Fichiers Geometrie-Espace-Plans a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Dans un repère, on considère A $(-1\,;1\,;2)$, $\vec{u}\,(1\,;0\,;1)$ et $\vec{v}\left(\frac{1}{2}\,;-1\,;1\right)$.

1. Donner une représentation paramétrique du plan $(\mathrm{A}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.
2. Déterminer l'intersection $(\mathscr{D})$ de ce plan et du plan $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. On précisera un point et un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$.

Aide : Le plan $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ a pour équation $z=0$.

Exercice 2 : On considère les points A$(-3\ ;\ 2\ ;\ 4)$, B$(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et C$(-5\ ;\ 4\ ;\ 6)$.

Vérifier que A, B et C définissent un plan et écrire une représentation paramétrique du plan (ABC).

Correction : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(2\ ;\ -1\ ;\ -4)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}(-2\ ;\ 2\ ;\ 2)$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

Ils définissent donc un plan dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

Une représentation paramétrique du plan (ABC) est donc $\begin{cases} x=-3+2t-2t' \\ y=2-t+2t' \\ z=4-4t+2t' \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ et $t'\in\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Soit $(\mathscr{P})$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=3-t+5t' \\ y=1+t' \\ z=-5t+3t' \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R},\ t'\in\mathbb{R}.$$

1. Donner les coordonnées d'un couple de vecteurs directeurs de$(\mathscr{P})$ et un point de $(\mathscr{P})$.
2. Le point M$(6\,;2\,;-6)$ appartient-il à $(\mathscr{P})$?
3. Donner les coordonnées de trois points de $(\mathscr{P})$.
4. Déterminer une autre représentation paramétrique de $(\mathscr{P})$.

Exercice 4 : Soient A$(-4\,;1\,;2)$; B$(-1\,;2\,;\ 5)$ et C$(1\,;0\,;6)$.

1. Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
3. Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC).
4. Démontrer que le point D$(-3\,;-4\,;1)$ appartient au plan (ABC).
5. Déterminer une autre représentation paramétrique du plan (ABC).

Exercice 5 : Donner une représentation paramétrique des plans suivants :

1. Le plan $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$;
2. Le plan $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{k})$;
3. Le plan $(\mathrm{O}\,;\vec{j},\vec{k})$.

Exercice 6 : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$, on considère les deux points $\mathrm{A}(1\,;2\,;1)$, $\mathrm{B}(4\,;6\,;3)$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissent bien un plan.
2. Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est un vecteur normal à ce plan.

Exercice 7 : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$, on considère les quatre points $\mathrm{A}(-1\,;1\,;2)$, $\mathrm{B}(1\,;0\,;-1)$, $\mathrm{C}(0\,;3\,;1)$ et $\mathrm{D}(-8\,;2\,;-3)$.

1. Démontrer que les points A, B et C définissent bien un plan.
2. Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ est un vecteur normal à ce plan.

Exercice 8 : Soit un plan $(\mathscr{P})$ défini par la représentation paramétrique suivante :

$$(\mathscr{P}) : \begin{cases} x = 2 + 3t + s \\ y = -1 - t + 5s \\ z = 4 + t - s \end{cases},\ (t\,;s) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Donner deux vecteurs directeurs de $(\mathscr{P})$.
2. Donner un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.

Exercice 9 : Soit un plan $(\mathscr{P})$ défini par la représentation paramétrique suivante :

$$(\mathscr{P}) : \begin{cases} x = 2 + 3t + s \\ y = -1 - t + 5s \\ z = 4 + t - s \end{cases},\ (t\,;s) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Donner deux vecteurs directeurs de $(\mathscr{P})$.
2. Donner un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.

Correction :

1. $(\mathscr{P})$ est dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix}$.
2. Les coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ de $\vec{n}$ doivent donc vérifier le système :

$$\begin{cases} \vec{n}.\vec{u} = 0 \\ \vec{n}.\vec{v} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3a - b + c = 0 \\ a + 5b - c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -a \\ c = -4a \end{cases}$$

Faisant jouer à a, par exemple, le rôle du paramètre t. Le vecteur $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$ sera un vecteur normal à $(\mathscr{P})$ si, et seulement si ses coordonnées peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} a = t \\ b = -t \\ c = -4t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$ [1]

Réciproquement, il est clair que de tels vecteurs sont normaux à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donc à $(\mathscr{P})$ d'après la définition (??) .

