mathbb{R}}$, est appelé droite numérique achevée.

On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation $\leqslant$, l'addition $+$ et la multiplication $\times$ de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

Prolongement de l'ordre : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$.

Prolongement de l'addition : $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

- $(+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty$.
- $(-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty$.
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

Prolongement de la multiplication :

- $\dfrac{1}{+\infty} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$.

$\forall\, x \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{0\}$,

Définition 5 (Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$) :

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\,;+\infty\}$, noté $\overline{\mathbb{R}}$, est appelé droite numérique achevée.

On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation $\leqslant$, l'addition $+$ et la multiplication $\times$ de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

Prolongement de l'ordre : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ -\infty < x < +\infty.$

Prolongement de l'addition : $\forall\, x \in \mathbb{R},$

- $(+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty.$
- $(-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty.$
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty.$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty.$

Prolongement de la multiplication :

- $\dfrac{1}{+\infty} = \dfrac{1}{-\infty} = 0.$

$\forall\, x \in \overline{\mathbb{R}}\backslash\{0\},$

- $x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Définition 5 (Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$) :

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\,;+\infty\}$, noté $\overline{\mathbb{R}}$, est appelé droite numérique achevée.

On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation $\leqslant$, l'addition $+$ et la multiplication $\times$ de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

Prolongement de l'ordre : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ -\infty < x < +\infty.$

Prolongement de l'addition : $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

- $(+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty.$
- $(-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty.$
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty.$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty.$

Prolongement de la multiplication :

- $\dfrac{1}{+\infty} = \dfrac{1}{-\infty} = 0.$

$\forall\, x \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{0\}$,

- $x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$
- $x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = \begin{cases} -\infty & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ devient ainsi un ensemble totalement ordonné. De plus il possède un maximum $+\infty$ et un minimum $-\infty$.

III. Topologie de $\mathbb{R}$

1. La droite numérique achevée

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ devient ainsi un ensemble totalement ordonné. De plus il possède un maximum $+\infty$ et un minimum $-\infty$.

On prendra garde au fait que nous n'avons pas totalement défini de loi de composition interne dans $\overline{\mathbb{R}}$ puisque nous n'avons pas défini

- $0 \times (\pm\infty)$
- $(-\infty) + (+\infty)$
- $(-\infty) - (-\infty)$
- $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

qui restent des formes indéterminées.

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ devient ainsi un ensemble totalement ordonné. De plus il possède un maximum $+\infty$ et un minimum $-\infty$.

On prendra garde au fait que nous n'avons pas totalement défini de loi de composition interne dans $\overline{\mathbb{R}}$ puisque nous n'avons pas défini

- $0 \times (\pm\infty)$
- $(-\infty) + (+\infty)$
- $(-\infty) - (-\infty)$
- $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

qui restent des formes indéterminées.

Proposition 5 :

Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ (éventuellement $\pm\infty$).

En outre, si les bornes supérieure et inférieure existent dans $\mathbb{R}$ alors elles coïncident avec leur homologue dans $\overline{\mathbb{R}}$.

La relation d'ordre permet également de définir la notion d'intervalle.
En effet, qu'est-ce donc d'autre qu'un ensemble de valeurs à la fois inférieures et supérieures à deux bornes :

Définition 6 :

Soient $(a\,;b) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$.

On définit les ensembles suivants :

- $[a\,;b] = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, a \leqslant x \leqslant b\right\}$

Un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ est donc une partie de $\overline{\mathbb{R}}$ qui, quand elle contient deux points, contient aussi toutes leurs « valeurs intermédiaires ».

Définition 6 :

Soient $(a\,;b) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$.

On définit les ensembles suivants :

- $[a\,;b] = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, a \leqslant x \leqslant b\right\}$
- $[a\,;b[= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, a \leqslant x < b\right\}$

Un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ est donc une partie de $\overline{\mathbb{R}}$ qui, quand elle contient deux points, contient aussi toutes leurs « valeurs intermédiaires ».

Définition 6 :

Soient $(a\,;b) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$.

On définit les ensembles suivants :

- $[a\,;b] = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, a \leqslant x \leqslant b\right\}$
- $[a\,;b[= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, a \leqslant x < b\right\}$
- $]a\,;b] = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, a < x \leqslant b\right\}$

Un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ est donc une partie de $\overline{\mathbb{R}}$ qui, quand elle contient deux points, contient aussi toutes leurs « valeurs intermédiaires ».

Définition 6 :

Soient $(a\,;b) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$.

On définit les ensembles suivants :

- $[a\,;b] = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, a \leqslant x \leqslant b\right\}$
- $[a\,;b[= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, a \leqslant x < b\right\}$
- $]a\,;b] = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, a < x \leqslant b\right\}$
- $]a\,;b[= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, a < x < b\right\}$

Un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ est donc une partie de $\overline{\mathbb{R}}$ qui, quand elle contient deux points, contient aussi toutes leurs « valeurs intermédiaires ».

Définition 6 :

Soient $(a\,;b) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$.

On définit les ensembles suivants :

- $[a\,;b] = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, a \leqslant x \leqslant b\right\}$
- $[a\,;b[= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, a \leqslant x < b\right\}$
- $]a\,;b] = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, a < x \leqslant b\right\}$
- $]a\,;b[= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, a < x < b\right\}$

On appelle intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie I de $\overline{\mathbb{R}}$ vérifiant :

$$\forall\, x, y \in \mathrm{I},\ x \leqslant y \implies [x\,;y] \subset \mathrm{I}.$$

Un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ est donc une partie de $\overline{\mathbb{R}}$ qui, quand elle contient deux points, contient aussi toutes leurs « valeurs intermédiaires ».

Exemples 3 :

- Lorsque $a, b \in \mathbb{R}$, on appelle segment l'ensemble $[a\,;b] \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \text{Si } a < b, & [a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leqslant x \leqslant b\} \\ \text{Si } a = b, & [a\,;a] = \{a\} \\ \text{Si } a > b, & [a\,;b] = \emptyset \end{cases}$$

Exemples 3 :

- Lorsque $a, b \in \mathbb{R}$, on appelle **segment** l'ensemble $[a\,;b] \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \text{Si } a < b, & [a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leqslant x \leqslant b\} \\ \text{Si } a = b, & [a\,;a] = \{a\} \\ \text{Si } a > b, & [a\,;b] = \emptyset \end{cases}$$

- $\emptyset$ et $\{a\}$ sont dits **intervalles triviaux** de $\mathbb{R}$. Ce sont les seuls intervalles de $\mathbb{R}$ qui soient finis.

Exemples 3 :

- Lorsque $a, b \in \mathbb{R}$, on appelle **segment** l'ensemble $[a\,;b] \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \text{Si } a < b, & [a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leqslant x \leqslant b\} \\ \text{Si } a = b, & [a\,;a] = \{a\} \\ \text{Si } a > b, & [a\,;b] = \emptyset \end{cases}$$

- $\varnothing$ et $\{a\}$ sont dits **intervalles triviaux** de $\mathbb{R}$. Ce sont les seuls intervalles de $\mathbb{R}$ qui soient finis.
- $\mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ car $1,\, 2 \in \mathbb{Z}$ mais pas $\dfrac{3}{2} \in \mathbb{Z}$.

Exemples 3 :

- Lorsque $a, b \in \mathbb{R}$, on appelle **segment** l'ensemble $[a\,;b] \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \text{Si } a < b, & [a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leqslant x \leqslant b\} \\ \text{Si } a = b, & [a\,;a] = \{a\} \\ \text{Si } a > b, & [a\,;b] = \emptyset \end{cases}$$

- $\varnothing$ et $\{a\}$ sont dits **intervalles triviaux** de $\mathbb{R}$. Ce sont les seuls intervalles de $\mathbb{R}$ qui soient finis.
- $\mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ car $1,\, 2 \in \mathbb{Z}$ mais pas $\dfrac{3}{2} \in \mathbb{Z}$.
- $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle car $-1, 1 \in \mathbb{R}^*$ mais pas $[-1\,;1]$ qui contient $0 \notin \mathbb{R}^*$.

