Fichiers Equation-differentielle-ordre-2 a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Résoudre $y'' - 3y' + 2y = 0$

Correction : Il s'agit d'une équation homogène du second ordre. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$, qui admet deux solutions : $r = 2$ et $r = 1$. Les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^x$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

Exercice 2 : Résoudre $y'' + 2y' + 2y = 0$

Correction : L'équation caractéristique associée est $r^2 + 2r + 2 = 0$, qui admet deux solutions : $r = -1 + i$ et $r = -1 - i$. On sait alors que les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = e^{-x}(\mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x)$ $(\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R})$. Remarquons que, en utilisant l'expression des fonctions cos et sin à l'aide d'exponentielles, ces solutions peuvent aussi s'écrire sous la forme $\lambda e^{(-1+i)x} + \mu e^{(-1-i)x}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

Exercice 3 : Résoudre $y'' - 2y' + y = 0$

Correction : L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$, dont 1 est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $(\lambda x + \mu)e^x$.

Exercice 4 : Résoudre $y'' + y = 2\cos^2 x$

Correction : Les solutions de l'équation homogène sont les $\lambda \cos x + \mu \sin x$. Le second membre peut en fait se réécrire $\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$: d'après le principe de superposition, on cherche une solution particulière sous la forme $a + b\cos(2x) + c\sin(2x)$.

En remplaçant, on trouve qu'une telle fonction est solution si $a = 1$, $b = -\dfrac{1}{3}$, $c = 0$.

Les solutions générales sont donc les $\lambda \cos x + \mu \sin x - \dfrac{1}{3}\cos(2x) + 1$.

Exercice 5 : Résoudre $x'' - 3x' + 2x = e^{2t}$

Correction : $t \mapsto k_1 e^{2t} + k_2 e^t + te^{2t}$.

Exercice 6 : Résoudre $-2x'' + x' + x = 10\cos t$

Correction : $t \mapsto \lambda e^{-\frac{t}{2}} + \mu e^t + 3\cos t + \sin t$.

Exercice 7 : Résoudre $y'' - 4y' + 4y = \operatorname{ch} 2x$

Correction : $x \mapsto (k_1 x + k_2)e^{2x} + \dfrac{1}{4}x^2 e^{2x} + \dfrac{1}{32}e^{-2x}$.

Exercice 8 : Résoudre $y'' - 3y' + 2y = e^x - x - 1$

Correction : $x \mapsto -xe^x - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} + \lambda e^{2x} + \mu e^x$.

Exercice 9 : Résoudre $y'' - 2y' + 2y = xe^x$

Correction : $x \mapsto (x + a\cos x + b\sin x)e^x$.

Exercice 10 : Résoudre $y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x$.

Correction : $x \mapsto (ax+b)e^{2x} + 2xe^x$.

Exercice 11 : Résoudre $y'' + 2y = x^2$

Exercice 12 : Résoudre $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}$

Exercice 13 : Résoudre $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^x$.

Exercice 14 : Résoudre $y'' - 2y' + 2y = xe^x$.

Correction : $y : x \longmapsto (x + a\cos x + b\sin x)e^x$.

Exercice 15 : Résoudre $y'' - 4y' + 13y = 10\cos 2x + 25\sin 2x$.

Correction : $y : x \longmapsto e^{2x}(a\cos 3x + b\sin 3x) + 2\cos 2x + \sin 2x$.

Exercice 16 : Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Correction : $y'' - 3y' + 2y = e^x$.
Le polynôme caractéristique est $f(r) = (r-1)(r-2)$ et les solutions de l'équation homogène sont donc toutes les fonctions :

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = \mathrm{P}(x)e^x$, on est dans la situation (ii) la condition $(*)$ sur P est : $\mathrm{P}'' - \mathrm{P}' = 1$, et $\mathrm{P}(x) = -x$ convient.
Les solutions de l'équation sont donc les fonctions :

$$y(x) = (c_1 - x)e^x + c_2e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Résoudre $y'' - 2y' + 2y = x\cos x \operatorname{ch} x$.