On pourra vérifier, par exemple, que les vecteurs $\overrightarrow{n_1}\,(1\,;-1\,;-4)$, $\overrightarrow{n_2}\left(\sqrt{2}\,;-\sqrt{2}\,;-4\sqrt{2}\right)$ ou encore $\overrightarrow{n_3}\,(-1\,;1\,;4)$ sont colinéaires et orthogonaux à $(\mathscr{P})$.

Exercice 10 : Déterminer une équation cartésienne d'un plan $(\mathscr{P})$ de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par un point A :

$$\mathrm{A}\left(\sqrt{2}\,;-2\,;5\right) \quad \text{et} \quad \vec{n}\,(2\,;-3\,;-1)\,.$$

Correction : L'équation est tout de suite de la forme :

$$2x-3y-z+d=0.$$

Reste à trouver d. La méthode est la même que pour les équations de droites dans le plan :

Un point appartient à un plan si, et seulement si ses coordonnées vérifient son équation ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned}\mathrm{A}\left(\sqrt{2}\,;-2\,;5\right)\in(\mathscr{P}) \iff 2\sqrt{2}-3\times(-2)-5+d&=0\\ 2\sqrt{2}+1+d&=0\\ d&=-1-2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Donc $(\mathscr{P}):\ 2x-3y-z-1-2\sqrt{2}=0$.

Exercice 11 : Trouver une équation cartésienne du plan $(\mathscr{Q})$ parallèle à un plan $(\mathscr{P})$ et passant par un point A :

$$\mathrm{A}\,(3\,;-1\,;0) \quad \text{et} \quad (\mathscr{P}):\ 2x-y+3z=0.$$

Correction : Pour définir, un plan, il suffit de trouver un vecteur normal et un point appartenant à ce plan. Pour le point, celui-ci est donné, pour le vecteur normal, celui de $(\mathscr{P})$ convient. On obtient donc, en deux temps :

$$(\mathscr{Q}):\ 2x-3y-1+d=0.$$

Puis $\mathrm{A}\,(3\,;-1\,;0)\in(\mathscr{Q}) \iff 2\times3-3\times(-1)+0+d=0$

$$\begin{aligned}9+d&=0\\ d&=-9.\end{aligned}$$

Donc $(\mathscr{Q}):\ 2x-3y-z-9=0$.

Exercice 12 : Déterminer une équation cartésienne d'un plan $(\mathscr{P})$ passant par un point A et dirigé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\mathrm{A}\,(1\,;2\,;3)\,,\quad \vec{u}\,(1\,;-1\,;2) \quad \text{et} \quad \vec{v}\,(1\,;0\,;3)\,.$$

Correction : Tout d'abord bien s'assurer que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires même si non demandé. C'est bien le cas, leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

[1]. Une droite vectorielle dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}$.

Une équation paramétrique de $(\mathscr{P})$ est alors :

$$(\mathscr{P}) : \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t + 3s \end{cases}, \ (t\,;s) \in \mathbb{R}^2.$$

Une des méthodes pour obtenir une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de faire disparaître les deux paramètres s et t par des combinaisons linéaires sur x, y et z :

$$(\mathscr{P}) : \begin{cases} x + y = 3 + s \\ z - 2x = 1 + s \end{cases}, \ (t\,;s) \in \mathbb{R}^2.$$

$$(\mathscr{P}) : \quad x + y - z - (-2x) = 3 + \cancel{s} - (1 + \cancel{s})$$
$$(\mathscr{P}) : \quad 3x + y - z - 2 = 0.$$

Une autre méthode est de chercher directement un vecteur $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ i.e. dont les coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} \vec{n}.\vec{u} = 0 \\ \vec{n}.\vec{v} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ a + 3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -c \\ a = -3c \end{cases}$$

Aucune condition ne porte sur le paramètre c. On choisit $c = -1$, d'où $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et l'équation de $(\mathscr{P})$ est $3x + y - z + d = 0$. On trouve d de la même manière que précédemment.

Remarque : Suivant la valeur attribuée à c, on trouve une infinité de vecteurs colinéaires à $\vec{n}$ et normaux à $(\mathscr{P})$.

