Fichiers Equation-differentielle-ordre-1 a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Soit l'équation différentielle (E) $y' + 2xy = x$.

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Calculer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

Correction : Les primitives de la fonction $a(x) = 2x$ sont les fonctions

$$\mathrm{A}(x) = x^2 + k, \quad \text{où } k \in \mathbb{R} \text{ est une constante réelle quelconque.}$$

Donc les solutions de l'équation homogène associée à E sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ du type : $y(x) = ce^{-x^2}$ où $c \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire.

La fonction constante égale à $\frac{1}{2}$ est clairement solution de (E).

Par conséquent les solutions de E sont toutes les fonctions de la forme :

$$y(x) = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}, \ c \in \mathbb{R}.$$

Pour y solution de E, la condition $y(0) = 1$ équivaut à $c = \frac{1}{2}$.

D'où $y(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x^2} + 1)$.

Exercice 2 : Résoudre $y' + 2y = x^2$.

Correction : Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre.

On commence par résoudre l'équation homogène associée $y' + 2y = 0$: les solutions sont les $y(x) = \lambda e^{-2x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de (E_1). Le second membre étant polynomial de degré 2, on cherche une solution particulière de la même forme :

$y_0(x) = ax^2 + bx + c$ est solution de (E_1)
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) + 2y_0(x) = x^2$
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c = x^2$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ convient.

Les solutions de (E_1) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \lambda e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

Exercice 3 : Résoudre $y' + y = 2\sin x$.

Correction : Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre.

Les solutions de l'équation homogène associée $y' + y = 0$ sont les $y(x) = \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de (E_2). Le second membre est cette fois une fonction trigonométrique, on cherche une solution particulière sous la forme d'une combinaison linéaire de $\cos$ et $\sin$:
$y_0(x) = a\cos x + b\sin x$ est solution de (E_2)
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) + y_0(x) = 2\sin x$
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (a+b)\cos x + (-a+b)\sin x = 2\sin x$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x) = -\cos x + \sin x$ convient.

Les solutions de (E_2) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = -\cos x + \sin x + \lambda e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

Exercice 4 : Résoudre $y' - y = (x+1)e^x$.

Correction : Les solutions de l'équation homogène associée $y' - y = 0$ sont les $y(x) = \lambda e^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque que le second membre est le produit d'une fonction exponentielle par une fonction polynomiale de degré $d = 1$: or la fonction exponentielle du second membre est la même (e^x) que celle qui apparaît dans les solutions de l'équation homogène. On cherche donc une solution particulière sous la forme d'un produit de e^x par une fonction polynomiale de degré $d + 1 = 2$:
$y_0(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ est solution de (E_3)
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) - y_0(x) = (x+1)e^x$
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (2ax + b)e^x = (x+1)e^x$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x) = (\frac{1}{2}x^2 + x)e^x$ convient.

Les solutions de (E_3) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = (\frac{1}{2}x^2 + x + \lambda)e^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

Exercice 5 : Résoudre $y' + y = x - e^x + \cos x$.

Correction : Les solutions de l'équation homogène associée $y' + y = 0$ sont les $y(x) = \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque que le second membre est la somme d'une fonction polynomiale de degré 1, d'une fonction exponentielle (différente de e^{-x}) et d'une fonction trigonométrique. D'après le principe de superposition, on cherche donc une solution particulière sous la forme d'une telle somme :
$y_0(x) = ax + b + \mu e^x + \alpha\cos x + \beta\sin x$ est solution de (E_4)
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) + y_0(x) = x - e^x + \cos x$
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ ax + a + b + 2\mu e^x + (\alpha+\beta)\cos x + (-\alpha+\beta)\sin x = x - e^x + \cos x$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que

$$y_0(x) = x - 1 - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$$

convient.

Les solutions de (E_4) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = x - 1 - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \lambda e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

Exercice 6 : Résoudre $(2+x)y' = 2 - y$.

Correction : $y = 2 + \dfrac{\lambda}{x+2}$.

Exercice 7 : Résoudre $x^3y' - x^2y = 1$.

Correction : $y = \lambda x - \dfrac{1}{3x^2}$.

Exercice 8 : Résoudre $x(x^2-1)y' + 2y = x\ln x - x^2$.

Correction : $y = \dfrac{x}{1-x^2}\Big((1+x)\ln x + 1 + \lambda x\Big)$.