Correction : L'équation caractéristique de l'équation homogène $y'' - 2y' + 2y = 0$ est $r^2 - 2r + 2 = 0$ dont les racines sont $1-i$ et $1+i$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^x(\lambda\cos x + \mu\sin x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. L'équation avec second membre s'écrit

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{x}{4}(e^{(1+i)x} + e^{(-1+i)x} + e^{(1-i)x} + e^{(-1-i)x}).$$

On applique alors le principe de superposition des solutions.

Recherche d'une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=xe^{(1+i)x}$.

$1+i$ est racine simple de l'équation caractéristique et donc l'équation précédente admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x\mapsto(ax^2+bx)e^{(1+i)x}$. D'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}f''-2f'+2f&=(((1+i)^2(ax^2+bx)+2(1+i)(2ax+b)+2a)\\&\quad-2((1+i)(ax^2+bx)+(2ax+b))+2(ax^2+bx))e^{(1+i)x}\\&=(2(1+i)(2ax+b)+2a-2((2ax+b)))e^{(1+i)x}=(2i(2ax+b)+2a)e^{(1+i)x}\\&=(4iax+2a+2ib)e^{(1+i)x}\end{aligned}$$

puis,

$$f''-2f'+2f=xe^{(1+i)x}\Leftrightarrow 4ia=1\text{ et }2ib+2a=0\Leftrightarrow a=-\frac{i}{4}\text{ et }b=\frac{1}{4}.$$

Une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=xe^{(1+i)x}$ est $x\mapsto\dfrac{1}{4}(-ix^2+x)e^{(1+i)x}$. Par conjugaison, une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=xe^{(1-i)x}$ est $x\mapsto\dfrac{1}{4}(ix^2+x)e^{(1-i)x}$.

Recherche d'une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=xe^{(-1+i)x}$.

$-1+i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation précédente admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x\mapsto(ax+b)e^{(-1+i)x}$. D'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}f''-2f'+2f&=(((-1+i)^2(ax+b)+2(-1+i)a)-2((-1+i)(ax+b)+a)+2(ax+b))e^{(-1+i)x}\\&=((ax+b)(-2i-2(-1+i)+2)+2(-1+i)a-2a)e^{(-1+i)x}\\&=(4(1-i)(ax+b)-2(2-i)a)e^{(1+i)x}=(4(1-i)ax-2(2-i)a+4(1-i)b)e^{(1+i)x}\end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned}f''-2f'+2f=xe^{(-1+i)x}&\Leftrightarrow 4(1-i)a=1\text{ et }4(1-i)b-2(2-i)a=0\\&\Leftrightarrow a=\frac{1+i}{8}\text{ et }b=\frac{(2-i)(1+i)}{16(1-i)}=\frac{(3+i)(1+i)}{32}=\frac{1+2i}{16}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=xe^{(-1+i)x}$ est $x\mapsto\dfrac{1}{16}(2(1+i)x+1+2i)e^{(-1+i)x}$. Par conjugaison, une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=xe^{(-1-i)x}$ est $x\mapsto\dfrac{1}{16}(2(1-i)x+1-2i)e^{(-1-i)x}$.

Une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=x\cos x\operatorname{ch}x$ est donc

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}(2\mathcal{R}e(\frac{1}{4}(-ix^2+x)e^{(1+i)x}+\frac{1}{16}(2(1+i)x+1+2i)e^{(-1+i)x})\\&=\frac{1}{32}\mathcal{R}e(4(-ix^2+x)(\cos x+i\sin x)e^{x}+(2x+1+2(x+1)i)(\cos x+i\sin x)e^{-x}\\&=\frac{1}{32}(4(x\cos x+x^2\sin x)e^{x}+((2x+1)\cos x-2(x+1)\sin x)e^{-x})\end{aligned}$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x\mapsto(\frac{1}{8}(x\cos x+x^2\sin x)+\lambda\cos x+\mu\sin x)e^{x}+((2x+1$ $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : Résoudre $y''+6y'+9y=x^2e^{2x}$.