Exercice 13 : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par $\mathrm{A}(-1\,;2\,;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Correction : $(\mathscr{P}) : x + 2y - 3z + d = 0$, $d \in \mathbb{R}$.
$\mathrm{A} \in (\mathscr{P})$ donc $-1 + 4 + 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -6$ et donc $(\mathscr{P}) : x + 2y - 3z - 6 = 0$.

Exercice 14 : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par $\mathrm{A}(1\,;4\,;-5)$ et le vecteur $\vec{n} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

Exercice 15 : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par $\mathrm{A}\left(\sqrt{2}\,;2\,;-\sqrt{3}\right)$ et le vecteur $\vec{n} = \sqrt{3}\vec{i} - \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$.

Exercice 16 : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, donner l'équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par les points $\mathrm{A}(5\,;-4\,;1)$, $\mathrm{B}(6\,;3\,;9)$ et $\mathrm{C}(-8\,;1\,;7)$.

Exercice 17 : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, donner l'équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par les points $\mathrm{A}(3\,;4\,;5)$, $\mathrm{B}(4\,;-2\,;7)$ et $\mathrm{C}(5\,;-8\,;9)$.

Exercice 18 : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, donner l'équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par les points $\mathrm{A}(-1\,;7\,;4)$, $\mathrm{B}(-2\,;10\,;5)$ et $\mathrm{C}(3\,;6\,;-1)$.

Exercice 19 : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la représentation paramétrique suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-s+4t \\ y & = & 2+2s-t \\ y & = & -1+s+2t \end{array}\right. , \quad s\in\mathbb{R}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

1. Cette représentation paramétrique définit-elle un plan ?
2. Si oui, en déterminer une équation cartésienne.

Exercice 20 : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la représentation paramétrique suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -5+2s-4t \\ y & = & 7-3s+6t \\ y & = & \sqrt{2}-s+2t \end{array}\right. \quad (s\,;t)\in\mathbb{R}^2.$$

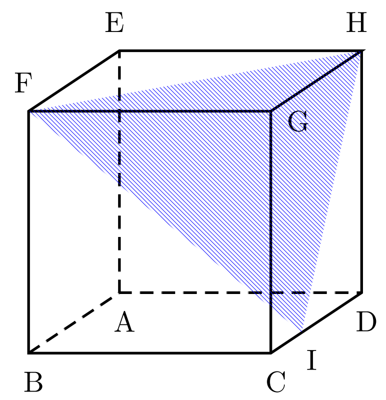
1. Cette représentation paramétrique définit-elle un plan ?
2. Si oui, en déterminer une équation cartésienne.

Exercice 21 : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la représentation paramétrique suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4s-t \\ y & = & -1-2s+t \\ y & = & 5+s+t \end{array}\right. \quad (s\,;t)\in\mathbb{R}^2.$$

1. Cette représentation paramétrique définit-elle un plan ?
2. Si oui, en déterminer une équation cartésienne.

Exercice 22 : On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1 et le point I tel que $3\overrightarrow{\mathrm{DI}}=2\overrightarrow{\mathrm{DC}}$.



Déterminer une équation cartésienne du plan (FHI).

Exercice 23 : On considère $\mathcal{D}:\begin{cases} x=y+1 \\ z=y \end{cases}$ et A(1, 1, 1).

Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ orthogonal à $\mathcal{D}$ et passant par A.

Correction : $\mathcal{P}: x+y+z=3$

Exercice de difficulté moyenne :

Exercice 1 : On considère les points $A(1,2,-1)$, $B(3,2,0)$, $C(2,1,-1)$, $D(1,0,4)$ et $E(-1,1,1)$.
Déterminer un vecteur directeur de la droite $(ABC)\cap(ADE)$.

Correction : $(ABC) : x+y-2z=5$ et $(ADE) : -x+10y+4z=15$. Donc un vecteur directeur de $(ABC)\cap(ADE)$ est $\vec{u}(24,-2,11)$

Exercice 2 : Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur d'un segment [AB] :

$$A\,(-1\,;1\,;0) \qquad \text{et} \qquad B\,(2\,;1\,;-1)\,.$$

Correction : Le plan médiateur du segment [AB] est l'ensemble des points équidistants des extrémités A et B. C'est donc le plan passant le milieu de [AB] et orthogonal au segment [AB] i.e. de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$:

Les coordonnées du milieu I de [AB] sont $\begin{pmatrix} \dfrac{x_A+x_B}{2} \\ \dfrac{y_A+y_B}{2} \\ \dfrac{z_A+z_B}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Le plan médiateur $(\mathscr{M})$ a donc pour équation : $3x-z+d=0$.

