Fichiers Geometrie-Espace-Droites a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : On considère les points $A(-3\ ;\ 2\ ;\ 4)$ et $B(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$.
Écrire une représentation paramétrique de la droite (AB).

Correction : Le vecteur $\overrightarrow{AB}(2\ ;\ -1\ ;\ -4)$ est un vecteur directeur de la droite (AB). Ainsi,

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 4 - 4t \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \text{ est une représentation paramétrique de la droite (AB).}$$

Remarque : Bien sûr, tout autre vecteur colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ aurait très bien pu faire l'affaire comme $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ qui a l'avantage d'avoir un signe « - » de moins. C'est toujours ça !

On obtient alors une représentation équivalente de la droite (AB) :

$$\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = 4 + 4t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 : Soit (Δ) la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

1. Donner un vecteur directeur de la droite (Δ) et un point de (Δ).
2. Le point $M(-3\,;4\,;1)$ appartient-il à la droite (Δ) ?
3. Donner les coordonnées de trois points de la droite (Δ).
4. Déterminer une autre représentation paramétrique de (Δ).

Correction :

1. Il suffit de lire sur la représentation de la droite : $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ).

   Quant au point, même chose : pour la valeur $t = 0$, on trouve aisément $A\,(1\,;3\,;1)$.

   Remarque : Toute autre valeur intelligente du paramètre donnera un autre point de (Δ) comme, par exemple pour $t = 1$, $B\begin{pmatrix} 1-4 \\ 3+1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2 Il suffit de vérifier s'il existe, ou non, une valeur du paramètre t qui permette d'atteindre le point M i.e. le système

$$\begin{cases} -3 = 1 - 4t \\ 4 = 3 + t \\ 1 = 1 - t \end{cases} \quad \text{admet-il une solution ?}$$

Or, la deuxième équation imposerait $t = 1$ alors que la troisième imposerait $t = 0$.

Le système n'a donc pas de solutions : le point M n'appartient pas à la droite (Δ).

Remarque : On dit que les équations du système sont « incompatibles ».

3 Même chose que précédemment, en faisant varier les valeurs de t, on trouve différents points de (Δ) :

Pour $t = 0$: on retrouve le point $\mathrm{A}\,(1\,;3\,;1)$.

Pour $t = -1$: Le point $\mathrm{B}\,(-1\,;4\,;0)$.

Pour $t = \sqrt{3}$: Le point $\mathrm{C}\left(1 - 4\sqrt{3}\,;3 + \sqrt{3}\,;1 - \sqrt{3}\right)$.

4 La droite (Δ) est correctement définie par n'importe quel point de celle-ci et par n'importe quel vecteur colinéaire à $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$. Prenons donc, par exemple, C et $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

On obtient alors :

$$\begin{cases} x = 1 - 4\sqrt{3} + \dfrac{4}{\sqrt{3}}t \\ y = 3 + \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}t \\ z = 1 - \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Remarque : Le point $\mathrm{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est alors atteint pour la valeur $t = 3$ du paramètre.

Exercice 3 : Soit (Δ) la droite de représentation paramétrique :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 4 \\ z = 2t - 1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

1 Donner un vecteur directeur de la droite (Δ) et un point de (Δ).

2 Le point $\mathrm{M}(-3\,;4\,;-3)$ appartient-il à la droite (Δ) ?

3 Donner les coordonnées de trois points de la droite (Δ).

4 Déterminer une autre représentation paramétrique de (Δ).

Correction :

1 Le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ).

Quant au point, pour $t = 0$, on trouve $\mathrm{A}\,(-2\,;4\,;-1)$. Pour $t = 2$, $\mathrm{B}\,(0\,;4\,;3)$.

2 On résout le système :

$$\begin{cases} -3 = t-2 \\ 4 = 4 \\ -3 = 2t-1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -1 \\ 4 = 4 \\ t = -1 \end{cases}$$

Le système admet donc une unique solution $t=-1$ qui est la valeur du paramètre pour M. Celui-ci appartient donc bien à la droite (Δ).

3 On prenant successivement $t=0$, $t=\dfrac{1}{2}$ $t=2$ on obtient respectivement :

$$\mathrm{A}\,(-2\,;4\,;-1) \quad \mathrm{C}\left(-\frac{3}{2}\,;4\,;0\right) \quad \text{et } \mathrm{B}\,(0\,;4\,;3)\,.$$

4 Le raisonnement est identique à l'exercice précédent. La représentation la plus agréable me semble être celle où l'on considère le vecteur $\vec{u}\,(1\,;0\,;2)$ et le point $\mathrm{B}\,(0\,;4\,;3)$.

