

# Matrices

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 13



- ① L'ensemble des matrices  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ 
  - Généralités et vocabulaire
  - Zoologie
- ② Opérations sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ 
  - Addition
  - Addition
  - Addition
  - Loi externe
  - Produit matriciel
  - Transposition d'une matrice
- ③ L'algèbre des matrices carrées  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ 
  - Matrices diagonales et triangulaires
  - Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton
- ④ Matrices inversibles et  $Gl_n(\mathbb{K})$ 
  - Inversibilité des matrices d'ordre 2
  - Inversibilité des matrices diagonales et triangulaires
  - Trace d'une matrice





Avant de rentrer dans

le vif du sujet en algèbre linéaire (les fameux espaces vectoriels, que nous aborderons au deuxième semestre), un chapitre plus orienté « calcul » sur un outil qui sera fondamental dans la suite du cours : **les matrices**.



**A**vant de rentrer dans le vif du sujet en algèbre linéaire (les fameux espaces vectoriels, que nous aborderons au deuxième semestre), un chapitre plus orienté « calcul » sur un outil qui sera fondamental dans la suite du cours : **les matrices**.

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K}$  est l'un des ensembles  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et les lettres  $n, p, q$ , ... désignent des entiers naturels non nuls.



# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- 1 L'ensemble des matrices  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ 
  - Généralités et vocabulaire
  - Zoologie
- 2 Opérations sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- 3 L'algèbre des matrices carrées  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- 4 Matrices inversibles et  $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$



# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 1. Généralités et vocabulaire

### Définition 1 :

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers non nuls.

On appelle **matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$**  toute famille  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  d'éléments de  $\mathbb{K}$ , indexée par  $\llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{où } a_{ij} \in \mathbb{K}, \forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket.$$

On note  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  leur ensemble où  $n$  et  $p$  sont, réciproquement, le nombre de **lignes** et de **colonnes** et  $\mathbb{K}$  est le corps auquel appartiennent les coefficients ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  pour nous).

# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 1. Généralités et vocabulaire

### Définition 1 :

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers non nuls.

On appelle **matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$**  toute famille  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  d'éléments de  $\mathbb{K}$ , indexée par  $\llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{où } a_{ij} \in \mathbb{K}, \forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket.$$

On note  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  leur ensemble.

- Les nombres  $a_{ij}$  sont les **coefficients** de la matrice  $A$ .
- $a_{ij}$  est situé à l'intersection de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne.

On notera souvent, en abrégé,  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad (n < p)$$





On notera souvent, en abrégé,  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad (n < p)$$

$i^{\text{ème}}$  ligne



On notera souvent, en abrégé,  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ .

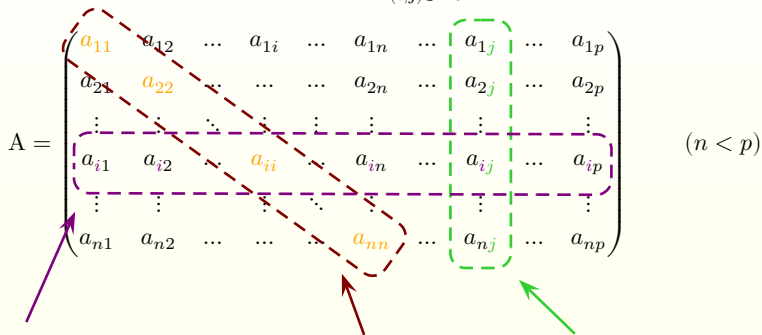
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad (n < p)$$

$i^{\text{ème}}$  ligne

$j^{\text{ème}}$  colonne



On notera souvent, en abrégé,  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ .



$i^{\text{ème}} \text{ ligne}$

Diagonale de la matrice

$j^{\text{ème}} \text{ colonne}$



On notera souvent, en abrégé,  $A = (a_{i,j})_{(i;j) \in I \times J}$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad (n < p)$$

$i^{\text{ème}}$  ligne

Diagonale de la matrice

$j^{\text{ème}}$  colonne

Les coefficients de la forme  $a_{ii}$  sont les coefficients de la diagonale de la matrice. Expression qui ne prend vraiment son sens que pour les matrices carrées que nous allons voir.



# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 1. Généralités et vocabulaire

### Exemples I :

■  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$  est une matrice  $2 \times 3$  réelle.

Par exemple,  $a_{21} = 4$  et  $a_{13} = 0$ .



# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 1. Généralités et vocabulaire

### Exemples I :

■  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$  est une matrice  $2 \times 3$  réelle.

Par exemple,  $a_{21} = 4$  et  $a_{13} = 0$ .

■  $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 4 & 1 - i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  est une matrice  $2 \times 2$  complexe.



# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 1. Généralités et vocabulaire

Remarques :

- Une matrice  $A$  de taille  $n \times p$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  n'est jamais qu'un élément de  $\mathbb{K}^{\llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket}$  *i.e.* une famille  $(a_{ij})_{(i;j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket}$  d'éléments de  $\mathbb{K}$  indexée par  $\llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket$ , *i.e.* encore une application  $(i;j) \mapsto a_{ij}$  de  $\llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket$  dans  $\mathbb{K}$ .

En résumé :

$$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{\llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket} (\simeq \mathbb{K}^{n \times p}).$$



# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 1. Généralités et vocabulaire

Remarques :

- Une matrice  $A$  de taille  $n \times p$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  n'est jamais qu'un élément de  $\mathbb{K}^{\llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket}$  *i.e.* une famille  $(a_{ij})_{(i;j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket}$  d'éléments de  $\mathbb{K}$  indexée par  $\llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket$ , *i.e.* encore une application  $(i;j) \mapsto a_{ij}$  de  $\llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket$  dans  $\mathbb{K}$ .

En résumé :

$$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{\llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket} (\simeq \mathbb{K}^{n \times p}).$$

- De la même manière, afin de faire ressortir l'aspect vectoriel, toute matrice de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  étant uniquement déterminée par la donnée de  $n$  éléments de  $\mathbb{K}$ , on l'assimilera à un vecteur de  $\mathbb{K}^n$  *i.e.* on fera l'identification :

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n.$$





# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 1. Généralités et vocabulaire

Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est donc entièrement déterminée par la donnée de  $n \times p$  scalaires qui la déterminent ce qui implique notamment que :

**Théorème 1 :**

$$A = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} \iff \forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket, a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}.$$

*Une matrice est nulle si, et seulement si ses coefficients sont tous nuls.*



# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 1. Généralités et vocabulaire

Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est donc entièrement déterminée par la donnée de  $n \times p$  scalaires qui la déterminent ce qui implique notamment que :

**Théorème 1 :**

$$A = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} \iff \forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket, a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}.$$

*Une matrice est nulle si, et seulement si ses coefficients sont tous nuls.*

Assez logiquement, la matrice  $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ , notée parfois  $(0)_{n,p}$ , sera appelée la **matrice nulle**.



# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 1. Généralités et vocabulaire

Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est donc entièrement déterminée par la donnée de  $n \times p$  scalaires qui la déterminent ce qui implique notamment que :

**Théorème 1 :**

$$A = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} \iff \forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket, a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}.$$

*Une matrice est nulle si, et seulement si ses coefficients sont tous nuls.*

Assez logiquement, la matrice  $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ , notée parfois  $(0)_{n,p}$ , sera appelée la **matrice nulle**.

**Remarque :** Pour différencier les vecteurs  $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  que sont les matrices

colonnes (ou lignes) des coefficients  $x_i \in \mathbb{K}$  qui les déterminent, on appelle **scalaire**, tout élément de  $\mathbb{K}$ .



# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 1. Généralités et vocabulaire

### Exercice 1 :

Représenter les matrices suivantes telles que :

- 1 A est la matrice de  $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$  avec  $a_{ij} = i + j$



# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 1. Généralités et vocabulaire

### Exercice I :

Représenter les matrices suivantes telles que :

- 1 A est la matrice de  $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$  avec  $a_{ij} = i + j$
- 2 B est la matrice de  $\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$  telle que  $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i - j = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 1. Généralités et vocabulaire

### Exercice I :

Représenter les matrices suivantes telles que :

- 1 A est la matrice de  $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$  avec  $a_{ij} = i + j$
- 2 B est la matrice de  $\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$  telle que  $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i - j = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- 3 C est la matrice de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  telle que  $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 1. Généralités et vocabulaire

### Exercice I :

Représenter les matrices suivantes telles que :

- 1 A est la matrice de  $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$  avec  $a_{ij} = i + j$
- 2 B est la matrice de  $\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$  telle que  $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i - j = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- 3 C est la matrice de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  telle que  $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- 4  $D = (a^{\min(i,j)})_{1 \leq i, j \leq n}$ .



# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 1. Généralités et vocabulaire

### Exercice I :

Représenter les matrices suivantes telles que :

① A est la matrice de  $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$  avec  $a_{ij} = i + j$

② B est la matrice de  $\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$  telle que  $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i - j = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

③ C est la matrice de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  telle que  $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

④  $D = (a^{\min(i,j)})_{1 \leq i, j \leq n}$ .

⑤  $E = (|i - j|)_{1 \leq i, j \leq n}$ .





# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 1. Généralités et vocabulaire

### Exercice I :

Représenter les matrices suivantes telles que :

① A est la matrice de  $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$  avec  $a_{ij} = i + j$

② B est la matrice de  $\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$  telle que  $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i - j = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

③ C est la matrice de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  telle que  $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

④  $D = (a^{\min(i,j)})_{1 \leq i, j \leq n}$ .

⑤  $E = (|i - j|)_{1 \leq i, j \leq n}$ .

⑥  $F = (\delta_{i+j, n+1})_{1 \leq i, j \leq n}$ .



# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 1. Généralités et vocabulaire

### Exercice I :

Représenter les matrices suivantes telles que :

① A est la matrice de  $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$  avec  $a_{ij} = i + j$

② B est la matrice de  $\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$  telle que  $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i - j = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

③ C est la matrice de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  telle que  $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

④  $D = (a^{\min(i,j)})_{1 \leq i, j \leq n}$ .

⑤  $E = (|i - j|)_{1 \leq i, j \leq n}$ .

⑥  $F = (\delta_{i+j, n+1})_{1 \leq i, j \leq n}$ .

⑦  $G = (\text{sh}(a_i + a_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ .



# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 2. Zoologie

- Si  $n = 1$ , la matrice  $M$  est appelée matrice ou **vecteur ligne**.

$$(1 \quad 5 \quad 8) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3.$$



# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 2. Zoologie

- Si  $n = 1$ , la matrice  $M$  est appelée matrice ou **vecteur ligne**.

$$(1 \quad 5 \quad 8) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3.$$

- Si  $p = 1$ , la matrice  $M$  est appelée matrice ou **vecteur colonne**.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3.$$



# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 2. Zoologie

- Si  $n = 1$ , la matrice  $M$  est appelée matrice ou **vecteur ligne**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3.$$

- Si  $p = 1$ , la matrice  $M$  est appelée matrice ou **vecteur colonne**.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3.$$

- Si  $m = n$ , la matrice  $M$  est appelée **matrice carrée** d'ordre  $n$ . Leur ensemble est simplement noté  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$



- On appelle **matrice unité** ou **identité** d'ordre  $n$ , notée  $I_n$ , la matrice carrée d'ordre  $n$  qui ne possède que des « 1 » sur sa diagonale et des « 0 » ailleurs :

$$I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}, \quad \text{où } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**Vocabulaire** : La notation  $\delta_{i,j}$  porte le nom de **symbole de Kronecker**.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$



# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 2. Zoologie

- On appelle **matrice diagonale** d'ordre  $n$  la matrice carrée d'ordre  $n$  qui ne possède des éléments non nuls que sur sa diagonale :  $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ .

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3(\mathbb{K}).$$

On note  $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$  leur ensemble.

En particulier, les matrices  $\lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{K}$ , sont appelées

**matrices scalaires**



# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 2. Zoologie

- On appelle **matrice triangulaire** (**resp.** strictement triangulaire) d'ordre  $n$  une matrice carrée d'ordre  $n$  qui possède un triangle composé uniquement de « 0 » sous la diagonale (**resp.** strictement sous) :  
 $a_{ij} = 0, \forall i \leq j$  (**resp.**  $i < j$ ) est une matrice triangulaire inférieure (**resp.** strictement inférieure).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire  
inférieure

On note  $\mathcal{T}_{n,I}(\mathbb{K})$  leur  
ensemble





# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 2. Zoologie

- On appelle **matrice triangulaire** (**resp.** strictement triangulaire) d'ordre  $n$  une matrice carrée d'ordre  $n$  qui possède un triangle composé uniquement de « 0 » sous la diagonale (**resp.** strictement sous) :  
 $a_{ij} = 0, \forall i \leq j$  (**resp.**  $i < j$ ) est une matrice triangulaire inférieure (**resp.** strictement inférieure).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire  
inférieure

On note  $\mathcal{T}_{n,I}(\mathbb{K})$  leur  
ensemble

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire  
supérieure



# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 2. Zoologie

- On appelle **matrice triangulaire** (resp. strictement triangulaire) d'ordre  $n$  une matrice carrée d'ordre  $n$  qui possède un triangle composé uniquement de « 0 » sous la diagonale (resp. strictement sous) :  
 $a_{ij} = 0, \forall i \leq j$  (resp.  $i < j$ ) est une matrice triangulaire inférieure (resp. strictement inférieure).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire  
inférieure

On note  $\mathcal{T}_{n,I}(\mathbb{K})$  leur  
ensemble

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire  
supérieure

On note  $\mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K})$  leur  
ensemble

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice strictement  
triangulaire  
(inférieure)



# I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 2. Zoologie

- On appelle **matrice triangulaire** (**resp.** strictement triangulaire) d'ordre  $n$  une matrice carrée d'ordre  $n$  qui possède un triangle composé uniquement de « 0 » sous la diagonale (**resp.** strictement sous) :  
 $a_{ij} = 0, \forall i \leq j$  (**resp.**  $i < j$ ) est une matrice triangulaire inférieure (**resp.** strictement inférieure).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire  
inférieure

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire  
supérieure

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice strictement  
triangulaire  
(inférieure)

Remarques :

- Les matrices triangulaires sont des matrices carrées par définition.
- Les matrices diagonales sont exactement les matrices à la fois triangulaires supérieures ET triangulaires inférieures.



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- 1 L'ensemble des matrices  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- 2 Opérations sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ 
  - Addition
  - Addition
  - Addition
  - Loi externe
  - Produit matriciel
  - Transposition d'une matrice
- 3 L'algèbre des matrices carrées  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- 4 Matrices inversibles et  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Comme précédemment, un nouvelle ensemble créé, il est nécessaire, afin d'en faire quelque chose, de définir les lois qui le régissent. On dit que l'on dote l'ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  d'une structure de groupe, d'anneau ou de  $\mathbb{K}$ -algèbre suivant les cas.



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### Définition 2 (Somme) :

Soient  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  deux matrices de **même** dimension.

La matrice  $C = A + B$  est la matrice dont les coefficients sont les sommes des coefficients de A et B :



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### Définition 2 (Somme) :

Soient  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  deux matrices de **même** dimension.

La matrice  $C = A + B$  est la matrice dont les coefficients sont les sommes des coefficients de A et B :

$$C = A + B \iff (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### Définition 2 (Somme) :

Soient  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  deux matrices de **même** dimension.

La matrice  $C = A + B$  est la matrice dont les coefficients sont les sommes des coefficients de A et B :

$$C = A + B \iff (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

**ATTENTION**

Les matrices doivent avoir les mêmes dimensions sinon leur addition n'est pas définie.





## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- La matrice nulle  $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$  est l'élément neutre de l'addition définie ci-dessus :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), A + (0) = (0) + A = A.$$



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- La matrice nulle  $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$  est l'élément neutre de l'addition définie ci-dessus :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), A + (0) = (0) + A = A.$$

- Tout élément  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  possède un symétrique pour la loi + appelé **matrice opposée** de A et notée  $-A = (-a_{ij})$ . La matrice formée des opposés des coefficients de A :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), A + (-A) = (-A) + A = (0).$$



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- La matrice nulle  $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$  est l'élément neutre de l'addition définie ci-dessus :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), A + (0) = (0) + A = A.$$

- Tout élément  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  possède un symétrique pour la loi + appelé **matrice opposée** de A et notée  $-A = (-a_{ij})$ . La matrice formée des opposés des coefficients de A :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), A + (-A) = (-A) + A = (0).$$

- De même que l'addition dans  $\mathbb{K}$ , l'addition des matrices vérifient les mêmes lois : associativité, commutativité, élément neutre et opposé.  
On dit que l'ensemble  $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}); +)$  est un **groupe commutatif**.



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

En particulier, d'après le **théorème (1)**, on en déduit :

Proposition 2 :

$$\left( a_{ij} \right)_{\substack{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1; p \rrbracket}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \left( b_{ij} \right)_{\substack{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1; p \rrbracket}} \iff \forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket, a_{ij} = b_{ij}.$$

*Deux matrices sont égales si, et seulement si elles ont les mêmes dimensions et leurs coefficients sont égaux deux à deux.*



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Exemples 2 :

$$\blacksquare \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$$



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Exemples 2 :

$$\blacksquare \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\blacksquare \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Exemples 2 :

$$\blacksquare \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\blacksquare \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\blacksquare \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

**Remarque** : On peut donc décomposer une matrice carrée en la somme de deux matrices triangulaires.



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 4. Loi externe

Définition 3 (Multiplication par un scalaire) :

Soient  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- On définit le produit (externe) de la matrice  $A$  par le scalaire  $\lambda$ , noté  $\lambda.A$  ou  $\lambda A$ , comme la matrice dont chaque coefficient est multiplié par  $\lambda$  :

$$\lambda \cdot (a_{ij}) = (\lambda \times a_{ij}).$$





## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 4. Loi externe

#### Définition 3 (Multiplication par un scalaire) :

Soient  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- On définit le produit (externe) de la matrice  $A$  par le scalaire  $\lambda$ , noté  $\lambda.A$  ou  $\lambda A$ , comme la matrice dont chaque coefficient est multiplié par  $\lambda$  :

$$\lambda \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{\cdot} (a_{ij}) = (\lambda \underset{\mathbb{K}}{\times} a_{ij}).$$

- Plus généralement, pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  la **combinaison linéaire** de  $A$  et  $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est la matrice, notée  $\lambda.A + \mu.B$ , de coefficients :

$$\lambda \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{\cdot} (a_{ij}) + \mu \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{\cdot} (b_{ij}) = \left( \lambda \underset{\mathbb{K}}{\times} a_{ij} + \mu \underset{\mathbb{K}}{\times} b_{ij} \right).$$



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 4. Loi externe

Exemple 3 :

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

L'ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est donc stable par **combinaison linéaire** *i.e.*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \lambda.A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Comme sa consœur, la loi externe est distributive sur la somme *i.e.*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \lambda.(A + B) = \lambda.A + \lambda.B.$$

On dit que l'ensemble  $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}); +; \cdot)$  est un  **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel**.

Exemple 4 :

$$3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 4. Loi externe

Exercice 2 :

Résoudre dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  le système :

$$\begin{cases} 3X + 4Y = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \\ -2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \end{cases}$$



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

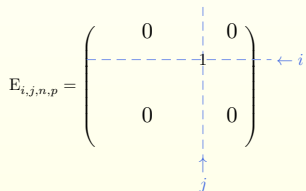
### 4. Loi externe

Définition 4 (Matrices élémentaires) :

Soit  $(i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$ .

On appelle **matrice élémentaire** (de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ), notée  $E_{i,j,n,p}$  ou  $E_{i,j}$ , la matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient de position  $(i, j)$ , égal à 1 :

$$E_{i,j,n,p} = (\delta_{k,i} \delta_{l,j})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq p}}$$



The diagram shows the matrix  $E_{i,j,n,p}$  as a 2x2 block matrix. The top row contains 0 and 0. The bottom row contains 0 and 0. A vertical dashed blue line is positioned between the two columns, with an upward arrow at the bottom labeled 'j'. A horizontal dashed blue line is positioned between the two rows, with a leftward arrow on the right labeled 'i'. The intersection of these dashed lines is labeled '1'.

$$E_{i,j,n,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figure 1 – Matrice élémentaire de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 4. Loi externe

Exemple 5 :

Les matrices élémentaires de  $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$  sont :

$$\begin{array}{lll} \blacksquare E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \blacksquare E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \blacksquare E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \blacksquare E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \blacksquare E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \blacksquare \text{et} \\ & & E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Il est assez clair que toute matrice  $M \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$  est combinaison linéaires de matrices élémentaires :

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{pmatrix} = m_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}} m_{ij} E_{i,j}. \end{aligned}$$



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 4. Loi externe

Plus généralement,

Proposition 3 :

$$\forall A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} E_{i,j}.$$

La **proposition (3)** nous fera bientôt dire que la famille  $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  forme une base de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  appelée **base canonique**.



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

Définition 5 (Produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne) :

Le produit d'un vecteur ligne  $L$  par un vecteur colonne  $C$  de même dimension  $n$  est égal au **produit scalaire** des deux vecteurs considérés comme deux vecteurs colonnes.

$$LC = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \vec{L} \cdot \vec{C} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

Définition 5 (Produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne) :

Le produit d'un vecteur ligne  $L$  par un vecteur colonne  $C$  de même dimension  $n$  est égal au **produit scalaire** des deux vecteurs considérés comme deux vecteurs colonnes.

$$LC = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \vec{L} \cdot \vec{C} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

**ATTENTION**

au sens ! On parle ici du produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne et non du produit d'un vecteur colonne par un vecteur ligne qui viendra plus tard.





## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

Exercice 3 :

Calculer  $(1 \ 2 \ \dots \ n) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $(1 \ 2 \ \dots \ n) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ .



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

On généralise cette opération à deux matrices quelconques A et B pourvu que le nombre de colonnes de la matrice A correspondent au nombre de lignes de la matrice B.

Définition  $\hookrightarrow$  :

Le **produit** de la matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  par la matrice  $B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$  est égal à la matrice  $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  dont chaque coefficient  $c_{ij}$  est égal au produit scalaire de la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice A par la  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice B :

$$\forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; m \rrbracket, c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pj}$$

En particulier, l'ensemble  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est stable par produit.



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

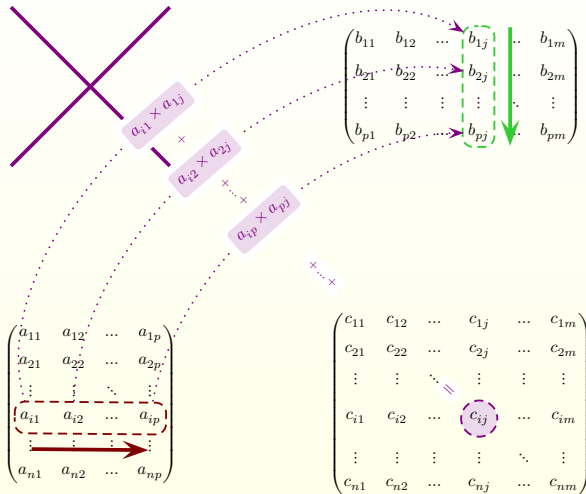


Figure 2 – Produit matriciel



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

Exemple 6 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 7 & -3 & 10 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

Remarques :

- La matrice de gauche détermine le nombre de lignes tandis que celle de droite, celui des colonnes.

**ATTENTION**

le nombre de colonnes de la matrice de gauche doit être égal au nombre de lignes de la matrice de droite sinon le produit n'est pas défini.