Puis, toujours par le même raisonnement :

$$\begin{aligned} I\left(\frac{1}{2}\,;1\,;-\frac{1}{2}\right)\in(\mathscr{M}) \iff 3\times\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)+d&=0 \\ 2+d&=0 \\ d&=-2. \end{aligned}$$

Donc $(\mathscr{M}) :\ 3x-z-2=0$.

Exercice 3 : Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère : $\mathcal{D}\begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=3-t \end{cases}$ et $A(5,0,2)$.

Déterminer une équation du plan passant par A et contenant $\mathcal{D}$.

Correction : $B(1,0,3)$ est un point de $\mathcal{D}$. Le plan cherché $\mathcal{P}$ contient A et il est dirigé par $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$M(x,y,z)\in\mathcal{P} \iff \begin{vmatrix} x-5 & 2 & -4 \\ y & 1 & 0 \\ z-2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \iff x+2y+4z=13.$$

Exercice 4 : On considère $A(1,-1,0)$, $B(1,2,1)$, $C(1,4,0)$, $E(1,-1,3)$, $\vec{u}(2,1,-1)$, $\vec{v}(1,4,1)$.
Soient $\mathcal{P}=A+\mathbb{R}\vec{u}+\mathbb{R}\vec{v}$ et $\mathcal{P}'=(BCE)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
2. Déterminer $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.

Correction :

1. $\mathcal{P} : 5x - 3y + 7z = 8$.
2. $\mathcal{P}' : x = 1$. $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' : \begin{cases} x = 1 \\ -3y + 7z = 3 \end{cases}$ ou encore $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' : \begin{cases} x = 1 \\ y = 7t - 1 \\ z = 3t \end{cases}$.

Exercice 5 : On considère dans l'espace les droites : $\mathcal{D}_1 \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$ et $\mathcal{D}_2 \begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ x + y - 4z = -1 \end{cases}$

1. Montrer que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires.
2. Déterminer une équation du plan qui les contient.

Correction :

1. $\mathcal{D}_1$ est dirigée par $\vec{u}_1(2, 1, 1)$.

   $\mathcal{D}_2$ est dirigée par $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ qui a pour coordonnées $(1, 3, 1)$.

   $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles.

   Le point $\mathrm{A}(3, 0, 1)$ appartient à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Elles sont donc sécantes et par suite coplanaires.
2. Le plan qui les contient est le plan passant par A et dirigé par $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

$$\begin{vmatrix} x-3 & 2 & 1 \\ y & 1 & 3 \\ z-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -2(x-3) - y + 5(z-1) = 0 \iff -2x - y + 5z + 1 = 0$$

Exercice 6 : On considère $\mathcal{P} : x + y + z + 1 = 0$ et $\mathcal{P}' : x + 2z = 1$, et $\mathrm{B}(1, 0, 0)$.
Déterminer une équation cartésienne du plan Π perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ passant par B.

Correction : Π est dirigé par $\vec{u}(1, 1, 1)$ et $\vec{v}(1, 0, 2)$. Donc $\Pi : 2x - y - z = 2$.

Exercice 7 : Montrer que les droites suivantes sont coplanaires et déterminer une équation du plan qui les contient.

$\mathcal{D}_1 \begin{cases} x = 2 - z \\ y = -1 - 3z \end{cases}$ et $\mathcal{D}_2 \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x + 3y - 2z = 7 \end{cases}$.

Exercice 8 : On considère les droites $\mathcal{D}_1 = \mathrm{A} + \mathbb{R}\vec{u}$ avec $\mathrm{A}(1, 1, 3)$ et $\vec{u}(2, -1, 3)$. $\mathcal{D}_2 \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.

Déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$) contenant $\mathcal{D}_1$ (resp. $\mathcal{D}_2$) parallèle à $\mathcal{D}_2$ (resp. $\mathcal{D}_1$).