Exemples 3 :

- Lorsque $a, b \in \mathbb{R}$, on appelle segment l'ensemble $[a\,;b] \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \text{Si } a < b, & [a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leqslant x \leqslant b\} \\ \text{Si } a = b, & [a\,;a] = \{a\} \\ \text{Si } a > b, & [a\,;b] = \emptyset \end{cases}$$

- $\varnothing$ et $\{a\}$ sont dits intervalles triviaux de $\mathbb{R}$. Ce sont les seuls intervalles de $\mathbb{R}$ qui soient finis.
- $\mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ car $1,\ 2 \in \mathbb{Z}$ mais pas $\dfrac{3}{2} \in \mathbb{Z}$.
- $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle car $-1, 1 \in \mathbb{R}^*$ mais pas $[-1\,;1]$ qui contient $0 \notin \mathbb{R}^*$.
- $\mathbb{Q}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ (cf. corollaire (13.1)).

Théorème 6 (Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$) :

Les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ sont exactement les ensembles $[a\,;b]$, $[a\,;b[$, $]a\,;b]$ et $]a\,;b[$ pour a et b décrivant $\overline{\mathbb{R}}$.

Théorème 6 (Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$) :

Les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ sont exactement les ensembles $[a\,;b]$, $[a\,;b[$, $]a\,;b]$ et $]a\,;b[$ pour a et b décrivant $\overline{\mathbb{R}}$.

Les intervalles $[a\,;b]$ et $]a\,;b[$ avec $(a\,;b) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$ sont respectivement dit fermé et ouvert.

Exemples 4 (Classification des intervalles de ℝ) :

Les intervalles de ℝ sont :

- l'ensemble vide $\varnothing$,

Exemples 4 (Classification des intervalles de $\mathbb{R}$) :

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont :

- l'ensemble vide $\varnothing$,
- l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier,

Exemples 4 (Classification des intervalles de $\mathbb{R}$) :

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont :

- l'ensemble vide $\emptyset$,
- l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier,
- les singletons $\{a\}$, avec $a \in \mathbb{R}$ un réel,

Exemples 4 (Classification des intervalles de $\mathbb{R}$) :

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont :

- l'ensemble vide $\varnothing$,
- l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier,
- les singletons $\{a\}$, avec $a \in \mathbb{R}$ un réel,
- les segments $[a\,;b]$, avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,

Exemples 4 (Classification des intervalles de $\mathbb{R}$) :

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont :

- l'ensemble vide $\varnothing$,
- l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier,
- les singletons $\{a\}$, avec $a \in \mathbb{R}$ un réel,
- les segments $[a\,;b]$, avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,
- les intervalles ouverts $]a\,;b[$, avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,

Exemples 4 (Classification des intervalles de $\mathbb{R}$) :

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont :

- l'ensemble vide $\varnothing$,
- l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier,
- les singletons $\{a\}$, avec $a \in \mathbb{R}$ un réel,
- les segments $[a\,;b]$, avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,
- les intervalles ouverts $]a\,;b[$, avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,
- les intervalles semi-ouverts ou semi-fermés $[a\,;b[$ et $]a\,;b]$, avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,

Exemples 4 (Classification des intervalles de $\mathbb{R}$) :

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont :

- l'ensemble vide $\varnothing$,
- l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier,
- les singletons $\{a\}$, avec $a \in \mathbb{R}$ un réel,
- les segments $[a\,;b]$, avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,
- les intervalles ouverts $]a\,;b[$, avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,
- les intervalles semi-ouverts ou semi-fermés $[a\,;b[$ et $]a\,;b]$, avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,
- les demi-droites fermées $[a\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;a]$, avec $a \in \mathbb{R}$, définies respectivement par

$$[a\,;+\infty[= \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geqslant a\right\} \qquad \text{et} \qquad]-\infty\,;a] = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leqslant a\right\},$$

Exemples 4 (Classification des intervalles de $\mathbb{R}$) :

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont :

- l'ensemble vide $\varnothing$,
- l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier,
- les singletons $\{a\}$, avec $a \in \mathbb{R}$ un réel,
- les segments $[a\,;b]$, avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,
- les intervalles ouverts $]a\,;b[$, avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,
- les intervalles semi-ouverts ou semi-fermés $[a\,;b[$ et $]a\,;b]$, avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,
- les demi-droites fermées $[a\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;a]$, avec $a \in \mathbb{R}$, définies respectivement par

$$[a\,;+\infty[= \Big\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geqslant a\Big\} \qquad \text{et} \qquad]-\infty\,;a] = \Big\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leqslant a\Big\},$$

- les demi-droites ouvertes $]a\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;a[$, avec $a \in \mathbb{R}$, définies respectivement par

$$]a\,;+\infty[= \Big\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > a\Big\} \qquad \text{et} \qquad]-\infty\,;a[= \Big\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < a\Big\},$$

Définition 7 (Voisinage d'un point) :

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

On appelle voisinage de a, noté $\mathcal{V}(a)$, toute partie $\mathrm{V} \subset \overline{\mathbb{R}}$ telle que $a \in \mathrm{V}$ et V contient un intervalle ouvert contenant a.

$$\mathrm{A} \in \mathcal{V}(a) \iff \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ ]a-\varepsilon\,; a+\varepsilon[\, \subset \mathrm{A}.$$

Définition 7 (Voisinage d'un point) :

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

On appelle voisinage de a, noté $\mathcal{V}(a)$, toute partie $\mathrm{V} \subset \overline{\mathbb{R}}$ telle que $a \in \mathrm{V}$ et V contient un intervalle ouvert contenant a.

$$\mathrm{A} \in \mathcal{V}(a) \iff \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ ]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[\ \subset \mathrm{A}.$$

Les voisinages peuvent être un tantinet compliqué mais, intuitivement, le point a est non seulement dans A, mais il lui reste un peu de place autour.

Exemples 5 (Exemples de voisinages) :

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Les voisinages de a sont les intervalles de la forme :

- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $]a-\varepsilon\,; a+\varepsilon[$ est un voisinage de a.

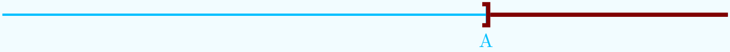
Exemples 5 (Exemples de voisinages) :

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Les voisinages de a sont les intervalles de la forme :

- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[$ est un voisinage de a.

- $\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}$, $]\mathrm{A}\,;+\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.



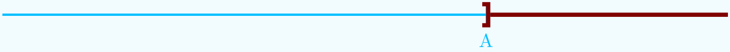
Exemples 5 (Exemples de voisinages) :

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

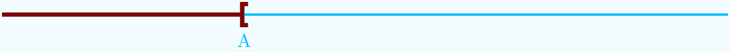
Les voisinages de a sont les intervalles de la forme :

- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[$ est un voisinage de a.

- $\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}$, $]\mathrm{A}\,;+\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.



- $\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}$, $]-\infty\,;\mathrm{A}[$ est un voisinage de $-\infty$.



Exemples 6 :

- $[0\,;1]$ est un voisinage de $0,2$: prendre $\varepsilon = 0,1$ par exemple.

Exemples 6 :

- $[0\,;1]$ est un voisinage de $0,2$: prendre $\varepsilon = 0,1$ par exemple.
- $[0\,;1]$ est un voisinage de $0,98$: prendre $\varepsilon = 0,01$ par exemple.

Exemples 6 :

- $[0\,;1]$ est un voisinage de $0,2$: prendre $\varepsilon = 0,1$ par exemple.
- $[0\,;1]$ est un voisinage de $0,98$: prendre $\varepsilon = 0,01$ par exemple.
- $[0\,;1]$ n'est pas un voisinage de 1 : pour tout $\varepsilon > 0$, $]1-\varepsilon\,;1+\varepsilon[$ déborde à droite.

