Fichiers Geometrie-Espace-Metrique a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Soient $\mathrm{A}(1,2,-1)$, $\mathrm{B}(-1,1,0)$, $\mathrm{C}(0,1,2)$.

Déterminer l'aire du triangle ABC.

Correction : $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\| = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$.

Exercice 2 : Soient $\mathrm{A}(1,2,3)$, $\mathrm{B}(3,-1,-1)$, $\mathrm{C}(2,0,1)$ et $\mathrm{D}(1,1,2)$. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

Correction : $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} \times h = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2}\mathcal{A}_{\mathrm{ABA'C}} \times h = \dfrac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)\right| = \dfrac{1}{6}$.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Montrer que $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}$.

Exercice 2 : Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ quatre points de l'espace tels que (AB) et (CD) sont sécantes en I.

Déterminer le lieu des points M vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \overrightarrow{\mathrm{MC}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{MD}}$.

Exercice 3 : Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

1. Montrer l'inégalité de Hadamard :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \leqslant \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|.$$

2. Montrer l'identité de Lagrange :

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 + \|(\vec{u} \wedge \vec{v})\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2.$$

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Dans une base orthonormée directe $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère un vecteur $\vec{u}$ unitaire.

Calculer $||\vec{u} \wedge \vec{\imath}||^2 + ||\vec{u} \wedge \vec{\jmath}||^2 + ||\vec{u} \wedge \vec{k}||^2$.

En déduire que l'une des trois normes est supérieure ou égale à $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Correction : En posant $\vec{u}(x,y,z)$, $\vec{u} \wedge \vec{\imath} = -y\vec{k} + z\vec{\jmath}$. D'où $||\vec{u} \wedge \vec{\imath}||^2 = y^2 + z^2$. Idem pour les autres.

$||\vec{u} \wedge \vec{\imath}||^2 + ||\vec{u} \wedge \vec{\jmath}||^2 + ||\vec{u} \wedge \vec{k}||^2 = 2(x^2+y^2+z^2) = 2$.

Si les trois normes étaient strictement inférieures à $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, leurs carrés seraient $< \dfrac{2}{3}$ et leur somme < 2. Absurde.

Exercice 2 : Soient A, B, C, D non coplanaires.

Donner la nature de l'ensemble $S = \left\{M / (\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}) = \vec{0}\right\}$.

Correction : Si $\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$ donc orthogonal à $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MD}$.

Mais $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$ est aussi orthogonal à $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$, donc $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Par conséquent, $S = (AB) \cup (CD)$.

Exercice 3 : On donne un tétraèdre régulier $ABCD$ de centre O.

Calculer $\lambda = \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$.

Correction : Posons a le côté du tétraèdre.

On a d'une part $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \lambda OA.OB$.

D'autre part, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OA}^2 - (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2\right] = \frac{1}{2}(OB^2 + OA^2 - AB^2)$.

On remarque que O est situé aux $\frac{3}{4}$ de la médiane (isobarycentre).

Donc $OA = OB = \frac{3}{4}h$, où h est la hauteur du tétraèdre.

Si on appelle G le centre de gravité de BCD, on a $(AG) \perp (BCD)$.

Donc $AG^2 + GB^2 = AB^2$ puis $h^2 + \left(\frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2$ puis $h^2 + \frac{a^2}{3} = a^2$ donc $h = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. D'où $OA = OB = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a$.

Finalement : $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a \times \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a \times \lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}a^2 + \frac{3}{8}a^2 - a^2\right)$, $\frac{3}{8}a^2\lambda = -\frac{1}{8}a^2$ et $xed\lambda = -\frac{1}{3}$.

L'angle au centre d'un tétraèdre régulier est $\arccos\frac{-1}{3} \approx 109,47°$.