- Le produit à droite d'une matrice par un vecteur colonne est un vecteur colonne et le produit à gauche d'une matrice par un vecteur ligne est un vecteur ligne.
- la complexité de la multiplication matricielle dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est en  $O(n^3)$  *i.e.* du même ordre de grandeur que  $\lambda n^3$  où  $\lambda$  est une constante.



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

#### Exercice 4 :

Effectuer les sommes et produits **possibles** de matrices entre :

①  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  et

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

②  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$  et

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

#### ATTENTION

Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.

En effet, il se peut que  $AB$  soit défini mais pas  $BA$ , ou que  $AB$  et  $BA$  soient tous deux définis mais pas de la même taille.

Mais, même dans le cas où  $AB$  et  $BA$  sont définis et de la même taille, on a, en général,  $AB \neq BA$ . Les exemples suivants sont à retenir afin d'éviter d'écrire des bourdes.



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

#### ATTENTION

Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.

En effet, il se peut que  $AB$  soit défini mais pas  $BA$ , ou que  $AB$  et  $BA$  soient tous deux définis mais pas de la même taille.

Mais, même dans le cas où  $AB$  et  $BA$  sont définis et de la même taille, on a, en général,  $AB \neq BA$ . Les exemples suivants sont à retenir afin d'éviter d'écrire des bourdes.

Exemple 1 ( $AB \neq BA$ ) :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{mais} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}.$$



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

Exemple 8 ( $AB = 0$  n'implique pas  $A = 0$  ou  $B = 0$ ) :

Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir  $A \neq 0$  et  $B \neq 0$  mais  $AB = 0$ .

Les matrices  $A$  et  $B$  sont alors appelées des **diviseurs de zéro**.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est un anneau non intègre.



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

**Exemple 8** ( $AB = 0$  n'implique pas  $A = 0$  ou  $B = 0$ ) :

Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir  $A \neq 0$  et  $B \neq 0$  mais  $AB = 0$ .

Les matrices  $A$  et  $B$  sont alors appelées des **diviseurs de zéro**.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est un anneau non intègre.

**Exemple 9** ( $AB = AC$  n'implique pas  $B = C$ ) :

On peut avoir  $AB = AC$  et  $B \neq C$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

Exercice 5 :

Soient  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

Résoudre  $AX = B$  dans  $M_2(\mathbb{R})$ .



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

Exemples IO (Lignes d'une matrice) :

Soient  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$ .

$(0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0) \times A = (a_{j1} \quad \dots \quad a_{jp})$  est la  $j^{\text{ème}}$  ligne de  $A$ .

 à la position  $j$

## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel


Exemples IO (Lignes d'une matrice) :

Soient  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$ .

$(0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0) \times A = (a_{j1} \ \dots \ a_{jp})$  est la  $j^{\text{ème}}$  ligne de  $A$ .

 à la position  $j$

En particulier,  $E_{i,j,n,p} \times A = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  en notant  $L_j = (a_{j1} \ \dots \ a_{jp})$ .

 à la position  $i$

## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

Exemples II (Colonnes d'une matrice) :

Soient  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$

$$A \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \text{ est la } i^{\text{ème}} \text{ colonne de } A.$$

à la position  $i$

## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

Exemples II (Colonnes d'une matrice) :

Soient  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$

$$A \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \text{ est la } i^{\text{ème}} \text{ colonne de } A.$$

à la position  $i$

En particulier,  $A \times E_{i,j,n,p} = \left( 0 \quad \dots \quad 0 \quad C_i \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right)$  en notant

$$C_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}.$$

à la position  $j$

## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

Exercice 6 :

Calculer  $E_{i,j} \times E_{k,l}$ .





## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

Plus généralement, on a :

Proposition 4 (Produit d'une matrice par un vecteur colonne) :

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  dont les colonnes sont notées  $A_1, \dots, A_p$ .

Pour tout  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$  on a :

$$AX = \sum_{k=1}^p x_k A_k \in \mathbb{K}^n.$$

Autrement dit, le produit d'une matrice  $A$  par un vecteur colonne est une combinaison linéaire des colonnes de  $A$ .



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

Plus généralement, on a :

Proposition 4 (Produit d'une matrice par un vecteur colonne) :

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  dont les colonnes sont notées  $A_1, \dots, A_p$ .

Pour tout  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$  on a :

$$AX = \sum_{k=1}^p x_k A_k \in \mathbb{K}^n.$$

Autrement dit, le produit d'une matrice  $A$  par un vecteur colonne est une combinaison linéaire des colonnes de  $A$ .

En particulier, le produit à droite d'une matrice  $n \times p$  par un vecteur colonne  $p \times 1$  est un vecteur colonne  $n \times 1$ .



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Figure 3 – Produit (à droite) d'une matrice par un vecteur colonne.



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix}$$

Figure 3 – Produit (à droite) d'une matrice par un vecteur colonne.



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^p a_{1k}x_k \\ \sum_{k=1}^p a_{2k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^p a_{nk}x_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Figure 3 – Produit (à droite) d'une matrice par un vecteur colonne.



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^p a_{1k}x_k \\ \sum_{k=1}^p a_{2k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^p a_{nk}x_k \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^p x_k \mathbf{A}_k. \end{aligned}$$

Figure 3 – Produit (à droite) d'une matrice par un vecteur colonne.



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

Proposition 5 (Propriétés algébriques de la multiplication) :

Lorsque celui-ci est possible, le produit de deux matrices est :

Associatif :  $A(BC) = (AB)C = ABC$ .



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

Proposition 5 (Propriétés algébriques de la multiplication) :

Lorsque celui-ci est possible, le produit de deux matrices est :

Associatif :  $A(BC) = (AB)C = ABC$ .

Bilinéaire :  $A(\lambda B + C) = \lambda AB + AC$  et  $(\lambda B + C)A = \lambda BA + CA$ .





## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

Proposition 5 (Propriétés algébriques de la multiplication) :

Lorsque celui-ci est possible, le produit de deux matrices est :

Associatif :  $A(BC) = (AB)C = ABC$ .

Bilinéaire :  $A(\lambda B + C) = \lambda AB + AC$  et  $(\lambda B + C)A = \lambda BA + CA$ .

Non commutatif :  $AB \neq BA$  en général.



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

Proposition 5 (Propriétés algébriques de la multiplication) :

Lorsque celui-ci est possible, le produit de deux matrices est :

Associatif :  $A(BC) = (AB)C = ABC$ .

Bilinéaire :  $A(\lambda B + C) = \lambda AB + AC$  et  $(\lambda B + C)A = \lambda BA + CA$ .

Non commutatif :  $AB \neq BA$  en général.

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

Élément neutre :  $AI_p = I_n A = A$ .

$I_p$  est **élément neutre** pour la multiplication à droite et  $I_n$  pour la multiplication à gauche.



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

Proposition 5 (Propriétés algébriques de la multiplication) :

Lorsque celui-ci est possible, le produit de deux matrices est :

Associatif :  $A(BC) = (AB)C = ABC$ .

Bilinéaire :  $A(\lambda B + C) = \lambda AB + AC$  et  $(\lambda B + C)A = \lambda BA + CA$ .

Non commutatif :  $AB \neq BA$  en général.

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

Élément neutre :  $AI_p = I_n A = A$ .

$I_p$  est **élément neutre** pour la multiplication à droite et  $I_n$  pour la multiplication à gauche.

Élément absorbant :  $(0)_{m,n}A = (0)_{m,p}$  et  $A(0)_{p,q} = (0)_{n,q}$ ,  $\forall m, q \in \mathbb{N}^*$ .

On dit que la matrice nulle est un **élément absorbant** pour le produit matriciel.



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 5. Produit matriciel

Exercice 7 :

Trouver les matrices qui commutent avec  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ .



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 6. Transposition d'une matrice

#### Définition 1 :

La **transposée** d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est la matrice de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ , notée  $A^\top$  ou anciennement  ${}^tA$ , obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice  $A$ .

$$A^\top = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}).$$



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 6. Transposition d'une matrice

#### Définition 7 :

La **transposée** d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est la matrice de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ , notée  $A^\top$  ou anciennement  ${}^tA$ , obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice  $A$ .

$$A^\top = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}).$$

#### Exemple 12 :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ alors } A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 6. Transposition d'une matrice

#### Définition 7 :

La **transposée** d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est la matrice de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ , notée  $A^\top$  ou anciennement  ${}^tA$ , obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice  $A$ .

$$A^\top = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}).$$

**Remarque** : La transposée d'un vecteur colonne est un vecteur ligne et réciproquement :

$$(1 \quad 2 \quad 0)^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 6. Transposition d'une matrice

Proposition 6 (Propriété de la transposition) :

Linéarité : Pour tous  $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $(\lambda A + B)^T = \lambda A^T + B^T$ .





## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 6. Transposition d'une matrice

Proposition 6 (Propriété de la transposition) :

Linéarité : Pour tous  $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $(\lambda A + B)^\top = \lambda A^\top + B^\top$ .

Involutivité : Pour tous  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $(A^\top)^\top = A$ .



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 6. Transposition d'une matrice

Proposition 6 (Propriété de la transposition) :

Linéarité : Pour tous  $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $(\lambda A + B)^\top = \lambda A^\top + B^\top$ .

Involutivité : Pour tous  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $(A^\top)^\top = A$ .

Contravariance : Pour tous  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ ,  $(AB)^\top = B^\top A^\top$ .



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 6. Transposition d'une matrice

Remarques :

- Soient  $\vec{X} = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)$  et  $\vec{Y} = (y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n)$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

Alors leur produit scalaire  $\vec{X} \cdot \vec{Y}$  peut-être vu comme un produit matriciel :

$$\begin{aligned}\vec{X} \cdot \vec{Y} &= \mathbf{XY}^\top = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.\end{aligned}$$



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 6. Transposition d'une matrice

Remarques :

- Soient  $\vec{X} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$  et  $\vec{Y} = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

Alors leur produit scalaire  $\vec{X} \cdot \vec{Y}$  peut-être vu comme un produit matriciel :

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = \mathbf{X} \mathbf{Y}^\top.$$

- De la même manière, soient  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et

$\mathbf{B} = (B_1 \ B_2 \ \dots \ B_m) \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$  où  $\forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $A_i \in \mathbb{K}^p$  est la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $\mathbf{A}$  et  $B_j \in \mathbb{K}^p$  est la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $\mathbf{B}$ .

Alors  $(\mathbf{A}\mathbf{B})_{ij} = \vec{A}_i \cdot \vec{B}_j^\top$  où  $A_i$  et  $B_j$  sont vues comme des vecteurs de  $\mathbb{R}^p$ .



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 6. Transposition d'une matrice

#### Définition 8 :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- On dit que  $A$  est **symétrique** si, et seulement si  $A^\top = A$  autrement dit :

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_{ij} = a_{ji}.$$

On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices symétriques à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 6. Transposition d'une matrice

#### Définition 8 :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- On dit que  $A$  est **symétrique** si, et seulement si  $A^\top = A$  autrement dit :

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_{ij} = a_{ji}.$$

On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices symétriques à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

- On dit que  $A$  est **anti-symétrique** si, et seulement si  $A^\top = -A$  autrement dit :

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_{ij} = -a_{ji}.$$

On note  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices anti-symétriques à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 6. Transposition d'une matrice

**Remarque** : Les matrices symétriques sont donc les invariants de la transposition.

En particulier, les coefficients de la diagonale d'une matrice anti-symétriques sont nécessairement nuls et  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\}$ .



## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 6. Transposition d'une matrice

**Remarque** : Les matrices symétriques sont donc les invariants de la transposition.

En particulier, les coefficients de la diagonale d'une matrice anti-symétriques sont nécessairement nuls et  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\}$ .

Exemples 12 :

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}).$$





## II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 6. Transposition d'une matrice

#### Exercice 8 :

Soit  $A$  une matrice carrée à coefficients dans un corps  $\mathbb{K}$ .

- 1 Démontrer que  $A^{\top}A$  est symétrique.
- 2 Démontrer que  $A^2$  est symétrique si  $A$  est symétrique ou antisymétrique.



### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- 1 L'ensemble des matrices  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- 2 Opérations sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- 3 L'algèbre des matrices carrées  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ 
  - Matrices diagonales et triangulaires
  - Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton
- 4 Matrices inversibles et  $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$



### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Revenons sur la **proposition (5)** spécifiquement dans le cas où  $n = p$  des matrices carrées.

D'après celle-ci, le produit de deux matrices carrées d'ordre  $n$  est encore une matrice carrée d'ordre  $n$ , ce qui fait de la multiplication matricielle une opération appelée **loi interne** sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  associative, distributive, admettant la matrice  $\mathbf{I}_n$  comme élément neutre, mais pas commutative.



### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Revenons sur la **proposition (5)** spécifiquement dans le cas où  $n = p$  des matrices carrées.

D'après celle-ci, le produit de deux matrices carrées d'ordre  $n$  est encore une matrice carrée d'ordre  $n$ , ce qui fait de la multiplication matricielle une opération appelée **loi interne** sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  associative, distributive, admettant la matrice  $\mathbf{I}_n$  comme élément neutre, mais pas commutative.

On dit que l'ensemble  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$  est un **anneau** unitaire d'unité la matrice  $\mathbf{I}_n$  et que l'ensemble  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre non commutative.



### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 1. Matrices diagonales et triangulaires

Proposition 7 (Produits et combinaisons linéaires de matrices diagonales) :

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$  est stable par combinaison linéaire et par produit matriciel.



### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 1. Matrices diagonales et triangulaires

Proposition 7 (Produits et combinaisons linéaires de matrices diagonales) :

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$  est stable par combinaison linéaire et par produit matriciel.

■  $\forall A, B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda A + B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}).$

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 + \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}.$$



### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 1. Matrices diagonales et triangulaires

Proposition 7 (Produits et combinaisons linéaires de matrices diagonales) :

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$  est stable par combinaison linéaire et par produit matriciel.

■  $\forall A, B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda A + B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}).$

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 + \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}.$$

■  $\forall A, B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \quad AB \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}).$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}.$$



### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 1. Matrices diagonales et triangulaires

**Remarque** : Pour économiser de la place on trouve souvent l'écriture

$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$  abrégée en  $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Tout le monde

comprendra...





### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 1. Matrices diagonales et triangulaires

Exercice 9 :

Déterminer  $\left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \forall D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), AD = DA \right\}$ .



### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 1. Matrices diagonales et triangulaires

Proposition 8 (Produits et combinaisons linéaires de matrices triangulaires) :

$\mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K})$  est stable par combinaison linéaire et par produit matriciel.

■  $\forall A, B \in \mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda A + B \in \mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K}).$

### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 1. Matrices diagonales et triangulaires

Proposition 8 (Produits et combinaisons linéaires de matrices triangulaires) :

$\mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K})$  est stable par combinaison linéaire et par produit matriciel.

- $\forall A, B \in \mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda A + B \in \mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K})$ .
- $\forall A, B \in \mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K}), \quad AB \in \mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K})$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \times & \times & \times \\ 0 & a_{22} & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \times & \times & \times \\ 0 & b_{22} & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \times & \times & \times \\ 0 & a_{22}b_{22} & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 1. Matrices diagonales et triangulaires

Proposition 8 (Produits et combinaisons linéaires de matrices triangulaires) :

$\mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K})$  est stable par combinaison linéaire et par produit matriciel.

- $\forall A, B \in \mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda A + B \in \mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K})$ .
- $\forall A, B \in \mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K}), \quad AB \in \mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K})$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \times & \times & \times \\ 0 & a_{22} & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \times & \times & \times \\ 0 & b_{22} & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \times & \times & \times \\ 0 & a_{22}b_{22} & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

En particulier, les termes diagonaux du produit sont les produits des termes diagonaux *i.e.*

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, (AB)_{ii} = a_{ii}b_{ii}.$$

### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 1. Matrices diagonales et triangulaires

Proposition 8 (Produits et combinaisons linéaires de matrices triangulaires) :

$\mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K})$  est stable par combinaison linéaire et par produit matriciel.