Correction : L'équation caractéristique de l'équation homogène $y''+6y'+9y=0$ est $r^2+6r+9=0$ qui admet la racine double $r=-3$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x\mapsto e^{-3x}(\lambda x+\mu)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

2 n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x\mapsto(ax^2+bx+c)e^{2x}$.

D'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} f''+6f'+9f &= ((4(ax^2+bx+c)+4(2ax+b)+2a)+6(2(ax^2+bx+c)+(2ax+b))+9(ax^2+bx+c))e^{2x} \\ &= (25(ax^2+bx+c)+10(2ax+b)+2a)e^{2x} = (25ax^2+(20a+25b)x+2a+10b+25c)e^{2x} \end{aligned}$$

puis,

$$f''+6f'+9f = x^2e^{2x} \Leftrightarrow 25a=1 \text{ et } 20a+25b=0 \text{ et } 2a+10b+25c=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{25} \text{ et } b=-\frac{4}{125} \text{ et } c=\frac{6}{625}.$$

Une solution particulière de l'équation $y''+6y'+9y=x^2e^{2x}$ est $x\mapsto \frac{1}{625}(25x^2-20x+6)e^{2x}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x\mapsto \frac{1}{625}(25x^2-20x+6)e^{2x}+(\lambda x+\mu)e^{-3x}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 : Résoudre $y''-2y'+y=\operatorname{ch} x$.

Correction : L'équation caractéristique de l'équation homogène $y''-2y'+y=0$ est $r^2-2r+1=0$ qui admet la racine double $r=1$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x\mapsto e^x(\lambda x+\mu)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Le second membre s'écrit $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$. Appliquons le principe de superposition des solutions.

Recherche d'une solution particulière de l'équation $y''-2y'+y=e^x$.

1 est racine double de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x\mapsto ax^2e^x$.

D'après la formule de Leibniz :

$$f''-2f'+f = ((ax^2+2(2ax)+2a)-2(ax^2+(2ax))+ax^2)e^{2x} = 2ae^x$$

puis,

$$f''-2f'+f=e^x \Leftrightarrow 2a=1 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}.$$

Une solution particulière de l'équation $y''-2y'+y=e^x$ est $x\mapsto \frac{1}{2}x^2e^x$.

Recherche d'une solution particulière de l'équation $y''-2y'+y=e^{-x}$.

-1 n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x\mapsto ae^{-x}$.

$$f''-2f'+f=(a+2a+a)e^{-x}=4ae^{-x}$$

puis,

$$f''-2f'+f=e^{-x} \Leftrightarrow a=\frac{1}{4}.$$

Une solution particulière de l'équation $y''-2y'+y=e^{-x}$ est $x\mapsto \frac{1}{4}e^{-x}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x\mapsto (\frac{x^2}{4}+\lambda x+\mu)e^x+\frac{1}{8}e^{-x}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 : Résoudre $y''-y=\operatorname{sh} x$

Correction : $x \mapsto k_1 e^x + k_2 e^{-x} + \frac{1}{8} x e^x + \frac{1}{8} x e^{-x}$.

Exercice 5 : Résoudre $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}$

Correction : $x \mapsto (\lambda + \ln |x|) e^{-x} + \mu e^{-2x}$.

Exercice 6 : Résoudre $y'^2 + y^2 = 1$ (dériver).

Correction : $y : x \longmapsto a\cos x + b \sin x$ avec $a^2 + b^2 = 1$ ou $y : x \longmapsto \pm 1$.

Exercice 7 : Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x}$$

Déterminer la solution f vérifiant $f(0) = -1$ et $f(0) = 1$.