On obtient alors :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 4 \\ z = 3+2t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4 : Soient $\mathrm{A}(-4\,;1\,;2)$ et $\mathrm{B}(-1\,;2\,;5)$. Donner une représentation paramétrique de chacun des objets géométriques suivants :

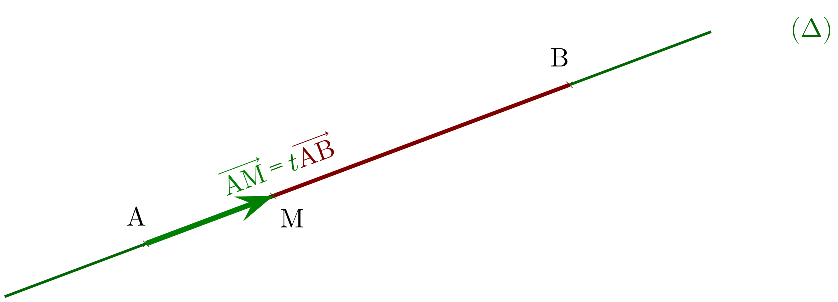
1. La droite (AB) ;
2. Le segment [AB] ;
3. La demi-droite [AB).
4. La droite $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath})$;
5. La droite $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\jmath})$;
6. La droite $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{k})$.

Correction :

1 Question maintenant simple, la droite (AB) passe par A et est dirigée par $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$:

$$(\mathrm{AB}) : \begin{cases} x = -4+3t \\ y = 1+t \\ z = 2+3t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

2



Le point M appartient au segment [AB] si, et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ avec $0 \leqslant t \leqslant 1$. On trouve alors :

$$[\mathrm{AB}] : \begin{cases} x = -4+3t \\ y = 1+t \\ z = 2+3t \end{cases}, \; t \in [0\,;1].$$

3 De même, le point $\mathrm{M} \in [\mathrm{AB})$ si, et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ avec $0 \leqslant t$. On trouve alors :

$$[\mathrm{AB}) : \begin{cases} x = -4+3t \\ y = 1+t \\ z = 2+3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}_+.$$

4 La droite $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath})$ passe par $\mathrm{O}\,(0\,;0\,;0)$ et est dirigée par $\vec{\imath}\,(1\,;0\,;0)$ donc :

$$(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}) : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

5 De même, $(\mathrm{O}\,;\vec{\jmath})$ passe $\mathrm{O}\,(0\,;0\,;0)$ et est dirigée par $\vec{\jmath}\,(0\,;1\,;0)$ d'où :

$$(\mathrm{O}\,;\vec{\jmath}) : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

6 Enfin, $\left(\mathrm{O}\,;\vec{k}\right) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$

Exercice 5 : Les représentations paramétriques suivantes sont-elles associées à une même droite ?

$$\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t \\ z = 1-3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 3-6s \\ y = -3s+2, \ s \in \mathbb{R} \\ z = 9s-5 \end{cases}$$

Correction : Plusieurs méthodes pour ce type d'exercices juste en se rappelant comment est définie une droite :

Avec deux points distincts : On montre que les droites passent par les deux mêmes points distincts.

Par exemple, pour $t = 0$ et $s = \dfrac{2}{3}$, les deux droites passent par $\mathrm{A}\,(-1\,;0\,;1)$ et pour $t = 8$ et $s = -2$, les deux droites passent par $\mathrm{B}\,(15\,;8\,;-23)$.

Avec un point et un vecteur directeur : On montre que les deux droites passent par un même point et ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Par exemple, le point $\mathrm{A}\,(-1\,;0\,;1)$ appartient aux deux droites comme on vient de le voir et les vecteurs $\overrightarrow{u_1}\,(2\,;1\,;-3)$ et $\overrightarrow{u_2}\,(-6\,;-3\,;9) = -3\overrightarrow{u_1}$ sont respectivement deux vecteurs directeurs des droites précédentes et colinéaires.

Ces deux représentations paramétriques sont celles d'une même droite.

Exercice 6 : On considère les droites $\mathcal{D}_1 : \begin{cases} z = 1 \\ y = x-2 \end{cases}$, $\mathcal{D}_2 : \begin{cases} z = 0 \\ y = 2x+3 \end{cases}$, $\mathcal{D}_3 : \begin{cases} z = -1 \\ y = -x+1 \end{cases}$ et $\vec{u}(2, 4, -3)$.

Trouver toutes les droites Δ rencontrant $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$, et orthogonales à $\vec{u}$.

Correction : Δ rencontre $\mathcal{D}_1$ en $\mathrm{A}(\alpha, \alpha-2, 1)$ et $\mathcal{D}_2$ en $\mathrm{B}(\beta, 2\beta+3, 0)$.

Elle est dirigée par $\vec{v}(\beta-\alpha, 2\beta-\alpha+5, -1)$.

$\vec{u} \perp \vec{v} \iff 10\beta - 6\alpha + 23 = 0$.