- $\forall A, B \in \mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda A + B \in \mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K}).$
- $\forall A, B \in \mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K}), \quad AB \in \mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K}).$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \times & \times & \times \\ 0 & a_{22} & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \times & \times & \times \\ 0 & b_{22} & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \times & \times & \times \\ 0 & a_{22}b_{22} & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

En particulier, les termes diagonaux du produit sont les produits des termes diagonaux *i.e.*

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, (AB)_{ii} = a_{ii}b_{ii}.$$

### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 2. Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton

##### Définition 9 :

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On définit pour tout  $k \in \mathbb{N}$  la puissance  $k^{\text{ème}}$  de  $A$  par récurrence :

$$\begin{aligned} A^0 &= I_n \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad A^{k+1} &= AA^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k+1 \text{ fois}}. \end{aligned}$$

Remarques :

- On ne peut définir de puissance  $k^{\text{ème}}$  que pour des matrices carrées.



### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 2. Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton

##### Définition 9 :

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On définit pour tout  $k \in \mathbb{N}$  la puissance  $k^{\text{ème}}$  de  $A$  par récurrence :

$$\begin{aligned} A^0 &= I_n \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad A^{k+1} &= AA^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k+1 \text{ fois}}. \end{aligned}$$

Remarques :

- On ne peut définir de puissance  $k^{\text{ème}}$  que pour des matrices carrées.
- Pour tout  $k, l \in \mathbb{N}$ , on a  $A^k A^l = A^l A^k = A^{k+l}$ .



### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 2. Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton

##### Définition 9 :

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On définit pour tout  $k \in \mathbb{N}$  la puissance  $k^{\text{ème}}$  de  $A$  par récurrence :

$$\begin{aligned} A^0 &= I_n \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad A^{k+1} &= AA^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k+1 \text{ fois}}. \end{aligned}$$

##### Remarques :

- On ne peut définir de puissance  $k^{\text{ème}}$  que pour des matrices carrées.
- Pour tout  $k, l \in \mathbb{N}$ , on a  $A^k A^l = A^l A^k = A^{k+l}$ .
- Cependant, en général, pour  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a  $(AB)^2 \neq A^2 B^2$ .  
On peut seulement affirmer que  $(AB)^2 = ABAB$ .





### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 2. Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton

Exemple 13 :

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A \times (A \times A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 21 & 6 \end{pmatrix}.$$



### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 2. Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton

Exercice 10 :

$$\text{Soient } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer  $N^n$  et  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .



### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 2. Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton

Corollaire 8.1 :

Soit  $p \in \mathbb{N}$ .

$$\left( \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \right)^p = \text{diag}(\alpha_1^p, \dots, \alpha_n^p).$$

et

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \times & \times & \times \\ 0 & a_{22} & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a_{11}^p & \times & \times & \times \\ 0 & a_{22}^p & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}^p \end{pmatrix}.$$



### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 2. Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton

Corollaire 8.2 :

Soit  $p \in \mathbb{N}$ .

$$\left(\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\right)^p = \text{diag}(\alpha_1^p, \dots, \alpha_n^p).$$

et

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \times & \times & \times \\ 0 & a_{22} & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a_{11}^p & \times & \times & \times \\ 0 & a_{22}^p & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}^p \end{pmatrix}.$$

Exemple 14 :

$$\begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} \pi^7 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 2. Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton

##### Théorème 9 :

Soient A et B deux matrices carrées de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Pour tout entier  $p \in \mathbb{N}$ , si  $AB = BA$  alors :

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k \times B^{p-k} \quad (\text{Binôme de Newton}).$$



### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 2. Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton

##### Théorème 9 :

Soient A et B deux matrices carrées de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Pour tout entier  $p \in \mathbb{N}$ , si  $AB = BA$  alors :

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k \times B^{p-k} \quad (\text{Binôme de Newton}).$$

$$A^p - B^p = (A - B) \left( \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k} \right) = \left( \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k} \right) (A - B).$$

(Factorisation de  $A^p - B^p$ ).



### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 2. Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton

Si  $A$  et  $B$  ne commutent pas *i.e.*  $AB \neq BA$  alors

$$\begin{aligned}(A + B)^2 &= (A + B)(A + B) \\ &= A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2! \dots\end{aligned}$$

**ATTENTION**

Et,

$$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2! \dots$$



### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 2. Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton

Si  $A$  et  $B$  ne commutent pas *i.e.*  $AB \neq BA$  alors

$$\begin{aligned}(A + B)^2 &= (A + B)(A + B) \\ &= A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2! \dots\end{aligned}$$

**ATTENTION**

Et,

$$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2! \dots$$

Exemple 15 :

Comme toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  commute avec  $I_n$ , on a :

$$(A + I_n)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k = A^p + pA^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}A^{p-2} + \dots + pA + I_n.$$

$$I_n - A^p = (I_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k = (I_n - A) (A^{p-1} + A^{p-2} + \dots + A + I_n).$$



### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 2. Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton

Définition 10 (Matrice nilpotente) :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On dit que  $A$  est **nilpotente** si  $\exists p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ .

Le plus petit entier  $p$  pour laquelle cette identité est vraie est appelé l'**indice de nilpotence** de  $A$  :

$$p = \min \{ k \in \mathbb{N}^* / A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \}.$$

Pour toute matrice  $N$  nilpotente d'indice  $p$ ,

$$\forall k < p, \quad N^k \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \quad \text{et} \quad \forall k \geq p, \quad N^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.$$

Exemple 16 :

La matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est nilpotente d'indice 3.

### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 2. Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton

##### Exercice II :

Déterminer toutes les matrices carrées d'ordre  $n$  qui sont à la fois nilpotentes et idempotentes (*i.e.*  $A^2 = A$ ).



### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 2. Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton

##### Méthode 1 :

Dans les cas où  $A$  peut se décomposer comme la somme de deux matrices qui **commutent**, on pourra utiliser la formule du binôme de Newton.

En particulier, si  $A = \lambda I_n + N$  où  $N$  est une matrice nilpotente.



### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 2. Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton

Exercice 12 :

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- ❶ Calculer  $J^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .



### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 2. Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton

Exercice 12 :

Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- 1 Calculer  $J^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2 En écrivant  $A = I_3 + J$ , calculer  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .



### III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### 2. Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton

Exercice 12 :

Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- 1 Calculer  $J^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2 En écrivant  $A = I_3 + J$ , calculer  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Correction :

Comme  $J^3 = 0$ , on a :

$$A^n = (J + I_3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2.$$



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

- 1 L'ensemble des matrices  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- 2 Opérations sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- 3 L'algèbre des matrices carrées  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- 4 Matrices inversibles et  $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ 
  - Inversibilité des matrices d'ordre 2
  - Inversibilité des matrices diagonales et triangulaires
  - Trace d'une matrice



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

### Définition II (Inverse d'une matrice) :

Une matrice carrée  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite **inversible** (ou régulière) si, et seulement si il existe une matrice carrée  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que :

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

Si  $A$  n'est pas inversible, on dit que la matrice  $A$  est **singulière**.

L'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est appelé le **groupe linéaire** d'ordre  $n$  sur  $\mathbb{K}$ . On le note  $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ .





## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

Définition II (Inverse d'une matrice) :

Une matrice carrée  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite **inversible** (ou régulière) si, et seulement si il existe une matrice carrée  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que :

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

Si  $A$  n'est pas inversible, on dit que la matrice  $A$  est **singulière**.

L'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est appelé le **groupe linéaire** d'ordre  $n$  sur  $\mathbb{K}$ . On le note  $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ .

**ATTENTION**

Par définition, une matrice inversible est nécessairement carrée !