Exercice 9 : Résoudre $x' + x = \sin(t)$.

Correction : $t \mapsto \lambda e^{-t} + \dfrac{1}{2}(\sin t - \cos t)$.

Exercice 10 : Résoudre $xy' - 2y = (x-1)(x+1)^3$.

Correction : $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 2x + \dfrac{1}{2} + kx^2$.

Exercice 11 : Résoudre $y' - y\ln x - e^{x\ln x} = 0$.

Correction : $x \mapsto x^x(1 + ke^{-x})$.

Exercice 12 : Résoudre $xy' - y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Correction : $x \mapsto x(-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln x + k)$.

Exercice 13 : Résoudre $(2+x)y' = 2 - y$.

Correction : $y = 2 + \dfrac{\lambda}{x+2}$.

Exercice 14 : Résoudre $xy' + y = \cos x$.

Correction : $y = \dfrac{\mathrm{C} + \sin x}{x}$.

Exercice 15 : Résoudre $(1+x)y' + y = (1+x)\sin x$.

Correction : $y = -\cos x + \dfrac{\sin x + \lambda}{1+x}$.

Exercice 16 : Résoudre $x^3y' - x^2y = 1$.

Correction : $y = \lambda x - \dfrac{1}{3x^2}$.

Exercice 17 : Résoudre $3xy' - 4y = x$.

Correction : $y = \lambda x^{4/3} - x$.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Résoudre $(x+i)y'+y=1+2x\arctan x$.

Correction : $x\mapsto \dfrac{k}{1-ix}+(x-i)\arctan x$.

Exercice 2 : Résoudre $x(x^2-1)y'+2y=x^2$.

Correction : $x\mapsto \dfrac{x^2}{x^2-1}(k+\ln|x|)$.

Exercice 3 : Résoudre $y'+y=\sin x+3\sin 2x$.

Correction : $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{2}+\dfrac{3\sin 2x-6\cos 2x}{5}+\lambda e^{-x}$.

Exercice 4 : Résoudre $y'\operatorname{ch}(x)+y\operatorname{sh}(x)=1+x^2$ puis déterminer la solution vérifiant la condition $y(0)=1$.

Correction : $x\mapsto \dfrac{\frac{1}{3}x^3+x+\lambda}{\operatorname{ch} x}$ et la solution cherchée est $x\mapsto \dfrac{\frac{1}{3}x^3+x+1}{\operatorname{ch} x}$.

Exercice 5 : Résoudre $(1-x)y'-(1+2x)y=1+2x$ sur $]-1\,;1[$ avec $y(0)=0$.

Exercice 6 : Résoudre $y'=|y|$ sur $\mathbb{R}$.

Correction : Si $y\geqslant 0$, $y'=|y| \iff y'=y$ et $y:x\mapsto \lambda e^{x}$ avec $\lambda\geqslant 0$.
Si $y\leqslant 0$, $y'=|y| \iff y'=-y$ et $y:x\mapsto \mu e^{-x}$ avec $\mu\leqslant 0$.
Supposons que y change de signe. Alors $y(x_0)=0$. Comme y est croissante, y est positive à droite de x_0.
On peut appliquer le raisonnement précédent à $[x_0,+\infty[$ et obtenir $\forall x\geqslant x_0, y(x)=\lambda e^{x}$.
Mais comme $y(x_0)=0$, $\lambda=0$.
Même raisonnement sur $]-\infty,x_0]$. Finalement f est nulle.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Résoudre $2x(1-x)y'+(1-2x)y=1$.

Correction : $y=\dfrac{\operatorname{argch}(1-2x)+\lambda}{2\sqrt{x^2-x}}$ pour $x<0$

$y=\dfrac{\arcsin(2x-1)+\mu}{2\sqrt{x-x^2}}$ pour $0<x<1$

$y=\dfrac{-\operatorname{argch}(2x-1)+\nu}{2\sqrt{x^2-x}}$ pour $1<x$.

Exercice 2 : Résoudre $x(x+1)y'+y=\arctan x$ et étudier les problèmes de raccordement

Correction : $y=\dfrac{x-1}{2x}\arctan x+\dfrac{x+1}{2x}\left(\ln\dfrac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}}+\lambda\right)$.

Exercice 3 : Résoudre $x(x^2-1)y'+2y=x\ln x-x^2$ et étudier les problèmes de raccordement.