Exercice 9 : Soit $(\mathscr{P})$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t - 2t' \\ y = 1 + 3t + t' \\ z = 2 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}.$$

Déterminer la nature de $(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{P}')$ dans chacun des cas suivants où $(\mathscr{P}')$ est définie par une représentation paramétrique :

1 $\begin{cases} x = -2 - 3t - t' \\ y = 2 - 2t + 4t' \\ z = 2 + 5t - 5t' \end{cases}$ 2 $\begin{cases} x = -3 + 2t + t' \\ y = 2 - t + 2t' \\ z = 1 + t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R},\ t' \in \mathbb{R}.$

Exercice 10 : Soit $(\mathscr{P})$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t - 2t' \\ y = 1 + 3t + t' \\ z = 2 - 5t \end{cases} ,\ t \in \mathbb{R},\ t' \in \mathbb{R}.$$

Déterminer la nature de $(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{P}')$ dans chacun des cas suivants où $(\mathscr{P}')$ est définie par une représentation paramétrique :

1 $\begin{cases} x = 4 - 3t + 5t' \\ y = -2t + t' \\ z = 5 + 5t - 5t' \end{cases}$ 2 $\begin{cases} x = -3 + 2t + t' \\ y = 2 - t + 2t' \\ z = 1 + t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R},\ t' \in \mathbb{R}.$

Exercice 11 : Soit $(\mathscr{P})$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4 - t + 3t' \\ y = 1 - t + 5t' \\ z = t - t' \end{cases} ,\ t \in \mathbb{R},\ t' \in \mathbb{R}.$$

Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection de $(\mathscr{P})$ et du plan :

1 $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$ 2 $(\mathrm{O}\,;\vec{j},\vec{k})$

Correction :

1 On sait que le plan $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = r \\ y = r' \\ z = 0 \end{cases} ,\ (r\,;r') \in \mathbb{R}^2.$$

Un point $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ appartiendra aux deux plans si, et seulement si ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} r = 4 - t + 3t' \\ r' = 1 - t + 5t' \\ 0 = t - t' \end{cases} \iff \begin{cases} r = 4 - t + 3t' \\ r' = 1 - t + 5t' \\ t = t' \end{cases} \iff \begin{cases} x = r = 4 + 2t \\ y = r' = 1 + 4t \\ t = t' \end{cases}$$

Conclusion, les coordonnées de $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ vérifient le système $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 0 \end{cases} ,\ t \in \mathbb{R}.$

C'est la droite passant par $\mathrm{A}\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

2 Enfin, avec le système :

$$\begin{cases} 0 = 4 - t + 3t' \\ r = 1 - t + 5t' \\ r' = t - t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = 4 + 3t' \\ r = 1 - t + 5t' \\ r' = t - t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = 4 + 3t' \\ r = -3 + 2t' \\ r' = 4 + 2t' \end{cases}$$

Les coordonnées de $\mathrm{M}(x\,;y\,;z)$ vérifient donc le système $\begin{cases} x=0 \\ y=-3+2t' \\ z=4+2t' \end{cases}$, $t'\in\mathbb{R}$.

C'est la droite passant par $\mathrm{C}\begin{pmatrix}0\\-3\\4\end{pmatrix}$ et dirigée par le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 12 : Soit $(\mathscr{P})$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=4-t+3t' \\ y=1-t+5t' \\ z=t-t' \end{cases}, t\in\mathbb{R},\ t'\in\mathbb{R}.$$

Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection de $(\mathscr{P})$ et du plan :

1. $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{k})$
2. $(\mathrm{O}\,;\vec{\jmath},\vec{k})$

Correction :

1. Le raisonnement est identique avec les représentations :

$$(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{k}) : \begin{cases} x=r \\ y=0 \\ z=r' \end{cases}, (r\,;r')\in\mathbb{R}^2 \text{ et } ((\mathscr{P})) : \begin{cases} x=4-t+3t' \\ y=1-t+5t' \\ z=t-t' \end{cases}, (t\,;t')\in\mathbb{R}^2.$$

On résout donc le système :

$$\begin{cases} r=4-t+3t' \\ 0=1-t+5t' \\ r'=t-t' \end{cases} \iff \begin{cases} r=4-t+3t' \\ t=1+5t' \\ r'=t-t' \end{cases} \iff \begin{cases} r=3-2t' \\ t=1+5t' \\ r'=1+4t' \end{cases}$$

Les coordonnées de $\mathrm{M}(x\,;y\,;z)$ vérifient donc le système $\begin{cases} x=3-2t' \\ y=0 \\ z=1+4t' \end{cases}$, $t'\in\mathbb{R}$.

C'est la droite passant par $\mathrm{B}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ et dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$.