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

### Définition II (Inverse d'une matrice) :

Une matrice carrée  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite **inversible** (ou régulière) si, et seulement si il existe une matrice carrée  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que :

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

Si  $A$  n'est pas inversible, on dit que la matrice  $A$  est **singulière**.

L'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est appelé le **groupe linéaire** d'ordre  $n$  sur  $\mathbb{K}$ . On le note  $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ .

**Remarques** : Une matrice  $B$  telle que  $AB = I_n$  s'appelle un **inverse à droite** de  $A$ . Une matrice  $B'$  telle que  $B'A = I_n$  s'appelle un **inverse à gauche** de  $A$ . S'ils existent, un inverse à droite et un inverse à gauche sont nécessairement égaux.



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

Exemples 17 :

- Les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  sont inverses l'une de l'autre.



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

Exemples 17 :

■ Les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  sont inverses

l'une de l'autre.

■  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{G}l_2(\mathbb{K})$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

Proposition 10 :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Si  $A$  est inversible alors sa matrice inverse est unique. On la note  $A^{-1}$ .



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

Proposition 10 :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Si  $A$  est inversible alors sa matrice inverse est unique. On la note  $A^{-1}$ .

Remarque : C'est un fait général pour tout monoïde associatif.



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

Exemples 18 :

- La matrice  $I_n$  est inversible avec  $I_n^{-1} = I_n$ .



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

Exemples 18 :

- La matrice  $I_n$  est inversible avec  $I_n^{-1} = I_n$ .
- La matrice nulle  $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$  n'est pas inversible.





## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

### Exemples 18 :

- La matrice  $I_n$  est inversible avec  $I_n^{-1} = I_n$ .
- La matrice nulle  $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$  n'est pas inversible.
- $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \lambda A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$  et, dans ce cas,  $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$ .



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

### Exemples 18 :

- La matrice  $I_n$  est inversible avec  $I_n^{-1} = I_n$ .
- La matrice nulle  $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$  n'est pas inversible.
- $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \lambda A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$  et, dans ce cas,  $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$ .
- Une matrice nilpotente n'est pas inversible.



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

### Exemples 18 :

- La matrice  $I_n$  est inversible avec  $I_n^{-1} = I_n$ .
- La matrice nulle  $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$  n'est pas inversible.
- $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \lambda A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$  et, dans ce cas,  $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$ .
- Une matrice nilpotente n'est pas inversible.
- On retrouve la définition de l'inverse d'un réel  $x$  non nul *i.e.* le nombre  $x^{-1} = \frac{1}{x}$  tel que  $x \times \frac{1}{x} = 1$ . La matrice unité  $I_n$  joue ici le rôle du 1 dans  $\mathbb{R}$ .



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

### Exemples 18 :

- La matrice  $I_n$  est inversible avec  $I_n^{-1} = I_n$ .
- La matrice nulle  $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$  n'est pas inversible.
- $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \lambda A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$  et, dans ce cas,  $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$ .
- Une matrice nilpotente n'est pas inversible.
- On retrouve la définition de l'inverse d'un réel  $x$  non nul *i.e.* le nombre  $x^{-1} = \frac{1}{x}$  tel que  $x \times \frac{1}{x} = 1$ . La matrice unité  $I_n$  joue ici le rôle du 1 dans  $\mathbb{R}$ .

### ATTENTION

Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , à la différence de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , il existe des matrices non nulles comme  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  qui ne sont pas inversibles.



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

Exercice 13 :

Montrer que toute matrice carrée qui possède une ligne ou une colonne nulle  
N'est PAS inversible.



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

### Exercice 13 :

Montrer que toute matrice carrée qui possède une ligne ou une colonne nulle  
N'est PAS inversible.

### Exemple 19 :

$$A = \begin{pmatrix} i & 4 & 0 \\ 2+i & 5i & 0 \\ 3-i & 6 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{G}l_3(\mathbb{C}).$$



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

Exercice 14 :

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- 1 Calculer  $A^2 - 5A$ .
- 2 En déduire que  $A \in \mathcal{G}l_3(\mathbb{K})$  et calculer  $A^{-1}$ .



## IV. Matrices inversibles et $Gl_n(\mathbb{K})$

Exercice 14 :

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1 Calculer  $A^2 - 5A$ .
- 2 En déduire que  $A \in Gl_3(\mathbb{K})$  et calculer  $A^{-1}$ .

**Remarque** : Le polynôme  $P(X) = X^2 - 5X + 6$  est appelé **polynôme annulateur** de la matrice  $A$ . Une matrice donnée, l'existence d'un polynôme annulateur de valuation nulle (*i.e.* le monôme de plus bas degré est une constante) assure qu'elle soit inversible :

S'il existe  $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$  avec  $a_0 \neq 0$  tel que  $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n}$  alors  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0} (a_n A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \dots + a_1 I).$$





## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

### Méthode 2 :

Soit  $A$  une matrice et  $P$  un polynôme annulateur de  $A$  dont le terme constant est non nul. Alors,

- $A$  est inversible,
- On trouve l'expression de  $A^{-1}$  à partir de l'expression  $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$  en isolant le multiple de  $I_n$  et en factorisant par  $A$ .



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

**Théorème II (Opérations sur les matrices inversibles) :**

Soient  $A, B \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ .

Involutivité :  $A^{-1}$  est inversible et  $(A^{-1})^{-1} = A$ .



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

**Théorème II (Opérations sur les matrices inversibles) :**

Soient  $A, B \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ .

Involutivité :  $A^{-1}$  est inversible et  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

Produit :  $AB$  est inversible et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

**Théorème II (Opérations sur les matrices inversibles) :**

Soient  $A, B \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ .

Involutivité :  $A^{-1}$  est inversible et  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

Produit :  $AB$  est inversible et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

Puissance : Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $A^k$  est inversible et  $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ .



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

**Théorème II (Opérations sur les matrices inversibles) :**

Soient  $A, B \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ .

Involutivité :  $A^{-1}$  est inversible et  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

Produit :  $AB$  est inversible et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

Puissance : Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $A^k$  est inversible et  $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ .

Transposition :  $A^\top$  est inversible et  $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$ .



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

**Théorème II (Opérations sur les matrices inversibles) :**

Soient  $A, B \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ .

Involutivité :  $A^{-1}$  est inversible et  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

Produit :  $AB$  est inversible et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

Puissance : Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $A^k$  est inversible et  $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ .

Transposition :  $A^\top$  est inversible et  $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$ .

On retiendra donc que  $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$  est stable par inverse et produit :  $(\mathcal{G}l_n(\mathbb{K}), \times)$  est, comme son nom l'indique, un groupe.



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

### ATTENTION

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}.$$

Rappelez vous que la multiplication dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  n'est pas commutative :

$$(A^{-1}B^{-1})(AB) \text{ ne donne rien.}$$



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

### ATTENTION

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}.$$

Rappelez vous que la multiplication dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  n'est pas commutative :

$$(A^{-1}B^{-1})(AB) \text{ ne donne rien.}$$

### ATTENTION

A et B inversible  ~~$\Rightarrow$~~  A + B inversible.





## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

### 1. Inversibilité des matrices d'ordre 2

Définition 12 (Déterminant d'une matrice) :

Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  une matrice carrée d'ordre 2, on appelle **déterminant** de la matrice  $A$ , noté  $\det(A)$ , le scalaire tel que :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ alors } \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

### 1. Inversibilité des matrices d'ordre 2

Définition 12 (Déterminant d'une matrice) :

Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  une matrice carrée d'ordre 2, on appelle **déterminant** de la matrice  $A$ , noté  $\det(A)$ , le scalaire tel que :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ alors } \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemple 20 :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ alors } \det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 1 - 2 \times 3 = -2.$$



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

### 1. Inversibilité des matrices d'ordre 2

**Théorème 12 (Inverse d'une matrice d'ordre 2) :**

Une matrice carrée d'ordre deux est inversible si, et seulement si son déterminant est différent de 0.

$$\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), A^{-1} \text{ existe} \iff \det(A) \neq 0.$$

On a alors :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ alors } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (1)$$



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

### 1. Inversibilité des matrices d'ordre 2

Exemple 21 :

Déterminer la matrice inverse de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- 1 On calcule :  $\det(A) = 4 \times 1 - 2 \times 3 = -2 \neq 0$  donc la matrice  $A$  est inversible.