Exemples 6 :

- $[0\,;1]$ est un voisinage de $0,2$: prendre $\varepsilon = 0,1$ par exemple.
- $[0\,;1]$ est un voisinage de $0,98$: prendre $\varepsilon = 0,01$ par exemple.
- $[0\,;1]$ n'est pas un voisinage de 1 : pour tout $\varepsilon > 0$, $]1-\varepsilon\,;1+\varepsilon[$ déborde à droite.
- $[0\,;1]$ est voisinage de toute réel a vérifiant $0 < a < 1$: il suffit de prendre $\varepsilon = \min\{a, 1-a\}$ (la plus petite des distances de a aux bornes de $[0\,;1]$).

D'une manière générale, les voisinages permettent de donner un sens à la notion de localité de certaines propriétés comme la continuité, la dérivabilité, ...

Définition 8 (Propriété vraie dans un voisinage) :

Soit $\mathcal{P}(x)$ une proposition dépendante de $x \in \mathbb{R}$, et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que $\mathcal{P}$ est vraie au voisinage de a lorsqu'il existe un voisinage V_a de a tel que :

$$\forall\, x \in \mathrm{V}_a,\ \mathcal{P}(x) \text{ est vraie.}$$

D'une manière générale, les voisinages permettent de donner un sens à la notion de localité de certaines propriétés comme la continuité, la dérivabilité, ...

Définition 8 (Propriété vraie dans un voisinage) :

Soit $\mathcal{P}(x)$ une proposition dépendante de $x \in \mathbb{R}$, et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que $\mathcal{P}$ est vraie au voisinage de a lorsqu'il existe un voisinage V_a de a tel que :

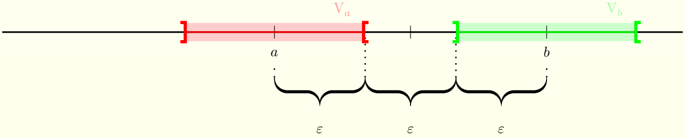
$$\forall\, x \in \mathrm{V}_a,\ \mathcal{P}(x) \text{ est vraie.}$$

Considérons une fonction f définie sur un intervalle I.

On dira, par exemple, que a est un maximum local de f sur I si, et seulement si il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a tel que f admette un maximum global sur $\mathrm{I} \cap \mathcal{V}_a$.

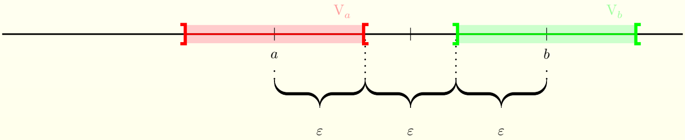
Théorème 7 (Lemme de séparation) :

1. Pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, l'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a :
$$\forall\, V_1, V_2 \in \mathcal{V}(a),\ V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(a).$$
2. Deux points distincts de $\overline{\mathbb{R}}$ possèdent des voisinages disjoints :
$$\forall\ (a\,;b) \in \overline{\mathbb{R}}^2,\ a \neq b \implies \exists\, V_a \in \mathcal{V}(a), \exists\, V_b \in \mathcal{V}(b) \ \text{ tels que } \ V_a \cap V_b = \varnothing.$$



Théorème 7 (Lemme de séparation) :

1. Pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, l'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a :
$$\forall\, V_1, V_2 \in \mathcal{V}(a),\ V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(a).$$
2. Deux points distincts de $\overline{\mathbb{R}}$ possèdent des voisinages disjoints :
$$\forall\ (a\,;b) \in \overline{\mathbb{R}}^2,\ a \neq b \implies \exists\, V_a \in \mathcal{V}(a), \exists\, V_b \in \mathcal{V}(b)\ \text{ tels que }\ V_a \cap V_b = \varnothing.$$



Ce théorème permettra, entre autre, de démontrer l'unicité de la limite d'une suite ou d'une fonction en un point de $\overline{\mathbb{R}}$.

Une dernière notion qui nous sera utile par la suite avant de nous arrêter :

Définition 9 (Ouvert) :

Soit U une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que U est un **ouvert** si, et seulement si U est un voisinage de chacun de ses points :

$$\forall\, a \in \mathrm{U}, \left|\begin{array}{l} \exists\, \mathrm{V} \in \mathcal{V}(a),\ \mathrm{V} \subset \mathrm{U}. \\ \text{ou} \\ \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ ]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[\subset \mathrm{U}. \end{array}\right.$$

Une dernière notion qui nous sera utile par la suite avant de nous arrêter :

Définition 9 (Ouvert) :

Soit U une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que U est un ouvert si, et seulement si U est un voisinage de chacun de ses points :

$$\forall\, a \in \mathrm{U}, \left| \begin{array}{l} \exists\, \mathrm{V} \in \mathcal{V}(a),\ \mathrm{V} \subset \mathrm{U}. \\ \text{ou} \\ \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ ]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[\subset \mathrm{U}. \end{array} \right.$$

Intuitivement, tous les points de U ont un peu de place autour d'eux.

Exemples 7 :

- $\varnothing$ est ouvert, puisqu'il n'y a même pas de point a à tester, c'est donc tout bon.

Exemples 7 :

- $\varnothing$ est ouvert, puisqu'il n'y a même pas de point a à tester, c'est donc tout bon.
- un ensemble de cardinal fini ne peut pas être ouvert (dès qu'il y a un point a dans U, il y a alors dans U un intervalle entier $]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[$)

Exemples 7 :

- $\emptyset$ est ouvert, puisqu'il n'y a même pas de point a à tester, c'est donc tout bon.
- un ensemble de cardinal fini ne peut pas être ouvert (dès qu'il y a un point a dans U, il y a alors dans U un intervalle entier $]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[$)
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas ouverts : leurs points sont isolés.

Exemples 7 :

- $\varnothing$ est ouvert, puisqu'il n'y a même pas de point a à tester, c'est donc tout bon.
- un ensemble de cardinal fini ne peut pas être ouvert (dès qu'il y a un point a dans U, il y a alors dans U un intervalle entier $]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[$)
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas ouverts : leurs points sont isolés.
- Tout intervalle ouvert $]b\,;c[$ est ouvert !
  $\left(\text{pour } a \text{ vérifiant } b<a<c, \text{ on peut prendre } \varepsilon=\min\left\{\dfrac{a-b}{2},\dfrac{c-a}{2}\right\}\right)$.

Exemples 7 :

- $\varnothing$ est ouvert, puisqu'il n'y a même pas de point a à tester, c'est donc tout bon.
- un ensemble de cardinal fini ne peut pas être ouvert (dès qu'il y a un point a dans U, il y a alors dans U un intervalle entier $]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[$)
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas ouverts : leurs points sont isolés.
- Tout intervalle ouvert $]b\,;c[$ est ouvert !
  $\left(\text{pour } a \text{ vérifiant } b<a<c, \text{ on peut prendre } \varepsilon=\min\left\{\dfrac{a-b}{2}, \dfrac{c-a}{2}\right\}\right)$.
- $\mathbb{R}$ est ouvert.

Exemples 7 :

- $\varnothing$ est ouvert, puisqu'il n'y a même pas de point a à tester, c'est donc tout bon.
- un ensemble de cardinal fini ne peut pas être ouvert (dès qu'il y a un point a dans U, il y a alors dans U un intervalle entier $]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[$)
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas ouverts : leurs points sont isolés.
- Tout intervalle ouvert $]b\,;c[$ est ouvert !
  $\left(\text{pour } a \text{ vérifiant } b<a<c, \text{ on peut prendre } \varepsilon = \min\left\{\frac{a-b}{2}, \frac{c-a}{2}\right\}\right)$.
- $\mathbb{R}$ est ouvert.
- Une intersection de deux ouverts U et V est encore un ouvert.