Il reste à chercher à quelle condition Δ rencontre $\mathcal{D}_3$: c'est $\alpha = \dfrac{17}{4}$ et $\beta = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 7 : Déterminer l'intersection éventuelle du plan $(\mathscr{P})$ d'équation $2x - y + 3z - 2 = 0$ et de la droite $(\mathscr{D})$ de représentation paramétrique :

$$(\mathscr{D}) : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : On considère $\mathrm{A}(3,0,1)$, $\vec{u}(2,1,1)$ et $\mathcal{D} = \mathrm{A} + \mathbb{R}\vec{u}$. $\mathcal{D}' : \begin{cases} x = z + 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$.

Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires.

Déterminer une équation cartésienne du plan contenant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Correction : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en $\mathrm{A}(3,0,1)$. Le plan les contenant est $\mathcal{P} : -2x - y + 5z + 1 = 0$.

Exercice 2 : Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a pour que $\mathcal{D} : \begin{cases} x = az - 1 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' : \begin{cases} x = z - 2 \\ y = 3z - 1 \end{cases}$ soient coplanaires.

Déterminer alors une équation cartésienne du plan qui les contient.

Correction : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles. Elles sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes.
C'est le cas si, et seulement si $a = \dfrac{3}{4}$. Elles sont alors sécantes en $\mathrm{A}(2,11,4)$. Le plan les contenant a pour équation : $-4x + y + z = 7$.

Exercice 3 : Soit $(\mathscr{P})$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4 - t + 3t' \\ y = 1 - t + 5t' \\ z = t - t' \end{cases}, \ t \in \mathbb{R},\ t' \in \mathbb{R}$$

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection de $(\mathscr{P})$ avec la droite $(\mathscr{D})$ donnée par une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4 : Soit $(\mathscr{P})$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4 - t + 3t' \\ y = 1 - t + 5t' \\ z = t - t' \end{cases}, \ t \in \mathbb{R},\ t' \in \mathbb{R}$$

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection de $(\mathscr{P})$ avec la droite $(\mathscr{D})$ donnée par une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 \\ z = -3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5 : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

— les points $\mathrm{A}(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$ et $\mathrm{B}(-2\ ;\ 2\ ;\ -1)$.

— la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2+t \\ y = 1+t \\ z = -1-t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Déterminer la position relative des droites (AB) et $\mathcal{D}$.

Exercice 6 : Soit (Δ) la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = -2+3t \\ z = -1+t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Dans chacun des cas suivants, étudier la position de la droite (Δ) avec la droite (d) de représentation paramétrique :

$k \in \mathbb{R}$.

1. $\begin{cases} x = -k \\ y = 3+2k \\ z = 4-k \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = k-2 \\ y = 7-3k \\ z = 2-k \end{cases}$

Correction : (Δ) a pour vecteur directeur $\vec{u}(-1\ ;\ 3\ ;\ 1)$

1. (d) a pour vecteur directeur $\vec{v}(-1\ ;\ 2\ ;1)$ qui n'est pas colinéaire avec $\vec{u}$. (Δ) et (d) sont donc soit sécantes, soit non coplanaires.

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = -2+3t \\ z = -1+t \\ x = -k \\ y = 3+2k \\ z = 4-k \end{cases} \iff \begin{cases} -k = 1-t \\ 3+2k = -2+3t \\ 4-k = -1+t \\ x = -k \\ y = 3+2k \\ z = 4-k \end{cases} \iff \begin{cases} k = t-1 \\ -2+3t = 1+2t \\ 4-t+1 = -1+t \\ x = -k \\ y = 3+2k \\ z = 4-k \end{cases} \iff \begin{cases} k = 2 \\ t = 3 \\ t = 3 \\ x = -2 \\ y = 7 \\ z = 2 \end{cases}$$

Les droites (d) et (Δ) sont donc sécantes en $\mathrm{A}(-2\ ;\ 7\ ;\ 2)$.

2. (d) a pour vecteur directeur $\vec{v}(1\ ;\ -3\ ;\ -1)$ qui est pas colinéaire avec $\vec{u}$. (Δ) et (d) sont donc parallèles.

$\mathrm{B}(1\ ;\ -2\ ;\ -1) \in (\Delta)$. Vérifions si $\mathrm{B} \in (d)$ pour savoir si elles sont confondues :

$$\begin{cases} 1 = 1+k \\ -2 = -2k \\ -1 = 3-k \end{cases} \iff \begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \\ k = 4 \end{cases}.$$

Il n'existe pas de réel k tel que les coordonnées de B vérifient le système, donc B n'appartient pas à (d) et les droites (d) et (Δ) sont strictement parallèles.