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

### 1. Inversibilité des matrices d'ordre 2

Exemple 21 :

Déterminer la matrice inverse de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- ① On calcule :  $\det(A) = 4 \times 1 - 2 \times 3 = -2 \neq 0$  donc la matrice  $A$  est inversible.
- ② La condition d'inversibilité remplie, on applique la formule (1) :

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

### 1. Inversibilité des matrices d'ordre 2

#### Exercice 15 :

- ❶ Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ . On pose  $D = P^{-1}MP$ .  
Montrer que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $M^k = PD^kP^{-1}$ .



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

### 1. Inversibilité des matrices d'ordre 2

#### Exercice 15 :

- 1 Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ . On pose  $D = P^{-1}MP$ .  
Montrer que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $M^k = PD^kP^{-1}$ .
- 2 Soient  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .  
Déterminer  $P^{-1}$  et calculer  $D = P^{-1}MP$ .



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

### 1. Inversibilité des matrices d'ordre 2

#### Exercice 15 :

- 1 Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ . On pose  $D = P^{-1}MP$ .  
Montrer que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $M^k = PD^kP^{-1}$ .
- 2 Soient  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .  
Déterminer  $P^{-1}$  et calculer  $D = P^{-1}MP$ .
- 3 Calculer  $M^k$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .





## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

### 1. Inversibilité des matrices d'ordre 2

Méthode 3 :

- Si  $D$  est diagonale avec  $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  alors

$$D^k = \text{diag}(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k).$$



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

### 1. Inversibilité des matrices d'ordre 2

Méthode 3 :

- Si  $D$  est diagonale avec  $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  alors

$$D^k = \text{diag}(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k).$$

- Si  $A$  est semblable à une matrice diagonale i.e.  $\exists P \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$  telle que  $A = PDP^{-1}$ , alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k = PD^kP^{-1}.$$



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

### 2. Inversibilité des matrices diagonales et triangulaires

**Théorème 13 (Matrice diagonale) :**

Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1 \in \mathbb{K}$ , alors :  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$  est inversible si, et seulement si

$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \alpha_i \neq 0$  et alors :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n^{-1} \end{pmatrix}.$$



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

### 2. Inversibilité des matrices diagonales et triangulaires

#### Théorème 14 (Matrice triangulaire) :

Une matrice triangulaire  $A$  est inversible si, et seulement si ses coefficients diagonaux sont **tous** non nuls.

Dans ce cas,  $A^{-1}$  est aussi triangulaire de même type et ses coefficients diagonaux sont exactement les inverses des coefficients diagonaux de  $A$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \times & \times & \times \\ 0 & a_{22} & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & \times & \times & \times \\ 0 & a_{22}^{-1} & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}.$$



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

### 3. Trace d'une matrice

La notion de trace vous paraîtra un peu anecdotique pour le moment mais elle est très importante, alors autant l'introduire tout de suite.

Définition 13 (Trace d'une matrice carrée) :

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On appelle **trace** de  $A$  et on note  $\text{tr}(A)$  la somme des éléments diagonaux de  $A$  :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$



## IV. Matrices inversibles et $Gl_n(\mathbb{K})$

### 3. Trace d'une matrice

La notion de trace vous paraîtra un peu anecdotique pour le moment mais elle est très importante, alors autant l'introduire tout de suite.

Définition 13 (Trace d'une matrice carrée) :

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On appelle **trace** de  $A$  et on note  $\text{tr}(A)$  la somme des éléments diagonaux de  $A$  :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Exemples 2.2 :

- $\text{tr}(I_n) = n$ .

## IV. Matrices inversibles et $Gl_n(\mathbb{K})$

### 3. Trace d'une matrice

La notion de trace vous paraîtra un peu anecdotique pour le moment mais elle est très importante, alors autant l'introduire tout de suite.

**Définition 13** (Trace d'une matrice carrée) :

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On appelle **trace** de  $A$  et on note  $\text{tr}(A)$  la somme des éléments diagonaux de  $A$  :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

**Exemples 2.2 :**

■  $\text{tr}(I_n) = n$ .

■ Si  $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 2 & -1 & 14 \\ 5 & 9 & 13 \end{pmatrix}$  alors  $\text{tr}(A) = -4 - 1 + 13 = 8$ .

## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

### 3. Trace d'une matrice

La notion de trace vous paraîtra un peu anecdotique pour le moment mais elle est très importante, alors autant l'introduire tout de suite.

**Définition 13** (Trace d'une matrice carrée) :

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On appelle **trace** de  $A$  et on note  $\text{tr}(A)$  la somme des éléments diagonaux de  $A$  :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

**Exemples 22** :

■  $\text{tr}(I_n) = n$ .

■ Si  $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 2 & -1 & 14 \\ 5 & 9 & 13 \end{pmatrix}$  alors  $\text{tr}(A) = -4 - 1 + 13 = 8$ .

■ Si  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\text{tr}(A) = 0$ .



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

### 3. Trace d'une matrice

Proposition 15 (Propriété de la trace) :

Linéarité : Pour tous  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\text{tr}(\lambda A + B) = \lambda \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ .



## IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

### 3. Trace d'une matrice

Proposition 15 (Propriété de la trace) :

Linéarité : Pour tous  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\text{tr}(\lambda A + B) = \lambda \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ .

Produit : Pour tous  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ ,  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .



## IV. Matrices inversibles et $Gl_n(\mathbb{K})$

### 3. Trace d'une matrice

Remarques :

- Lorsque qu'une matrice A est **semblable** à une matrice B *i.e.* il existe une matrice P inversible, dite de **passage**, telle que  $A = P^{-1}BP$ , on a alors :

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(P^{-1}BP) = \text{tr}((P^{-1}P)B) = \text{tr}(B).$$

On dit, pour cela, que la trace est un **invariant de similitude**.



## IV. Matrices inversibles et $Gl_n(\mathbb{K})$

### 3. Trace d'une matrice

Remarques :

- Lorsque qu'une matrice A est **semblable** à une matrice B *i.e.* il existe une matrice P inversible, dite de **passage**, telle que  $A = P^{-1}BP$ , on a alors :

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(P^{-1}BP) = \text{tr}((P^{-1}P)B) = \text{tr}(B).$$

On dit, pour cela, que la trace est un **invariant de similitude**.

- C'est ce résultat qui motive la **définition (11)** seulement sur les matrices carrées.

En effet, soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  une matrice rectangulaire. Si rien n'empêche, en théorie, de définir un inverse B  $\in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  de A à partir des relations  $AB = I_n$  et  $BA = I_p$ , on aurait cependant un petit soucis car :

$$n = \text{tr}(I_n) = \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) = \text{tr}(I_p) = p.$$



## IV. Matrices inversibles et $Gl_n(\mathbb{K})$

### 3. Trace d'une matrice

Remarques :

- Lorsque qu'une matrice A est **semblable** à une matrice B *i.e.* il existe une matrice P inversible, dite de **passage**, telle que  $A = P^{-1}BP$ , on a alors :

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(P^{-1}BP) = \text{tr}((P^{-1}P)B) = \text{tr}(B).$$

On dit, pour cela, que la trace est un **invariant de similitude**.

- C'est ce résultat qui motive la **définition (11)** seulement sur les matrices carrées.

En effet, soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  une matrice rectangulaire. Si rien n'empêche, en théorie, de définir un inverse B  $\in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  de A à partir des relations  $AB = I_n$  et  $BA = I_p$ , on aurait cependant un petit soucis car :

$$n = \text{tr}(I_n) = \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) = \text{tr}(I_p) = p.$$

Exemple 23 :

L'équation matricielle  $AB - BA = I_n$  d'inconnue  $(A; B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$  n'a pas de solution car pour toutes matrices A, B de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :

$$\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0 \neq n = \text{tr}(I_n).$$