Exemples 7 :

- $\varnothing$ est ouvert, puisqu'il n'y a même pas de point a à tester, c'est donc tout bon.
- un ensemble de cardinal fini ne peut pas être ouvert (dès qu'il y a un point a dans U, il y a alors dans U un intervalle entier $]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[$)
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas ouverts : leurs points sont isolés.
- Tout intervalle ouvert $]b\,;c[$ est ouvert !
  $\left(\text{pour } a \text{ vérifiant } b<a<c, \text{ on peut prendre } \varepsilon = \min\left\{\dfrac{a-b}{2}, \dfrac{c-a}{2}\right\}\right)$.
- $\mathbb{R}$ est ouvert.
- Une intersection de deux ouverts U et V est encore un ouvert.
- Une réunion d'ouverts est un ouvert. En particulier, toute réunion d'intervalles ouverts est ouverte.

IV. Opérateurs réels

La relation d'ordre permet de doter $\mathbb{R}$ d'une norme :

Définition 10 (Valeur absolue) :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

La valeur absolue de x est le nombre réel noté $|x|$ défini par :

$$|x| = \max(x\,;-x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0, \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Définition 10 (Valeur absolue) :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

La valeur absolue de x est le nombre réel noté $|x|$ défini par :

$$|x| = \max(x\,;-x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0, \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

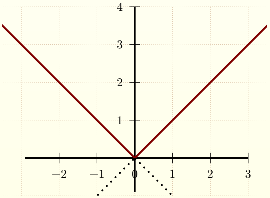


Figure 1 – $x \longmapsto |x|$.

IV. Opérateurs réels

1. Valeur absolue

Définition 10 (Valeur absolue) :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

La valeur absolue de x est le nombre réel noté $|x|$ défini par :

$$|x| = \max(x\,;-x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0, \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Remarque : Une partie A est bornée si, et seulement si $\exists\, \mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall\, x \in \mathrm{A},\ |x| \leqslant \mathrm{M}.$$

Méthode 2 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

1. $|x-a| = r \iff x-a=r \quad$ ou $\quad x-a=-r.$

Méthode 2 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

1. $|x-a| = r \iff x-a = r \quad \text{ou} \quad x-a = -r.$
2. $|x-a| \leqslant r \iff -r \leqslant x-a \leqslant r \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x-a \leqslant r \\ x-a \geqslant -r \end{cases}.$

Méthode 2 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

1. $|x-a| = r \iff x-a=r \quad \text{ou} \quad x-a=-r.$
2. $|x-a| \leqslant r \iff -r \leqslant x-a \leqslant r \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x-a \leqslant r \\ x-a \geqslant -r \end{cases}.$
3. $|x-a| \geqslant r \iff x-a \geqslant r \quad \text{ou} \quad x-a \leqslant -r.$

Exemple 8 :

Écrire $|x-3|-|x+2|$ sans valeurs absolues.

On se ramène à la définition :

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geqslant 3 \\ -x+3 & \text{si } x < 3 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad |x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geqslant -2 \\ -x-2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

Le mieux est de représenter la situation par un tableau :

x		-2		3	
$\lvert x-3\rvert$	$3-x$		$3-x$	0	$x-3$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	0	$x+2$		$x+2$
$\lvert x-3\rvert-\lvert x+2\rvert$	5		$1-2x$		-5

Exemple 9 :

Résolution de l'équation $|x-4| = 2x+10$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$|x-4| = 2x+10 \iff \begin{cases} x-4 = 2x+10 & \text{si } x \geqslant 4 \\ \text{ou} & \\ 4-x = 2x+10 & \text{si } x < 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -14 & \text{si } x \geqslant 4 \\ \text{ou} & \\ x = -2 & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

Comme $-14 \notin [4,+\infty[$, il ne subsiste qu'une seule solution : $\mathcal{S} = \{-2\}$.

Exemple 10 :

Résolution de l'inéquation $|x-2| < \dfrac{3}{x}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$.

On remarque que l'inéquation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}_-^*$ car $\dfrac{3}{x} < 0$ pour tout $x < 0$ alors que $|x-2| \geqslant 0$. On restreint donc notre résolution à $\mathbb{R}_+^*$.

$$|x-2| < \frac{3}{x} \iff -\frac{3}{x} < x-2 < \frac{3}{x} \underset{x>0}{\iff} -3 < x(x-2) < 3$$

$$\iff \begin{cases} 0 < x^2-2x-3 \\ \text{et} \\ (x+1)(x-3) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \text{ car } \Delta = -8 < 0 \\ \text{et} \\ x \in \left]-1\,;3\right[\cap \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

En conclusion, $\mathcal{S} = \left]0\,;3\right[$.

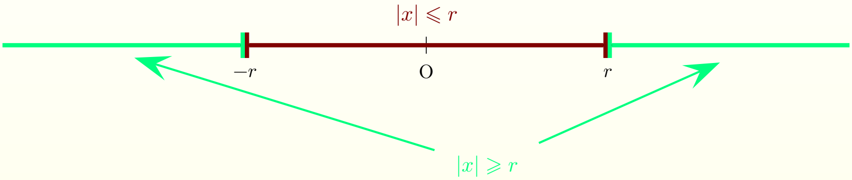


Figure 1 – $|x| \leqslant r$ et $|x| \geqslant r$.

Exercice 7 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|4x-5| = 3$.

Exercice 7 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|4x - 5| = 3$.
2. $|4x - 5| \leqslant 3$.

IV. Opérateurs réels

1. Valeur absolue

Exercice 7 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|4x - 5| = 3$.
2. $|4x - 5| \leqslant 3$.
3. $|2x - 7| > 1$.

Tout de suite, quelques propriétés évidentes mais importantes à retenir :

Proposition 8 (Propriété de la valeur absolue) :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $|x| \geqslant 0$ La valeur absolue est positive.

IV. Opérateurs réels

1. Valeur absolue

Proposition 8 (Propriété de la valeur absolue) :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $|x| \geqslant 0$ — La valeur absolue est positive.
2. $|x| = 0 \iff x = 0$ — La valeur absolue est définie.

Proposition 8 (Propriété de la valeur absolue) :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $|x| \geqslant 0$ — La valeur absolue est positive.
2. $|x| = 0 \iff x = 0$ — La valeur absolue est définie.
3. $|-x| = |x|$ — La valeur absolue est paire.

IV. Opérateurs réels

1. Valeur absolue

Proposition 8 (Propriété de la valeur absolue) :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $|x| \geqslant 0$ — La valeur absolue est positive.
2. $|x| = 0 \iff x = 0$ — La valeur absolue est définie.
3. $|-x| = |x|$ — La valeur absolue est paire.
4. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

IV. Opérateurs réels

1. Valeur absolue

Proposition 8 (Propriété de la valeur absolue) :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $|x| \geqslant 0$ — La valeur absolue est positive.
2. $|x| = 0 \iff x = 0$ — La valeur absolue est définie.
3. $|-x| = |x|$ — La valeur absolue est paire.
4. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.
5. $\sqrt{x^2} = |x|$ — La valeur absolue dérive d'un produit scalaire.

Proposition 8 (Propriété de la valeur absolue) :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $|x| \geqslant 0$ — La valeur absolue est positive.
2. $|x| = 0 \iff x = 0$ — La valeur absolue est définie.
3. $|-x| = |x|$ — La valeur absolue est paire.
4. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.
5. $\sqrt{x^2} = |x|$ — La valeur absolue dérive d'un produit scalaire.

En particulier,

Corollaire 8.1 :

- De la définition, $|x| = |y| \iff x = y \quad \text{ou} \quad x = -y$.

Proposition 8 (Propriété de la valeur absolue) :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $|x| \geqslant 0$ — La valeur absolue est positive.
2. $|x| = 0 \iff x = 0$ — La valeur absolue est définie.
3. $|-x| = |x|$ — La valeur absolue est paire.
4. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.
5. $\sqrt{x^2} = |x|$ — La valeur absolue dérive d'un produit scalaire.

Corollaire 8.1 :

- De la définition, $|x| = |y| \iff x = y \quad \text{ou} \quad x = -y$.
- De la parité, on n'oubliera pas que $|x - y| = |y - x|$.