2. Enfin, avec le système :

$$\begin{cases} 0=4-t+3t' \\ r=1-t+5t' \\ r'=t-t' \end{cases} \iff \begin{cases} t=4+3t' \\ r=1-t+5t' \\ r'=t-t' \end{cases} \iff \begin{cases} t=4+3t' \\ r=-3+2t' \\ r'=4+2t' \end{cases}$$

Les coordonnées de $\mathrm{M}(x\,;y\,;z)$ vérifient donc le système $\begin{cases} x=0 \\ y=-3+2t' \\ z=4+2t' \end{cases}$, $t'\in\mathbb{R}$.

C'est la droite passant par $\mathrm{C}\begin{pmatrix}0\\-3\\4\end{pmatrix}$ et dirigée par le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 13 : Déterminer une représentation paramétrique de l'intersection des plans suivants :

1. $(\mathscr{P}) : x - 3y + 2z - 5 = 0$ et $(\mathscr{P}') : 2x + y + 7z - 1 = 0$.
2. $(\mathscr{P}) : x - 2z - 1 = 0$ et $(\mathscr{P}') : y - 2z + 4 = 0$.

Correction : Les vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix}$ de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ ne sont pas colinéaires donc les plans sont sécants en une droite $(\mathscr{D})$.

L'idée est toujours la même : traduire au niveau des coordonnées les propriétés d'un point quelconque de la droite.

$$\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z) \in (\mathscr{D}) \iff \begin{cases} \mathrm{M} \in (\mathscr{P}) \\ \mathrm{M} \in (\mathscr{P}') \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3y + 2z - 5 = 0 & (\mathrm{L}_1) \\ 2x + y + 7z - 1 = 0 & (\mathrm{L}_2) \end{cases}$$

Étant donné que c'est un système à 3 inconnues pour deux équations, nous ne trouverons pas une solution unique. On exprime deux des inconnues en fonction de la troisième qui jouera le rôle du paramètre.

$$\begin{cases} 7x + 23z - 8 = 0 & (\mathrm{L}_1) + 3 \times (\mathrm{L}_2) \\ 7y + 3z + 9 = 0 & (\mathrm{L}_2) - 2 \times (\mathrm{L}_1) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{8}{7} - \dfrac{23}{7}z \\ y = -\dfrac{9}{7} - \dfrac{3}{7}z \end{cases}$$

En posant $z = t$, une représentation de $(\mathscr{D})$ peut être :

$$(\mathscr{D}) : \begin{cases} x = \dfrac{8}{7} - \dfrac{23}{7}t \\ y = -\dfrac{9}{7} - \dfrac{3}{7}t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 14 : Déterminer une représentation paramétrique de l'intersection des plans suivants :

1. $(\mathscr{P}) : x + y + 2z - 3 = 0$ et $(\mathscr{P}') : -x + 4y - 5z + 6 = 0$.
2. $(\mathscr{P}) : 2x - y - 2z - 1 = 0$ et $(\mathscr{P}') : -x + 4y + z - 3 = 0$.

Exercice 15 : Déterminer la position relative des plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives : $(\mathscr{P}_1) : 3x + 9y - 6z - 3 = 0$ et $(\mathscr{P}_2) : x + 3y - 2z - 1 = 0$.

Exercice 16 : Déterminer la position relative des plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives : $(\mathscr{P}_1) : x - y - 2z - 1 = 0$ et $(\mathscr{P}_2) : -2x + 2y + 4z + 4 = 0$.

Exercice 17 : Déterminer l'intersection éventuelle du plan $(\mathscr{P})$ d'équation $x + y + 3z - 1 = 0$ et de la droite $(\mathscr{D})$ de représentation paramétrique :

$$(\mathscr{D}) : \begin{cases} x = 6 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 18 : Déterminer l'intersection éventuelle de la droite (d) engendrée par $\mathrm{A}(6\,;-2\,;-3)$ et $\vec{u} = 5\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 6\vec{k}$ et le plan

$$(\mathscr{P}) : -5x - 7y + 10z + 6 = 0.$$

Exercice 19 : Déterminer l'intersection éventuelle de la droite (d) passant par les points $\mathrm{A}(-5\,;4\,;-3)$ et $\mathrm{B}(1\,;-2\,;3)$ et le plan