Correction : $y=\dfrac{x}{1-x^2}\Big((1+x)\ln x+1+\lambda x\Big)$.

Exercice 4 : Résoudre sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ l'équation différentielle : $|x|y'+(x-1)y=x^3$.

Correction : Résolution de (E) sur $]0,+\infty[$.

Soit f une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de (E) sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ |x|f'(x)+(x-1)f(x)=x^3\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ xf'(x)+(x-1)f(x)=x^3 \Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)+(1-\frac{1}{x})f(x)=x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ e^{x-\ln x}f'(x)+(1-\frac{1}{x})e^{x-\ln x}f(x)=e^{x-\ln x}x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ (\frac{e^x}{x}f)'(x)=xe^x=((x-1)e^x)'\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]0,+\infty[,\ f(x)=xe^{-x}((x-1)e^x+\lambda)=x^2-x+\lambda xe^{-x}
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto x^2-x+\lambda xe^{-x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Résolution de (E) sur $]-\infty,0[$.

Soit f une fonction dérivable sur $]-\infty,0[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de (E) sur }]-\infty,0[&\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ -xf'(x)+(x-1)f(x)=x^3\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]-\infty,0[,\ f'(x)+(-1+\frac{1}{x})f(x)=-x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]-\infty,0[,\ e^{-x+\ln|x|}f'(x)+(-1+\frac{1}{x})e^{-x+\ln|x|}f(x)=-e^{-x+\ln|x|}x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]-\infty,0[,\ (-xe^{-x}y)'=x^3e^{-x}\ (*)
\end{aligned}$$

Déterminons une primitive de la fonction $x\mapsto -x^3e^{-x}$ de la forme $(ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x}$.

$$((ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x})'=(-(ax^3+bx^2+cx+d)+(3ax^2+2bx+c))e^{-x}=(-ax^3+(3a-b)x^2+(2b-c)x+c-d)e^{-x},$$

et

$$((ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x})'=x^3e^{-x}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-a=-1\\3a-b=0\\2b-c=0\\c-d=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=1\\b=3\\c=6=d\end{array}\right..$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
(*) &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]-\infty,0[,\ xe^{-x}f(x)=(x^3+3x^2+6x+6)e^{-x}+\lambda\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]-\infty,0[,\ f(x)=x^2+3x+6+\frac{\lambda e^x+6}{x}.
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $]-\infty,0[$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto x^2+3x+6+\dfrac{\lambda e^x+6}{x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

On peut montrer que l'équation admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}$ en « recollant » les expressions précédentes, mais en ce début d'année, on manque encore d'outils.

Exercice 5 : Résoudre l'équation différentielle $(x^2+1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$. Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(0) = 3$.

Correction : Comme le coefficient de y' ne s'annule pas, on peut réécrire l'équation sous la forme

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{3x^2+1}{x^2+1}$$

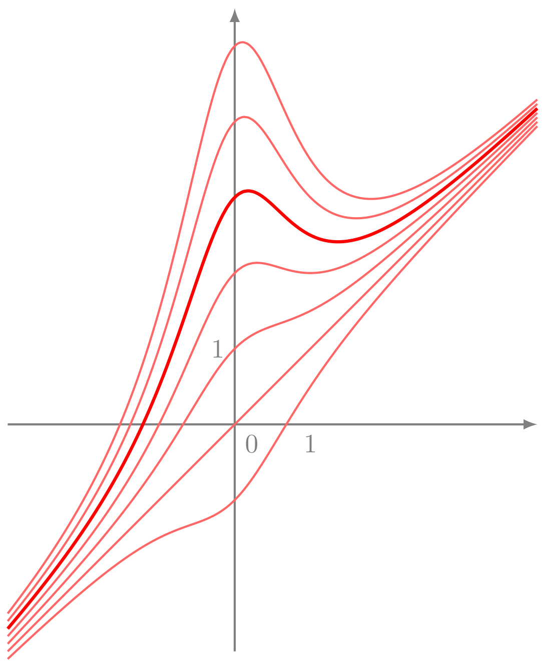
1. Les solutions de l'équation homogène associée sont les $y(x) = \lambda e^{\mathrm{A}(x)}$, où A est une primitive de $a(x) = -\dfrac{2x}{x^2+1}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque $a(x)$ est de la forme $-\dfrac{u'}{u}$ avec $u > 0$, on peut choisir $\mathrm{A}(x) = -\ln(u(x))$ où $u(x) = x^2+1$. Les solutions sont donc les $y(x) = \lambda e^{-\ln(x^2+1)} = \dfrac{\lambda}{x^2+1}$.
2. Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de l'équation avec second membre : on remarque que $y_0(x) = x$ convient.
3. Les solutions sont obtenues en faisant la somme :

$$y(x) = x + \frac{\lambda}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

4. $y(0) = 3$ si et seulement si $\lambda = 3$. La solution cherchée est donc $y(x) = x + \dfrac{3}{x^2+1}$.