Proposition 8 (Propriété de la valeur absolue) :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $|x| \geqslant 0$ — La valeur absolue est positive.
2. $|x| = 0 \iff x = 0$ — La valeur absolue est définie.
3. $|-x| = |x|$ — La valeur absolue est paire.
4. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.
5. $\sqrt{x^2} = |x|$ — La valeur absolue dérive d'un produit scalaire.

Corollaire 8.1 :

- De la définition, $|x| = |y| \iff x = y \quad \text{ou} \quad x = -y$.
- De la parité, on n'oubliera pas que $|x - y| = |y - x|$.
- Du lien avec la racine carrée, on démontre aussi que

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ |xy| = |x|\,|y| \qquad \text{et} \qquad \forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*,\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Enfin, et de loin la propriété la plus importante :

Proposition 9 (Inégalité triangulaire) :

Pour tous réels x et y, on a :

$$\Big||x|-|y|\Big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x|+|y|. \tag{2}$$

Avec égalité si, et seulement si x et y sont de même signe.

Enfin, et de loin la propriété la plus importante :

Proposition 9 (Inégalité triangulaire) :

Pour tous réels x et y, on a :

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|. \tag{2}$$

Avec égalité si, et seulement si x et y sont de même signe.

Remarque : Si $x \neq 0$, dire que x et y sont de même signe est équivalent à dire qu'il existe un réel λ positif tel que $x = \lambda y$ puisque $x = \underbrace{\left(\dfrac{x}{y}\right)}_{\geqslant 0} y$. Si $x = 0$, $\lambda = 0$ convient.

On retrouve ainsi, écrite plus simplement, la même condition d'égalité que pour l'inégalité triangulaire complexe.

Exercice 8 :

Résoudre l'équation $|x+y|+y=|x-y|-y$.

Représenter graphiquement l'ensemble des solutions.

Les propriétés (1), (2) et (2) font de la valeur absolue une norme sur $\mathbb{R}$.

Soit E un ensemble. On dira qu'une application $\mathrm{N} : \mathrm{E} \longmapsto \mathbb{R}_+$ est une norme (sur E) si, et seulement si

Séparation : $\forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathrm{N}(x) = 0 \iff x = 0.$

Absolue homogénéité : $\forall\ (\lambda\,;x) \in \mathbb{R} \times \mathrm{E},\ \mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda|\ \mathrm{N}(x).$

Inégalité triangulaire : $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2,\ \mathrm{N}(x+y) \leqslant \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y).$

Les propriétés (1), (2) et (2) font de la valeur absolue une norme sur $\mathbb{R}$.

Soit E un ensemble. On dira qu'une application $\mathrm{N} : \mathrm{E} \longmapsto \mathbb{R}_+$ est une norme (sur E) si, et seulement si

Séparation : $\forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathrm{N}(x) = 0 \iff x = 0.$

Absolue homogénéité : $\forall\, (\lambda\,;x) \in \mathbb{R} \times \mathrm{E},\ \mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda|\ \mathrm{N}(x).$

Inégalité triangulaire : $\forall\, (x\,;y) \in \mathrm{E}^2,\ \mathrm{N}(x+y) \leqslant \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y).$

Ainsi doté, on dit que l'ensemble $(\mathbb{R}, |\ |)$ est un espace normé.

Les propriétés (1), (2) et (2) font de la valeur absolue une norme sur $\mathbb{R}$.

Soit E un ensemble. On dira qu'une application $\mathrm{N} : \mathrm{E} \longmapsto \mathbb{R}_+$ est une norme (sur E) si, et seulement si

$$\begin{array}{rl}
\textbf{Séparation :} & \forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathrm{N}(x) = 0 \iff x = 0. \\
\textbf{Absolue homogénéité :} & \forall\, (\lambda\,; x) \in \mathbb{R} \times \mathrm{E},\ \mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda|\ \mathrm{N}(x). \\
\textbf{Inégalité triangulaire :} & \forall\, (x\,; y) \in \mathrm{E}^2,\ \mathrm{N}(x+y) \leqslant \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y).
\end{array}$$

Ainsi doté, on dit que l'ensemble $(\mathbb{R}, |\ |)$ est un espace normé.

Un espace normé est, en particulier, un espace topologique puisque la norme permet de redéfinir les ouverts précédents.

Par exemple, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $]a-\varepsilon\,; a+\varepsilon[= \left\{x \in \mathbb{R} /\ |x-a| < \varepsilon\right\}$.

Proposition 10 (Fonction valeur absolue) :

- La fonction $x \longmapsto |x|$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \longmapsto |x|$ est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ où elle est respectivement décroissante et croissante.

IV. Opérateurs réels
1. Valeur absolue

Proposition 10 (Fonction valeur absolue) :

- La fonction $x \longmapsto |x|$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \longmapsto |x|$ est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ où elle est respectivement décroissante et croissante.

ATTENTION

La fonction $x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

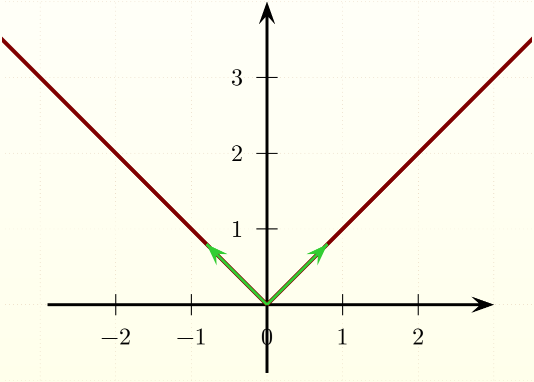


Figure 2 – Courbe représentative de $x \longmapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$.

Une autre manière de définir ou de voir $|x|$ est d'écrire $|x| = d(\mathrm{O}, \mathrm{M})$ où M est le point de l'axe réel d'abscisse x.

Définition 11 (Distance) :

Soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle distance entre x et y, noté $d\,(x\,;y)$, le réel $|x-y|$.

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ d\,(x\,;y) = |x-y|\,.$$

Définition II (Distance) :

Soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle distance entre x et y, noté $d\,(x\,;y)$, le réel $|x-y|$.

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ d\,(x\,;y) = |x-y|\,.$$

Plus généralement, soit E un ensemble. On dira qu'une application $d:\ \mathrm{E}\times\mathrm{E} \longmapsto \mathbb{R}_+$ est une distance (sur E) si, et seulement si

Symétrie : $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2,\ d\,(x\,;y) = d\,(y\,;x)$.

Séparation : $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2,\ d\,(x\,;y) = 0 \iff x = y$.

Inégalité triangulaire : $\forall\ (x\,;y\,;z) \in \mathrm{E}^3,\ d\,(x\,;z) \leqslant d\,(x\,;y) + d\,(y\,;z)$.

Définition 11 (Distance) :

Soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle distance entre x et y, noté $d\,(x\,;y)$, le réel $|x-y|$.

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ d\,(x\,;y) = |x-y|\,.$$

On dira alors que $(\mathbb{R},\, d)$ est un espace métrique. En particulier, les espaces normés sont des espaces métriques.

Définition 11 (Distance) :

Soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle distance entre x et y, noté $d\,(x\,;y)$, le réel $|x-y|$.

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ d\,(x\,;y) = |x-y|\,.$$

On dira alors que $(\mathbb{R},\,d)$ est un espace métrique. En particulier, les espaces normés sont des espaces métriques.

De plus et on peut redéfinir les ouverts de $\mathbb{R}$ à partir de la distance :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[= \{x \in \mathbb{R}\,/\,d\,(x\,;a) < \varepsilon\}.$$

Un espace métrique est donc aussi un espace topologique.

IV. Opérateurs réels

1. Valeur absolue

ATTENTION

Si tous les espaces normés peuvent être munis d'une distance en posant $d\,(x\,;y) = |x - y|$, toutes les distances ne dérivent pas d'une norme *i.e.* tous les espaces métriques ne sont pas des espaces normés.