Correction : $x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + k_1 x + k_2 \right) e^{2x}$ et $f : x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + 3x - 1 \right) e^{2x}$.

Exercice 8 : Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

Déterminer la solution f vérifiant $f(0) = 2$ et $f'(0) = 3$.

Correction : $x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + k_1 x + k_2 \right) e^x$ et $f : x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + x + 2 \right) e^x$.

Exercice 9 : Résoudre l'équation différentielle :

$$y^{(3)} - 3y'' + 2y' = 0.$$

Correction : $x \mapsto \mathrm{A}e^{2x} + \mathrm{B}e^x + \mathrm{C}$.

Exercice 10 : Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 4y = (x^3 + x)e^{2x}.$$

Déterminer la solution f vérifiant $f(0) = 1$ et $f(1) = e^2$.

Correction : $x \mapsto \left(\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{6} + \lambda x + \mu \right) e^{2x}$

$f : x \mapsto \left(\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{6} - \frac{13x}{60} + 1 \right) e^{2x}$.

Exercice 11 : Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x.$$

Déterminer la solution f vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

Correction : $x \mapsto \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + \lambda x + \mu \right) e^x$

$f : x \mapsto \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} - x + 1 \right) e^x$.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Résoudre $y'' - 2ky' + (1+k^2)y = e^x \sin x$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Correction : Soit $k \in \mathbb{R}$. L'équation caractéristique de l'équation homogène $y'' - 2ky' + (1+k^2)y = 0$ est $r^2 - 2kr + 1 + k^2 = 0$ dont le discriminant réduit vaut $-1 = i^2$. Cette équation admet donc pour racines $k+i$ et $k-i$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{kx}(\lambda \cos x + \mu \sin x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Le second membre s'écrit $\mathrm{Im}(e^{(1+i)x})$. Résolvons donc l'équation $y'' - 2y' + y = e^{(1+i)x}$.

Si $k \neq 1$, $1+i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f \ : \ x \mapsto ae^{(1+i)x}$.

Or,

$$f'' - 2kf' + (1+k^2)f = a((1+i)^2 - 2k(1+i) + 1 + k^2)e^{(1+i)x} = ((k-1)^2 - 2(k-1)i)ae^{(1+i)x}$$

et donc,

$$f'' - 2kf' + (1+k^2)f = e^{(1+i)x} \Leftrightarrow a = \frac{1}{k-1}\frac{1}{k-1-2i} = \frac{k-1+2i}{(k-1)(k^2-2k+5)}.$$

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^{(1+i)x}$ est $x \mapsto \dfrac{k-1-2i}{(k-1)(k^2-2k+5)}e^{(1+i)x}$ et une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^x \sin x$ est

$$\frac{1}{(k-1)(k^2-2k+5)}\mathrm{Im}((k-1-2i)(\cos x + i \sin x)e^x = \frac{1}{(k-1)(k^2-2k+5)}(-2\cos x + (k-1)\sin x)e^x.$$

Si $k \neq 1$, les solutions de l'équation proposée sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{(k-1)(k^2-2k+5)}(-2\cos x + (k-1)\sin x)e^x + (\lambda \cos x + \mu \sin x)e^{kx}, \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 : Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + y' + \frac{1}{2}y = \operatorname{sh} x.$$

Déterminer la solution f vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Correction : $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}(\lambda \cos \frac{x}{2} + \mu \sin \frac{x}{2}) + \frac{1}{5}e^x - e^{-x}$ et $f : x \mapsto (\frac{4}{5}\cos\frac{x}{2} - \frac{8}{5}\sin\frac{x}{2})e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{5}e^x - e^{-x}$.

Exercice 3 : Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + y' + \frac{1}{2}y = \operatorname{sh} x.$$

Déterminer la solution f vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Correction : $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}(\lambda \cos \frac{x}{2} + \mu \sin \frac{x}{2}) + \frac{1}{5}e^x - e^{-x}$.