Voici les courbes intégrales pour $\lambda = -1, 0, \ldots, 5$.



Exercice 6 : Résoudre l'équation différentielle $y' \sin x - y\cos x + 1 = 0$ sur $]0;\pi[$. Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

Correction : On commence par remarquer que $y_0(x) = \cos x$ est une solution particulière. Pour l'équation homogène : sur l'intervalle considéré, le coefficient de y' ne s'annule pas, et l'équation se réécrit

$$y' - \frac{\cos x}{\sin x}y = 0$$

Les solutions sont les $y(x) = \lambda e^{\mathrm{A}(x)}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et A est une primitive de $a(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. Puisque $a(x)$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u > 0$, on peut choisir $\mathrm{A}(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = \sin x$. Les solutions de l'équation sont donc les $y(x) = \lambda e^{\ln(\sin x)} = \lambda \sin(x)$.
Finalement, les solutions de l'équation sont les

$$y(x) = \cos x + \lambda \sin(x)$$

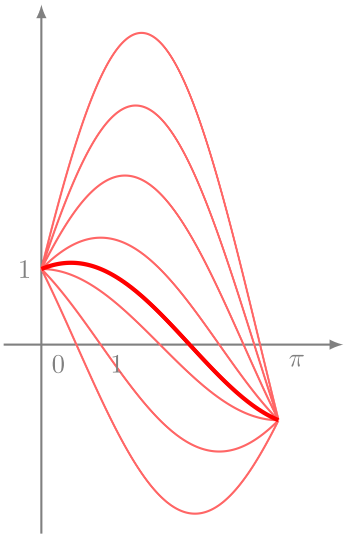
où λ est un paramètre réel.

On a

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff \cos\frac{\pi}{4} + \lambda \sin\frac{\pi}{4} = 1 \iff \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\lambda) = 1 \iff \lambda = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$$

La solution cherchée est $y(x) = \cos(x) + \left(\dfrac{2}{\sqrt{2}} - 1\right)\sin(x)$

Voici les courbes intégrales pour $\lambda = -2, -1, 0, \dots, 4$ et $\dfrac{2}{\sqrt{2}} - 1$ (en gras).



Exercice 7 : Résoudre $(x^2 - y^2 - 1)y' = 2xy$ en posant $z = \dfrac{y}{x^2 + y^2 - 1}$.

Correction : $y = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 1 - x^2}$ ou $y = 0$.

Exercice 8 (Équations de Riccati:) : $x^2(y' + y^2) = xy - 1$.

Correction : $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x \ln|x| + \lambda x}$ ou $y = \dfrac{1}{x}$.

Exercice 9 (Équations de Bernoulli:) : $xy' + y = xy^3$.

Correction : $y = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}}$ ou $y = 0$.

Exercice 10 (Équations de Bernoulli:) : $2xy' + y = \dfrac{2x^2}{y^3}$.

Correction : $y = \pm\sqrt[4]{x^2 + \dfrac{\lambda}{x^2}}$.

Exercice 11 (Équations de Bernoulli:) : $\sqrt{x}y' - y + (x + 2\sqrt{x})\sqrt{y} = 0$.

Correction : $y = ((\sqrt{x}+2)^2 + \lambda e^{\sqrt{x}})^2$.

Exercice 12 (Équations de Bernoulli:) : $xy' + y = (xy)^{3/2}$.

Correction : $y = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{2}{\lambda - x}\right)^2$ ou $y = 0$.

Exercice 13 (Équations de Bernoulli:) : $x^3y' = y(3x^2 + y^2)$.

Correction : $y = \pm\dfrac{\sqrt{2}\,x^3}{\sqrt{2\lambda - x^4}}$ ou $y = 0$.