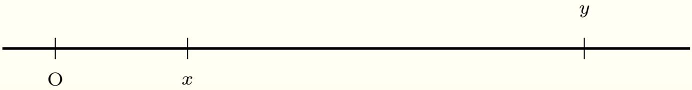
Exercice 9 :

Compléter le tableau suivant (NB : $\varepsilon > 0$) :

Valeur absolue	Distance	Inégalités	Intervalle(s)
$\|x-2\| \leqslant 3$			
	$d(x,-1) \geqslant 5$		
		$1 \leqslant x \leqslant 2$	
			$]-5,9[$
		$10 < x < 11$	
$\|x+1\| \leqslant -1$			
	$d(x,a) \leqslant \varepsilon$		

Théorème 11 ($\mathbb{R}$ est archimédien) :

L'ensemble $\mathbb{R}$ est archimédien *i.e.* $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\quad y < nx.$



Théorème 11 ($\mathbb{R}$ est archimédien) :

L'ensemble $\mathbb{R}$ est archimédien *i.e.* $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, n \in \mathbb{N}, \quad y < nx.$

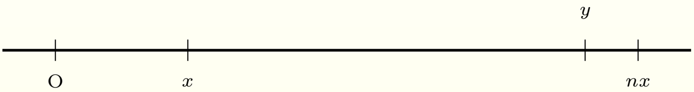


Figure 3 – $\mathbb{R}$ est archimédien.

Théorème II ($\mathbb{R}$ est archimédien) :

L'ensemble $\mathbb{R}$ est archimédien *i.e.* $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\quad y < nx.$

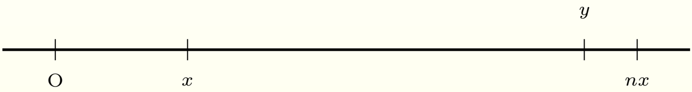


Figure 3 – $\mathbb{R}$ est archimédien.

Corollaire III.1 :

Pour tout $x \in \,]1\,;+\infty[$ et tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y < x^n$.

Définition/Théorème 12 (Partie entière) :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Il existe un unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$p \leqslant x < p + 1. \tag{3}$$

Cet entier, noté $\lfloor x \rfloor$ ou $\mathrm{E}(x)$, est appelé partie entière de x :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Définition/Théorème 12 (Partie entière) :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Il existe un unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$p \leqslant x < p + 1. \tag{3}$$

Cet entier, noté $\lfloor x \rfloor$ ou $\mathrm{E}(x)$, est appelé partie entière de x :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

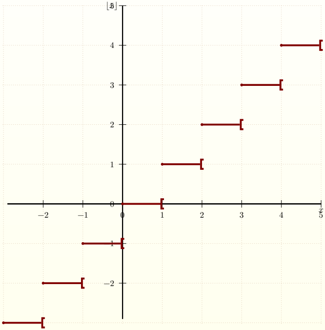


Figure 4 – $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$

Définition/Théorème 12 (Partie entière) :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Il existe un unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$p \leqslant x < p + 1. \tag{3}$$

Cet entier, noté $\lfloor x \rfloor$ ou $\mathrm{E}(x)$, est appelé partie entière de x :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

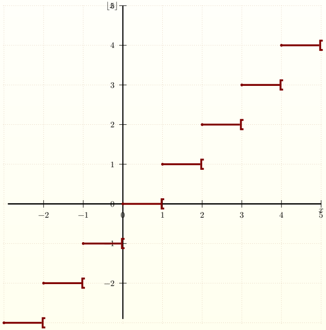


Figure 4 – $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$

À retenir :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Exemples II :

$\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor -2 \rfloor = -2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$, $\lfloor \mathrm{e} \rfloor = 2$, $\lfloor -\mathrm{e} \rfloor = -3$.

ATTENTION

$\lfloor -7,3 \rfloor = -8$ et non -7.

Exemples 11 :

$\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor -2 \rfloor = -2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$, $\lfloor \mathrm{e} \rfloor = 2$, $\lfloor -\mathrm{e} \rfloor = -3$.

ATTENTION $\lfloor -7,3 \rfloor = -8$ et non -7.

Exemple 12 :

Soient $\mathrm{T} > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition sur $n \in \mathbb{Z}$, a-t-on $x - n\mathrm{T} \in [0\,;\mathrm{T}[$?

$$x - n\mathrm{T} \in [0\,;\mathrm{T}[\iff 0 \leqslant x - n\mathrm{T} < \mathrm{T} \iff n \leqslant \frac{x}{\mathrm{T}} < n+1.$$

Par définition de la partie entière, l'entier $\left\lfloor \dfrac{x}{\mathrm{T}} \right\rfloor$ convient.

À retenir, donc : $\quad x - \left\lfloor \dfrac{x}{\mathrm{T}} \right\rfloor \mathrm{T} \in [0\,;\mathrm{T}[$.

Exemples 13 :

Soient $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{A} > 0$ fixés.

Le mot « rang » désigne ci-dessous uniquement des entiers naturels.

- À partir de quel rang est-il vrai que $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$?

  Cette inégalité est vraie si et seulement si $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, donc à partir du rang $\left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ car $\left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\dfrac{1}{\varepsilon}$.

Exemples 13 :

Soient $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{A} > 0$ fixés.

Le mot « rang » désigne ci-dessous uniquement des entiers naturels.

- À partir de quel rang est-il vrai que $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$?

  Cette inégalité est vraie si et seulement si $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, donc à partir du rang $\left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ car $\left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\dfrac{1}{\varepsilon}$.
- À partir de quel rang est-il vrai que $n^2 > \mathrm{A}$?
  C'est vrai si et seulement si $n > \sqrt{\mathrm{A}}$, donc à partir du rang $\left\lfloor \sqrt{\mathrm{A}} \right\rfloor + 1$.

Exemples 13 :

Soient $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{A} > 0$ fixés.

Le mot « rang » désigne ci-dessous uniquement des entiers naturels.

- À partir de quel rang est-il vrai que $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$?

  Cette inégalité est vraie si et seulement si $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, donc à partir du rang $\left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ car $\left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\dfrac{1}{\varepsilon}$.
- À partir de quel rang est-il vrai que $n^2 > \mathrm{A}$?
  C'est vrai si et seulement si $n > \sqrt{\mathrm{A}}$, donc à partir du rang $\left\lfloor \sqrt{\mathrm{A}} \right\rfloor + 1$.
- À partir de quel rang est-il vrai que $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$?

  C'est vrai si et seulement si $2^n > \dfrac{1}{\varepsilon} \iff n > -\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$, donc à partir du rang $\max\left\{0, \left\lfloor -\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln 2} \right\rfloor + 1\right\}$. Pourquoi ce « max » ? Parce que nous cherchons un entier naturel.

De la démonstration, on obtient une caractérisation très importante de la partie entière :

Corollaire II.2 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad k \leqslant x \implies k \leqslant \lfloor x \rfloor\,.$$

De la démonstration, on obtient une caractérisation très importante de la partie entière :

Corollaire II.3 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad k \leqslant x \implies k \leqslant \lfloor x \rfloor\,.$$

Méthode 3 :

Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Pour montrer que $k \leqslant \lfloor x \rfloor$, il suffit de montrer que $k \leqslant x$.

En effet, si $k \leqslant x$ alors k est un entier inférieur à x. Il est donc plus petit que le plus grand entier inférieur à x soit $k \leqslant \lfloor x \rfloor$.

Exercice 10 :

1. Montrer que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$.
   Que peut-on en conclure pour la fonction partie entière ?

Exercice 10 :

1. Montrer que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$.
   Que peut-on en conclure pour la fonction partie entière ?
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.