$x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}(\frac{4}{5}\cos\frac{x}{2} - \frac{8}{5}\sin\frac{x}{2}) + \frac{1}{5}e^x - e^{-x}$.

Exercice 4 : Résoudre :

$$\text{(E)} : y'' + 2y' + 5y = 2xe^{-x}\cos 2x.$$

Correction :

- On considère l'équation Linéaire Homogène Associée : $(E_0) : y'' + 2y' + 5y = 0$.

  L'équation caractéristique est $(E_c) : r^2 + 2r + 5 = 0$.

  Son discriminant (réduit) est $\Delta' = -4 = (2i)^2$. Les racines de (E_c) sont donc $-1-2i$ et $-1+2i$.

  D'après le cours, les solutions réelles de l'équation (E_0) sont les fonctions :

$$x \mapsto e^{-x}\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

- D'après une formule d'Euler, l'équation (E) s'écrit encore $(E) : y'' + 2y' + 5y = xe^{(-1+2i)x} + xe^{-(1+2i)x}$.

  - <u>Solution particulière de $(E_1) : y'' + 2y' + 5y = xe^{(-1+2i)x}$</u>

    On cherche une solution sous la forme $f_1 : x \mapsto R(x)e^{(-1+2i)x}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \begin{array}{rlll} f_1(x) = & & & R(x)e^{(-1+2i)x} \\ f_1'(x) = & & [R'(x) & +(-1+2i)R(x)]e^{(-1+2i)x} \\ f_1''(x) = & [R''(x) & +2(-1+2i)R'(x) & +(-3-4i)R(x)]e^{(-1+2i)x} \end{array}.$$

    On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, f_1''(x) + 2f_1'(x) + 5f_1(x) = [R''(x) + 4iR'(x)]e^{(-1+2i)x}$.

    Ainsi

$$\begin{aligned} f_1 \text{ est une solution de } (E_1) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, [R''(x) + 4iR'(x)]e^{(-1+2i)x} = xe^{(-1+2i)x} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, R''(x) + 4iR'(x) = x \text{ car l'exponentielle est non nulle} \end{aligned}$$

    On cherche R de degré 2. On pose alors $R(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{aligned} f_1 \text{ est une solution de } (E_1) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, 2a + 4i(2ax + b) = x \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, 8aix + (2a + 4bi) = x \\ &\iff \begin{cases} 8ai = 1 \\ 2a + 4bi = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = -\dfrac{i}{8} \\ b = \dfrac{1}{16} \end{cases} \end{aligned}$$

    On peut choisir $c = 0$ et on conclut :

    $f_1 : x \mapsto \left(-\dfrac{i}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x\right)e^{(-1+2i)x}$ est solution particulière de (E_1).

  - <u>Solution particulière de $(E_2) : y'' + 2y' + 5y = xe^{-(1+2i)x}$</u>

    On remarque que cette équation est la conjuguée de (E_1).

    La fonction $f_2 = \overline{f_1}$ sera donc solution particulière de (E_2).

    D'où $f_2 : x \mapsto \left(\dfrac{i}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x\right)e^{-(1+2i)x}$ est solution particulière de (E_2).

  D'après le principe de superposition des solutions, $f_1 + f_2$ est solution de (E).Or

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) + f_2(x) &= \left(-\frac{i}{8}x^2 + \frac{1}{16}x\right)e^{(-1+2i)x} + \left(\frac{i}{8}x^2 + \frac{1}{16}x\right)e^{-(1+2i)x} \\ &= e^{-x}\left[-\frac{i}{8}x^2\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right) + \frac{x}{16}\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right)\right] \\ &= e^{-x}\left(\frac{x^2}{4}\sin 2x + \frac{x}{8}\cos 2x\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \left(\mathrm{A}\cos 2x + \mathrm{B}\sin 2x + \frac{x^2}{4}\sin 2x + \frac{x}{8}\cos 2x\right)e^{-x}, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}\right\}}$$