Exercice 14 : On considère l'équation différentielle

$$y' - e^x e^y = a$$

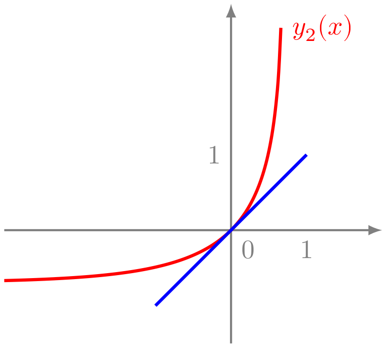
Déterminer ses solutions, en précisant soigneusement leurs intervalles de définition, pour

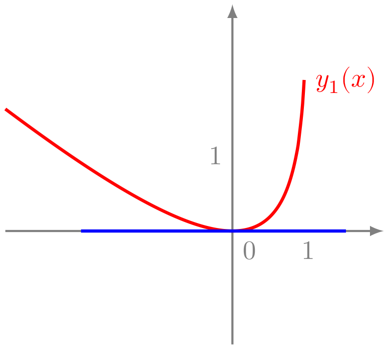
1. $a = 0$
2. $a = -1$ (faire le changement de fonction inconnue $z(x) = x + y(x)$)

Dans chacun des cas, construire la courbe intégrale qui passe par l'origine.

Correction :

1. L'équation différentielle $y' - e^x e^y = 0$ est à variables séparées : en effet, en divisant par e^y, on obtient $-y'e^{-y} = -e^x$. Le terme de gauche est la dérivée de e^{-y} (y est une fonction de x), celui de droite est la dérivée de $x \mapsto -e^x$:
$$\frac{\mathrm{d}e^{-y}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(-e^x)}{\mathrm{d}x}$$
Les dérivées étant égales, cela implique que les deux fonctions sont égales à une constante additive près : ainsi y est solution sur I si et seulement si elle est dérivable sur I et $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathrm{I}$, $e^{-y} = -e^x + c$. À c fixé, cette égalité n'est possible que si $-e^x + c > 0$, c'est-à-dire si $c > 0$ et $x < \ln c$. On obtient ainsi les solutions :
$$y_c(x) = -\ln(c - e^x) \quad (\text{pour } x \in \mathrm{I}_c =]-\infty; \ln c[)$$
où c est un paramètre réel strictement positif.
Pour que l'une des courbes intégrales passe par l'origine, il faut qu'il existe $c > 0$ tel que $0 \in \mathrm{I}_c$ et $y_c(0) = 0$: autrement dit, $c > 1$ et $c - 1 = 1$. Il s'agit donc de $y_2 : x \mapsto -\ln(2 - e^x)$, la courbe intégrale cherchée est son graphe, au-dessus de l'intervalle $\mathrm{I}_2 =]-\infty; \ln 2[$. Sa tangente en l'origine a pour pente $y_2'(0) = e^0 e^{y(0)} = 1$, c'est la première bissectrice. Comme par construction y_2' est à valeurs strictement positives, la fonction y_2 est strictement croissante.





2 Posons $z(x) = x + y(x)$: z a le même domaine de définition que y et est dérivable si et seulement si y l'est. En remplaçant $y(x)$ par $z(x) - x$ dans l'équation différentielle $y' - e^x e^y = -1$, on obtient $z' - e^z = 0$, c'est-à-dire $z' e^{-z} = 1$. Il s'agit de nouveau d'une équation à variables séparées : en intégrant cette égalité, on obtient que z est solution sur J si et seulement si elle est dérivable sur J et $\exists\, c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathrm{J},\ e^{-z} = -x + c$. À c fixé, cette égalité n'est possible que si $c > x$. On obtient ainsi les solutions :

$$y_c(x) = z_c(x) - x = -x - \ln(c - x) \quad (\text{pour } x \in \mathrm{J}_c =]-\infty; c[)$$

où c est un paramètre réel.

Pour que l'une des courbes intégrales passe par l'origine, il faut qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $0 \in \mathrm{J}_c$ et $y_c(0) = 0$: autrement dit, $c > 0$ et $c = 1$. Il s'agit donc de $y_1 : x \mapsto -x - \ln(1 - x)$, la courbe intégrale cherchée est son graphe, au-dessus de l'intervalle $\mathrm{J}_1 =]-\infty; 1[$. Sa tangente en l'origine a pour pente $y_1'(0) = e^0 e^{y(0)} - 1 = 0$: elle est horizontale.