Exercice 10 :

1. Montrer que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$.
   Que peut-on en conclure pour la fonction partie entière ?
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.
3. Montrer que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}$.
   À-t-on $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

Exercice 10 :

1. Montrer que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$.
   Que peut-on en conclure pour la fonction partie entière ?
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.
3. Montrer que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}$.
   À-t-on $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?
4. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Proposition 12 (Propriétés de la partie entière) :

1.
   - Pour tout réel x et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

IV. Opérateurs réels

2. Partie entière

Proposition 12 (Propriétés de la partie entière) :

1.
   - Pour tout réel x et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
   - La fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.

Proposition 12 (Propriétés de la partie entière) :

1.
   - Pour tout réel x et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
   - La fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.

2. La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est :
   - croissante sur $\mathbb{R}$,

Proposition 12 (Propriétés de la partie entière) :

1.
   - Pour tout réel x et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
   - La fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.

2. La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est :
   - croissante sur $\mathbb{R}$,
   - constante sur tout intervalle de la forme $[n\,; n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$,

IV. Opérateurs réels

2. Partie entière

Proposition 12 (Propriétés de la partie entière) :

1. - Pour tout réel x et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
   - La fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.

2. La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est :
   - croissante sur $\mathbb{R}$,
   - constante sur tout intervalle de la forme $[n\,; n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$,
   - continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

Proposition 12 (Propriétés de la partie entière) :

1.
   - Pour tout réel x et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
   - La fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.

2. La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est :
   - croissante sur $\mathbb{R}$,
   - constante sur tout intervalle de la forme $[n\,;n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$,
   - continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,
   - continue à droite mais discontinue à gauche en tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

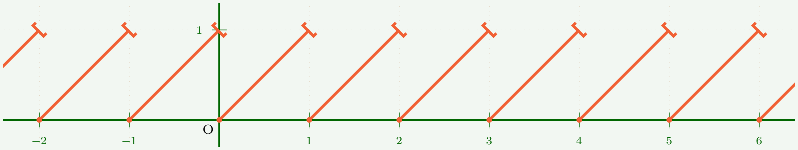
Exercice 11 :

Représenter la fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$.

Exercice 11 :

Représenter la fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$.

Correction :



$$x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor\,.$$

V. Notion de densité

Théorème 13 ($\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$) :

Tout intervalle $]a\,;b[$ non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$.

Théorème 13 ($\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$) :

Tout intervalle $]a\,;b[$ non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$.

Moralité, il y a ainsi toujours un rationnel entre deux irrationnels distincts et un irrationnel entre deux rationnels distincts.

Théorème 13 ($\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$) :

Tout intervalle $]a\,;b[$ non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$.

Moralité, il y a ainsi toujours un rationnel entre deux irrationnels distincts et un irrationnel entre deux rationnels distincts.

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont imbriqués l'un dans l'autre un peu à la manière d'une fermeture-éclair mais partout et aussi près les uns des autres que l'on veut.

Théorème 13 ($\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$) :

Tout intervalle $]a\,;b[$ non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$.

Moralité, il y a ainsi toujours un rationnel entre deux irrationnels distincts et un irrationnel entre deux rationnels distincts.

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont imbriqués l'un dans l'autre un peu à la manière d'une fermeture-éclair mais partout et aussi près les uns des autres que l'on veut.

Quel paradoxe d'imaginer que $\mathbb{Q}$ est grand dans $\mathbb{R}$ mais que son complémentaire aussi. Contre-intuitif s'il en est !

Théorème 13 ($\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$) :

Tout intervalle $]a\,;b[$ non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$.

Corollaire 13.1 :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

- $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - q| < \varepsilon$.

V. Notion de densité

1. Place des rationnels et des irrationnels dans $\mathbb{R}$

Théorème 13 ($\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$) :

Tout intervalle $]a\,;b[$ non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$.

Corollaire 13.1 :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

- $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - q| < \varepsilon$.
- $\exists\, r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $|x - r| < \varepsilon$.

V. Notion de densité

1. Place des rationnels et des irrationnels dans $\mathbb{R}$

Théorème 13 ($\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$) :

Tout intervalle $]a\,;b[$ non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$.

Corollaire 13.1 :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

- $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - q| < \varepsilon$.
- $\exists\, r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $|x - r| < \varepsilon$.

On dit que $\mathbb{R}$ est adhérent à $\mathbb{Q}$ et à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Théorème 13 ($\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$) :

Tout intervalle $]a\,;b[$ non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$.

Corollaire 13.1 :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

- $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - q| < \varepsilon$.
- $\exists\, r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $|x - r| < \varepsilon$.

On dit que $\mathbb{R}$ est adhérent à $\mathbb{Q}$ et à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

En termes simples, une partie dense de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui est un peu partout sans être forcément tout.

Théorème 13 ($\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$) :

Tout intervalle $]a\,;b[$ non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$.

Corollaire 13.1 :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

- $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - q| < \varepsilon$.
- $\exists\, r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $|x - r| < \varepsilon$.

On dit que $\mathbb{R}$ est adhérent à $\mathbb{Q}$ et à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

En termes simples, une partie dense de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui est un peu partout sans être forcément tout.

Corollaire 13.2 :

Tout réel est la limite d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels.

Exemples 14 (Parties denses dans $\mathbb{R}$) :

- L'anneau $\mathbb{D}$ des nombres décimaux : $\mathbb{D} = \left\{ \dfrac{p}{10^n},\ p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$ (cf. corollaire (13.3)).

Exemples 14 (Parties denses dans $\mathbb{R}$) :

- L'anneau $\mathbb{D}$ des nombres décimaux : $\mathbb{D} = \left\{ \dfrac{p}{10^n},\ p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$ (cf. corollaire (13.3)).
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas denses dans $\mathbb{R}$.

Définition/Théorème 13 (Approximation décimale d'un réel) :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le nombre décimal $p_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est appelé approximation décimale par défaut de x a la précision 10^{-n} et on a :

$$p_n \leqslant x < p_n + \frac{1}{10^n}.$$

V. Notion de densité

2. Approximations décimales

Définition/Théorème 13 (Approximation décimale d'un réel) :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le nombre décimal $p_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est appelé approximation décimale par défaut de x a la précision 10^{-n} et on a :

$$p_n \leqslant x < p_n + \frac{1}{10^n}.$$

Le nombre $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ est appelé approximation décimale par excès de x a la précision 10^{-n}.

Définition/Théorème 13 (Approximation décimale d'un réel) :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le nombre décimal $p_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est appelé approximation décimale par défaut de x a la précision 10^{-n} et on a :

$$p_n \leqslant x < p_n + \frac{1}{10^n}.$$

Le nombre $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ est appelé approximation décimale par excès de x a la précision 10^{-n}.

Remarque : $p_0 = \lfloor x \rfloor$.

Exemple 15 (Approximation décimale de $\sqrt{2}$) :

Prenons $x = \sqrt{2}$ et posons $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

- $1^2 \leqslant x^2 < 2^2$ donc $1 \leqslant x < 2$ à 10^0 près et

$$u_0 = \lfloor x \rfloor = 1 \ \text{(partie entière de } x\text{)}.$$

Exemple 15 (Approximation décimale de $\sqrt{2}$) :

Prenons $x = \sqrt{2}$ et posons $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

- $1^2 \leqslant x^2 < 2^2$ donc $1 \leqslant x < 2$ à 10^0 près et
$$u_0 = \lfloor x \rfloor = 1 \;\text{ (partie entière de } x\text{)}.$$
- $(10x)^2 = 200$ et $14^2 = 196 \leqslant (10x^2) < 15^2 = 225$, donc $1,4 \leqslant x < 1,5$ à 10^{-1} près et
$$u_1 = \frac{\lfloor 10x \rfloor}{10} = \frac{14}{10} = 1,4.$$

Exemple 15 (Approximation décimale de $\sqrt{2}$) :

Prenons $x = \sqrt{2}$ et posons $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