Exercice 5 : Résoudre l'équation suivante :

$$4y'' + 4y' + 5y = \sin x e^{-x/2}.$$

Correction : $4y'' + 4y' + 5y = \sin x e^{-x/2}$.
L'équation caractéristique a 2 racines complexes $r_1 = -1/2 + i$ et $r_2 = \overline{r_1}$ et les solutions de l'équation homogène sont :

$$y(x) = e^{-x/2}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

On a $\sin x e^{-x/2} = \mathrm{Im}(e^{(-1/2+i)x})$, on commence donc par chercher une solution z_p de l'équation avec le nouveau second membre $e^{(-1/2+i)x}$.
Comme $-1/2 + i$ est racine de l'équation caractéristique, on cherchera $z_p(x) = \mathrm{P}(x)e^{(-1/2+i)x}$ avec P de degré 1.
Par conséquent la condition $(*)$ sur P :

$$4\mathrm{P}'' + f'(-1/2 + i)\mathrm{P}' + f(-1/2 + i)\mathrm{P} = 1$$

s'écrit ici : $8i\mathrm{P}' = 1$ ($\mathrm{P}'' = 0$, $f(-1/2+i) = 0$ et $f'(-1/2+i) = 8i$), on peut donc prendre $\mathrm{P}(x) = -i/8x$ et $z_p(x) = -i/8xe^{(-1/2+i)x}$, par conséquent sa partie imaginaire $y_p(x) = \mathrm{Im}(-i/8xe^{(-1/2+i)x}) = 1/8x \sin x e^{-x/2}$ est une solution de notre équation.
Les solutions sont donc toutes les fonctions de la forme :

$$y(x) = e^{-x/2}(c_1 \cos x + (c_2 + 1/8x)\sin x) \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

La solution générale est de la forme

$$y(x) = \mathrm{K}_1 \cos(x)e^{-x/2} + \mathrm{K}_2 \sin(x)e^{-x/2} - \frac{1}{8}xe^{-x/2}\cos(x)$$

(K_1 et K_2 constantes réelles) et les conditions initiales donnent $\mathrm{K}_1 = 0$, $\mathrm{K}_2 = 1/8$.

Exercice 6 : Rechercher les fonctions polynômes solutions de

$$(x^2 - 3)y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

En déduire toutes les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 : Résoudre : $t^2y'' + ty' - y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction : Une solution particulière est la constante 1.

$y : t \mapsto t$ est une solution de E_0.

On applique la méthode de Lagrange en posant $y(t) = \lambda(t)t$.

On arrive à $t^3\lambda'' + 3t^2\lambda' = 0$.

$\lambda(t) = \dfrac{1}{t^2}$ convient et fournit une deuxième solution de l'équation E_0 : $y : t \mapsto \dfrac{1}{t}$.

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+^*} = \left\{t \mapsto \frac{\lambda}{t} + \mu t - 1, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

Exercice 8 : $x(1-2\ln x)y'' + (1+2\ln x)y' - \dfrac{4}{x}y = 0$
(chercher une solution de la forme $y = x^\alpha$).

Correction : $y = \lambda x^2 + \mu \ln x$.

Exercice 9 : Résoudre $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2 + 2x^3 \sin x$ (poser $u = \ln x$).

Correction : $y = ax + bx^2 + 1 - 2x \sin x$.

Exercice 10 : Résoudre $xy'' - 2y' - xy = 0$ (dériver deux fois).

Correction : $y^{(4)} - 2y'' + y = 0 \Rightarrow y = a(\operatorname{ch} x - x\operatorname{sh} x) + b(x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)$.