$$(\mathscr{P}) : x + y + 3z - 1 = 0.$$

Exercice 20 : Déterminer l'intersection éventuelle de la droite (d) passant par les points $\mathrm{A}(1\,;2\,;-1)$ et $\mathrm{B}(2\,;4\,;1)$ et le plan

$$(\mathscr{P}) : -\frac{4}{5}x - \frac{1}{10}y + \frac{1}{2}z - 2 = 0.$$

Exercice 21 : Déterminer l'intersection éventuelle de la droite (d) passant par les points $\mathrm{A}(2\,;4\,;5)$ et $\mathrm{B}(-2\,;0\,;3)$ et le plan

$$(\mathscr{P}) : \frac{1}{2}x - \frac{5}{6}y + \frac{2}{3}z - 1 = 0.$$

Exercice 22 : Déterminer l'intersection éventuelle de la droite (d) passant par les points $\mathrm{A}(2\,;-5\,;3)$ et $\mathrm{B}(-2\,;4\,;-8)$ et le plan $(\mathscr{P})$ passant par $\mathrm{C}(4\,;-1\,;2)$ et dirigé par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 23 : Soient $\mathrm{A}\,(-2\,;0\,;1)$, $\mathrm{B}\,(1\,;2\,;-1)$ et $\mathrm{C}\,(-2\,;2\,;2)$ trois points de l'espace muni d'un repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.
2. Soit $\mathrm{D}\,(-2\,;-1\,;0)$ et $\mathrm{E}\,(-2\,;5\,;2)$. Démontrer que la droite (DE) et le plan (ABC) sont sécants en un point I dont on déterminera les coordonnées.

Correction :

1. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent le plan (ABC).
2. Trouvons tout d'abord les représentations paramétriques
   - du plan (ABC) passant par $\mathrm{A}\,(-2\,;0\,;1)$ et dirigé par $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(3\,;2\,;-2)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,(0\,;2\,;1)$:
   $$(\mathrm{ABC}) : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2t + 2t' \\ z = 1 - 2t + t' \end{cases}, \quad (t\,;t') \in \mathbb{R}^2.$$
   - de la droite (ED) passant par $\mathrm{D}\,(-2\,;-1\,;0)$ et dirigée par $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\6\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$:
   $$(\mathrm{DE}) : \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3k \\ z = k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

   On résout alors le système formé des deux représentations :
   $$\begin{cases} -2 &= -2 + 3t \\ -1 + 3k &= 2t + 2t' \\ k &= 1 - 2t + t' \end{cases} \iff \begin{cases} t &= 0 \\ -1 + 3(1 + t') &= 2t' \\ k &= 1 + t' \end{cases} \iff \begin{cases} t &= 0 \\ t' &= -2 \\ k &= -1 \end{cases}$$

   La droite (DE) et le plan (ABC) sont donc sécants en $\mathrm{I}\begin{pmatrix}-2\\-1+3\times(-1)\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\-1\end{pmatrix}$.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : On considère $\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ et $\mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

Former un système d'équations cartésiennes de la droite $\mathcal{D}$ dirigée par $\vec{u}(1,2,3)$ et rencontrant les deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Correction : Comme $\mathcal{D}$ rencontre $\mathcal{D}_1$, on peut noter $\mathrm{A}_1(0,a,1)$ leur point d'intersection.

On peut alors poser $\mathcal{D} : \begin{cases} x = t \\ y = 2t + a \\ z = 3t + 1 \end{cases}$.

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t \\ y = 2t + a \\ z = 3x + 1 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} t = 1 \\ a = -2 \\ z = 4 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

D'où $\mathcal{D} : \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 2 \\ z = 3t + 1 \end{cases}$.

Exercice 2 : Déterminer l'intersection des plans $(\mathscr{P})$, $(\mathscr{Q})$ et $(\mathscr{R})$ avec : $(\mathscr{P}) : \; 3x+3y+z+2 = 0$, $(\mathscr{Q}) : \; y + z - 5 = 0$ et $(\mathscr{R}) : \; 2z - 8 = 0$.

Exercice 3 : Déterminer l'intersection des plans $(\mathscr{P})$, $(\mathscr{Q})$ et $(\mathscr{R})$ avec : $(\mathscr{P}) : \; 4x+3y+z+2 = 0$, $(\mathscr{Q}) : \; x + 2y + z - 5 = 0$ et $(\mathscr{R}) : \; 3x + 5y + 2z - 9 = 0$.