- $1^2 \leqslant x^2 < 2^2$ donc $1 \leqslant x < 2$ à 10^0 près et
$$u_0 = \lfloor x \rfloor = 1 \ \text{(partie entière de } x\text{)}.$$
- $(10x)^2 = 200$ et $14^2 = 196 \leqslant (10x^2) < 15^2 = 225$, donc $1,4 \leqslant x < 1,5$ à 10^{-1} près et
$$u_1 = \frac{\lfloor 10x \rfloor}{10} = \frac{14}{10} = 1,4.$$
- $(100x)^2 = 20000$ et $141^2 \leqslant (100x^2) < 142^2$, donc $1,41 \leqslant x < 1,42$ à 10^{-2} près et
$$u_2 = \frac{\lfloor 100x \rfloor}{100} = \frac{141}{100} = 1,41.$$

Exemple 15 (Approximation décimale de $\sqrt{2}$) :

Prenons $x = \sqrt{2}$ et posons $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

- $1^2 \leqslant x^2 < 2^2$ donc $1 \leqslant x < 2$ à 10^0 près et
$$u_0 = \lfloor x \rfloor = 1 \ \text{(partie entière de } x\text{)}.$$
- $(10x)^2 = 200$ et $14^2 = 196 \leqslant (10x^2) < 15^2 = 225$, donc $1,4 \leqslant x < 1,5$ à 10^{-1} près et
$$u_1 = \frac{\lfloor 10x \rfloor}{10} = \frac{14}{10} = 1,4.$$
- $(100x)^2 = 20000$ et $141^2 \leqslant (100x^2) < 142^2$, donc $1,41 \leqslant x < 1,42$ à 10^{-2} près et
$$u_2 = \frac{\lfloor 100x \rfloor}{100} = \frac{141}{100} = 1,41.$$
- ...

Exemple 15 (Approximation décimale de $\sqrt{2}$) :

Prenons $x = \sqrt{2}$ et posons $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

- $1^2 \leqslant x^2 < 2^2$ donc $1 \leqslant x < 2$ à 10^0 près et
$$u_0 = \lfloor x \rfloor = 1 \ \text{ (partie entière de } x\text{)}.$$
- $(10x)^2 = 200$ et $14^2 = 196 \leqslant (10x^2) < 15^2 = 225$, donc $1,4 \leqslant x < 1,5$ à 10^{-1} près et
$$u_1 = \frac{\lfloor 10x \rfloor}{10} = \frac{14}{10} = 1,4.$$
- $(100x)^2 = 20000$ et $141^2 \leqslant (100x^2) < 142^2$, donc $1,41 \leqslant x < 1,42$ à 10^{-2} près et
$$u_2 = \frac{\lfloor 100x \rfloor}{100} = \frac{141}{100} = 1,41.$$
- ...

  On construit ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des approximations décimale de $\sqrt{2}$ par défaut à 10^{-n} près.

V. Notion de densité

2. Approximations décimales

Exemple 16 :

$$3,1415 \leqslant \pi < 3,1416 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

V. Notion de densité

2. Approximations décimales

Exemple 16 :

$$3,1415 \leqslant \pi < 3,1416 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

Corollaire 13.4 :

$$\mathbb{D} \text{ est dense dans } \mathbb{R}.$$

Exemple 16 :

$$3,1415 \leqslant \pi < 3,1416 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

Corollaire 13.5 :

$\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque : Comme $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, c'est aussi une autre manière de montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exemple 16 :

$$3,1415 \leqslant \pi < 3,1416 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

Corollaire 13.6 :

$\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque : Comme $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, c'est aussi une autre manière de montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Définition/Théorème 14 (Décimale) :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soient $p_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $d_n = 10^n(p_n - p_{n-1})$.

Alors d_n est un entier compris entre 0 et 1 appelé n-ième décimale de x.

V. Notion de densité

2. Approximations décimales

Exemple 16 :

$$3,1415 \leqslant \pi < 3,1416 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

Corollaire 13.7 :

$\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque : Comme $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, c'est aussi une autre manière de montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Définition/Théorème 14 (Décimale) :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soient $p_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $d_n = 10^n(p_n - p_{n-1})$.

Alors d_n est un entier compris entre 0 et 1 appelé n-ième décimale de x.

$$x = p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} = p_0, d_1 d_2 d_3 \dots$$

Développement décimal infini du réel x.

En conclusion :

À retenir (Propriétés de $\mathbb{R}$) :

- $(\mathbb{R}, +, \times, .)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.

À retenir (Propriétés de $\mathbb{R}$) :

- $(\mathbb{R}, +, \times, .)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.
- $\mathbb{R}$ est doté d'une relation d'ordre totale $\leqslant$ qui permet de définir la norme $|x|$ d'un réel et la distance entre deux réels :

$$\mathrm{d}\,(x\,;y) = |x - y|.$$

À retenir (Propriétés de $\mathbb{R}$) :

- $(\mathbb{R}, +, \times, .)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.
- $\mathbb{R}$ est doté d'une relation d'ordre totale $\leqslant$ qui permet de définir la norme $|x|$ d'un réel et la distance entre deux réels :

$$\mathrm{d}\,(x\,;y) = |x-y|.$$

- La relation d'ordre permet de doter $\mathbb{R}$ d'une famille de voisinages ouverts. $\mathbb{R}$ possède donc une structure d'espace normé et d'espace métrique.

À retenir (Propriétés de $\mathbb{R}$) :

- $(\mathbb{R}, +, \times, .)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.
- $\mathbb{R}$ est doté d'une relation d'ordre totale $\leqslant$ qui permet de définir la norme $|x|$ d'un réel et la distance entre deux réels :

$$\mathrm{d}\,(x\,;y) = |x - y|.$$

- La relation d'ordre permet de doter $\mathbb{R}$ d'une famille de voisinages ouverts. $\mathbb{R}$ possède donc une structure d'espace normé et d'espace métrique.
- $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.

À retenir (Propriétés de $\mathbb{R}$) :

- $(\mathbb{R}, +, \times, .)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.
- $\mathbb{R}$ est doté d'une relation d'ordre totale $\leqslant$ qui permet de définir la norme $|x|$ d'un réel et la distance entre deux réels :

$$\mathrm{d}\,(x\,;y) = |x-y|.$$

- La relation d'ordre permet de doter $\mathbb{R}$ d'une famille de voisinages ouverts. $\mathbb{R}$ possède donc une structure d'espace normé et d'espace métrique.
- $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.
- $\mathbb{R}$ est archimédien. En particulier, $\forall\, \mathrm{x}\ \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à x.

À retenir (Propriétés de $\mathbb{R}$) :

- $(\mathbb{R}, +, \times, .)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.
- $\mathbb{R}$ est doté d'une relation d'ordre totale $\leqslant$ qui permet de définir la norme $|x|$ d'un réel et la distance entre deux réels :

$$\mathrm{d}\,(x\,;y) = |x - y|.$$

- La relation d'ordre permet de doter $\mathbb{R}$ d'une famille de voisinages ouverts. $\mathbb{R}$ possède donc une structure d'espace normé et d'espace métrique.
- $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.
- $\mathbb{R}$ est archimédien. En particulier, $\forall\, \mathrm{x}\, \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à x.
- $\mathbb{R}$ est indénombrable.

À retenir (Propriétés de $\mathbb{R}$) :

- $(\mathbb{R}, +, \times, .)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.
- $\mathbb{R}$ est doté d'une relation d'ordre totale $\leqslant$ qui permet de définir la norme $|x|$ d'un réel et la distance entre deux réels :

$$\mathrm{d}\,(x\,;y) = |x - y|.$$

- La relation d'ordre permet de doter $\mathbb{R}$ d'une famille de voisinages ouverts. $\mathbb{R}$ possède donc une structure d'espace normé et d'espace métrique.
- $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.
- $\mathbb{R}$ est archimédien. En particulier, $\forall$ x $\mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à x.
- $\mathbb{R}$ est indénombrable.
- $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$ qui y est dense. De même que son complémentaire et l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux.
  En particulier, tout réel peut être vu comme la limite d'une suite de rationnels, d'irrationnels ou de décimaux.