Exercice 7 : Soit (Δ) la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = -2+3t \\ z = -1+t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Dans chacun des cas suivants, étudier la position de la droite (Δ) avec la droite (d) de représentation paramétrique :

1
$$\begin{cases} x = 1+k \\ y = -2k \\ z = 3-k \end{cases}$$

2
$$\begin{cases} x = k-2 \\ y = 7-3k \\ z = 2-k \end{cases}$$

$k \in \mathbb{R}$.

Correction : (Δ) a pour vecteur directeur $\vec{u}(-1\ ;\ 3\ ;\ 1)$

1 (d) a pour vecteur directeur $\vec{v}(1\ ;\ -2\ ;\ -1)$ qui n'est pas colinéaire avec $\vec{u}$. (Δ) et (d) sont donc soit sécantes, soit non coplanaires.

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = -2+3t \\ z = -1+t \\ x = 1+k \\ y = -2k \\ z = 3-k \end{cases} \iff \begin{cases} 1+k = 1-t \\ -2k = -2+3t \\ 3-k = -1+t \\ x = 1+k \\ y = -2k \\ z = 3-k \end{cases} \iff \begin{cases} k = -t \\ t = 2 \\ 3 = -1!!! \\ x = 1+k \\ y = -2k \\ z = 3-k \end{cases}$$

Le système n'admet pas de solution et les droites (d) et (Δ) sont donc non coplanaires.

2 (d) a pour vecteur directeur $\vec{v}(1\ ;\ -3\ ;\ -1)$ qui est pas colinéaire avec $\vec{u}$. (Δ) et (d) sont donc parallèles.

$\mathrm{B}(1\ ;\ -2\ ;\ -1) \in (\Delta)$. Vérifions si $\mathrm{B} \in (d)$ pour savoir si elles sont confondues :

$$\begin{cases} 1 = 1+k \\ -2 = -2k \\ -1 = 3-k \end{cases} \iff \begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \\ k = 4 \end{cases}.$$

Il n'exciste pas de réel k tel que les coordonnées de B vérifient le système, donc B n'appartient pas à (d) et les droites (d) et (Δ) sont strictement parallèles.

Exercice 8 : Soit ABCDEFGH un cube ; I et J les milieux respectifs de [EG] et [GH].
On munit l'espace du repère $(\mathrm{A}; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})$.

1 Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AI) puis de la droite (DJ).

2 Démontrer que les droites (AI) et (DJ) sont sécantes en un point dont on déterminera les coordonnées.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Dans un repère de l'espace, on considère les droites $(\mathcal{D}_1)$, $(\mathcal{D}_2)$ et $(\mathcal{D}_3)$ représentées par :

$$(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 4t \\ z = 5-3t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}, \quad (\mathcal{D}_2) : \begin{cases} x = 8-6t \\ y = 1-12t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = 9t-2 \end{cases} \text{ et } (\mathcal{D}_3) : \begin{cases} x = 6+t \\ y = -1+3t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = 2-2t \end{cases}$$

1 Montrer que $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont strictement parallèles.

2 Montrer que $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_3)$ sont sécantes en un point M dont on donnera les coordonnées.

Correction :

1 On applique la méthode :

- $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont respectivement dirigées par $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-6\\-12\\9\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix} = -3\overrightarrow{u_1}$.

  Leur vecteur directeur étant colinéaires, $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont donc strictement parallèles ou confondues.
- Montrons qu'elles sont strictement parallèles i.e. qu'un point de $(\mathcal{D}_1)$, par exemple $\mathrm{A}\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$, n'appartient pas à $(\mathcal{D}_2)$ en résolvant le système :

$$\begin{cases}-1 = 8-6t\\ 0 = 1-12t\\ 5 = 9t-2\end{cases} \iff \begin{cases}t = \frac{3}{2}\\ t = \frac{1}{12}\\ t = \frac{1}{3}\end{cases}$$

Les équations ne sont pas compatibles.
Le système n'a pas de solutions.

Le point A de $(\mathcal{D}_1)$ n'appartient donc pas à $(\mathcal{D}_2)$. Les droites sont distinctes et parallèles donc strictement parallèles.

2 Question plus simple, il suffit de résoudre le système formé des deux représentations :

$$\begin{cases}-1+2k = 6+t\\ 4k = -1+3t\\ 5-3k = 2-2t\end{cases} \iff \begin{cases}-1+2k = 6+t\\ 2 = -13+t \qquad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1\\ 5-3k = 2-2t\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}2k = 22\\ t = 15\\ -3k = -33\end{cases} \iff \begin{cases}k = 11\\ t = 15\\ k = 11\end{cases}$$

Le système admet donc le couple $(11\,;15)$ comme solution i.e. les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_3)$ sont sécantes en $\mathrm{M}\begin{pmatrix}-1+2\times 11\\ 4\times 11\\ 5-3\times 11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\44\\-28\end{pmatrix}$

Remarque : Pensez à vérifier vos calculs avec la droite $(\mathcal{D}_3)$ et $t = 15$!