Exercice 11 :

1. Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation différentielle $x^2y''+y = 0$ (utiliser le changement de variable $x = e^t$).
2. Trouver toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall\, x \neq 0,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Correction :

1. En faisant le changement de variable $x = e^t$ (donc $t = \ln x$) et en posant $z(t) = y(e^t)$ (donc $y(x) = z(\ln x)$, l'équation $x^2y'' + y = 0$ devient $z'' - z' + z = 0$, dont les solutions sont les $z(t) = e^{t/2} \cdot \left(\lambda \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \mu \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   Autrement dit,

$$y(x) = \sqrt{x}\left(\lambda \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x) + \mu \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\right)$$

2. Supposons que f convienne : par hypothèse, f est de classe $\mathcal{C}^1$, donc $x \mapsto f(\frac{1}{x})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et par conséquent f' aussi. Ainsi f est nécessairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ (en fait, en itérant le raisonnement, on montrerait facilement que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$).

   En dérivant l'équation $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, on obtient

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

   et en réutilisant l'équation :

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}f(x).$$

   Ainsi on obtient que f est solution de $x^2y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}^*$.

   Nécessairement, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, x > 0,\ f(x) = \sqrt{x}\left(\lambda \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x) + \mu \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\right)$$

   Par hypothèse, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, en particulier elle se prolonge en 0 de façon $\mathcal{C}^1$.

Cherchons à quelle condition sur λ, μ cela est possible.

Déjà, $f(x) = \sqrt{x}\left(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x) + \mu\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ pour tous λ, μ ; donc $f(0) = 0$.

Mais
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x) + \mu\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\right)$$
n'a pas de limite en 0 si $\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0$.

En effet, pour $x_n = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}(-2n\pi)}$, on a $x_n \to 0$ mais $\dfrac{f(x_n)-f(0)}{x_n - 0} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{x_n}}$ qui admet une limite finie seulement si $\lambda = 0$.

De même avec $x'_n = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}(-2n\pi+\frac{\pi}{2})}$ qui donne $\dfrac{f(x'_n)-f(0)}{x'_n - 0} = \dfrac{\mu}{\sqrt{x'_n}}$ et implique donc $\mu = 0$.

Par conséquent, la seule possibilité est $\lambda = \mu = 0$.

Ainsi f est la fonction nulle, sur $[0, +\infty[$.

Le même raisonnement s'applique sur $]-\infty, 0]$. La fonction est donc nécessairement nulle sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, la fonction constante nulle est bien solution du problème initial.

Exercice 12 : En posant $t = \arctan x$, résoudre :
$$y''(x) + \frac{2x}{1+x^2}y'(x) + \frac{y(x)}{(1+x^2)^2} = 0.$$

Correction : $x \to \dfrac{\lambda x + \mu}{\sqrt{1+x^2}}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 13 : Résoudre par le changement de fonction $z = \dfrac{y}{x}$ l'équation différentielle :
$$x^2y''(x) - 2xy'(x) + (2-x^2)y(x) = 0.$$

Correction : $x \to \lambda x\text{sh}\, x + \mu x\text{ch}\, x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 14 (Équation intégrale) : Trouver les applications $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continues vérifiant pour tout $x > 0$:
$$\frac{1}{2}\int_{t=0}^{x} g^2(t)\,dt = \frac{1}{x}\left(\int_{t=0}^{x} g(t)\,dt\right)^2.$$

Correction : $y = \displaystyle\int_{t=0}^{x} g(t)dt \implies \frac{y'}{y} = \frac{2\pm\sqrt{2}}{x} \implies g(x) = \alpha x^{1\pm\sqrt{2}}$.

Continuité en $0 \implies g(x) = \alpha x^{1+\sqrt{2}}$.

Exercice 15 (Inéquations différentielles) :

Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, et y, z solutions de $\begin{cases} y(0) = z(0) \\ y' = a(t)y + b(t) \\ z' \leqslant a(t)z + b(t). \end{cases}$

En étudiant $e^{-A}(y-z)$ où $A' = a$, démontrer que : $\forall\, t \geqslant 0$, on a $y(t) \geqslant z(t)$.