Fichiers Nombres-Reels-Parties-Entieres a, b et c

Exercices faciles :

Exercice 1 : Représenter la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.

Exercice 2 : Représenter la fonction et $x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Exercice 3 : Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Exercice de difficulté moyenne :

Exercice 1 : Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad \left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 2 :

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. En déduire la partie entière de $\mathrm{A} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{10000}}$.

Exercice 3 : Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.

Exercice 4 :

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor + \lfloor x + 1 \rfloor + \left\lfloor 2x + \frac{1}{2} \right\rfloor - \lfloor 4x + 1 \rfloor$ est $\frac{1}{2}$-périodique.
2. En déduire que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor + \lfloor x + 1 \rfloor + \left\lfloor 2x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 4x + 1 \rfloor .$$

Correction : *f est nulle sur $\left[0\,;\frac{1}{4}\right[$ et nulle sur $\left[\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}\right[$.*

Exercice 5 : Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.

Exercice 6 : Pour $a \in \mathbb{R}$, que dire de la parité de l'entier $\left\lfloor a + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor a - \frac{1}{2} \right\rfloor$?

Correction : *En posant $f : a \mapsto \left\lfloor a + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor a - \frac{1}{2} \right\rfloor$, on a $f\left(a + \frac{1}{2}\right) = 2\lfloor a \rfloor + 1$.*

Donc $f(a) = 2\left\lfloor a - \frac{1}{2} \right\rfloor + 1$ est un entier impair.

Exercice 7 : Comparer $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor$ et $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ pour $x \geqslant 0$.

Correction :

- *On a $\lfloor x \rfloor \leqslant x$, donc $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor \leqslant \sqrt{\lfloor x \rfloor} \leqslant \sqrt{x}$.*

  Or $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$ On en déduit que $\boxed{\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor \leqslant \lfloor \sqrt{x} \rfloor}$.

– Par ailleurs, on a $\lfloor\sqrt{x}\rfloor \leqslant \sqrt{x}$ donc $\lfloor\sqrt{x}\rfloor^2 \leqslant x$.

Or $\lfloor\sqrt{x}\rfloor^2 \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor\sqrt{x}\rfloor^2 \leqslant \lfloor x\rfloor$ et $\lfloor\sqrt{x}\rfloor \leqslant \sqrt{\lfloor x\rfloor}$.

Comme $\lfloor\sqrt{x}\rfloor \in \mathbb{Z}$, on a $\boxed{\lfloor\sqrt{x}\rfloor \leqslant \left\lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\right\rfloor}$.

Exercice 8 : Résoudre l'équation

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor 2x+3\rfloor = \lfloor x+2\rfloor\,.$$

Correction :

Analyse : Soit x une solution. Alors en posant $n = \lfloor 2x+3\rfloor = \lfloor x+2\rfloor$, on a $\begin{cases} n \leqslant 2x+3 < n+1 \\ n \leqslant x+2 < n+1 \end{cases}$.

D'où $2x+3 < n+1 \leqslant x+3$, i.e. $x < 0$.

Et $x+2 < n+1 \leqslant 2x+4$ donc $-2 < x$. On en déduit que $\mathcal{S} \subset]-2, 0[$.

Synthèse : – Si $x \in]-2,-1[$, on a $x+2 \in]0,1[$ donc $\lfloor x+2\rfloor = 0$.

$$\lfloor 2x+3\rfloor = \lfloor x+2\rfloor \iff \lfloor 2x+3\rfloor = 0 \iff 0 \leqslant 2x+3 < 1 \iff -\frac{3}{2} \leqslant x < -1.$$

– Si $x \in]-1,0[$, on a $x+2 \in]1,2[$ donc $\lfloor x+2\rfloor = 1$.

$$\lfloor 2x+3\rfloor = \lfloor x+2\rfloor \iff \lfloor 2x+3\rfloor = 1 \iff 1 \leqslant 2x+3 < 2 \iff -1 \leqslant x < -\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right[}$$

Exercices plus ardus :

Exercice 1 : Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (x \in \mathbb{Z}) \iff (\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lfloor nx\rfloor = n\lfloor x\rfloor)$.

Correction :

$\Rightarrow$: Supposons que $x \in \mathbb{Z}$. Alors $\lfloor x\rfloor = x$.

On a aussi $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad nx \in \mathbb{Z}$ donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lfloor nx\rfloor = nx = n\lfloor x\rfloor$.

$\Leftarrow$: Montrons la contraposée : si $x \notin \mathbb{Z}$ alors $\exists n \in \mathbb{N}, \quad \lfloor nx\rfloor \neq n\lfloor x\rfloor$.

Notons $x = \lfloor x\rfloor + \epsilon$ avec $\epsilon \in]0,1[$.

$\mathbb{R}$ étant archimédien, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0\epsilon > 1$.

On a donc $\lfloor n_0 x\rfloor = \lfloor n_0\lfloor x\rfloor + n_0\epsilon\rfloor = n_0\lfloor x\rfloor + \lfloor n_0\epsilon\rfloor \geqslant n_0\lfloor x\rfloor + 1$. Donc $\lfloor n_0 x\rfloor \neq n_0\lfloor x\rfloor$. CQFD

Exercice 2 : Montrer que $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x\rfloor + \lfloor x+y\rfloor + \lfloor y\rfloor \leqslant \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor$.

Correction : Poser $\begin{cases} x = \lfloor x\rfloor + x' \\ y = \lfloor y\rfloor + y' \end{cases}$ avec $x', y' \in [0,1[$.

$$\begin{aligned} \lfloor x\rfloor + \lfloor x+y\rfloor + \lfloor y\rfloor \leqslant \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor &\iff \lfloor x\rfloor + \lfloor\lfloor x\rfloor + x' + \lfloor y\rfloor + y'\rfloor + \lfloor y\rfloor \leqslant \lfloor 2\lfloor x\rfloor + 2x'\rfloor + \lfloor 2\lfloor y\rfloor + 2y'\rfloor \\ &\iff 2\lfloor x\rfloor + \lfloor x'+y'\rfloor + 2\lfloor y\rfloor \leqslant 2\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x'\rfloor + 2\lfloor y\rfloor + \lfloor 2y'\rfloor \\ &\iff \lfloor x'+y'\rfloor \leqslant \lfloor 2x'\rfloor + \lfloor 2y'\rfloor \end{aligned}$$

Le membre de gauche $\lfloor x'+y'\rfloor$ vaut 0 ou 1. Le membre de droite $\lfloor 2x'\rfloor + \lfloor 2y'\rfloor$ vaut 0 , 1 ou 2.

La dernière inégalité ne serait pas vérifiée uniquement si $\begin{cases} \lfloor x'+y' \rfloor = 1 \\ \lfloor 2x' \rfloor + \lfloor 2y' \rfloor = 0 \end{cases}$.

Or $\lfloor 2x' \rfloor + \lfloor 2y' \rfloor = 0$ implique $0 \leqslant x' < \dfrac{1}{2}$ et $0 \leqslant y' < \dfrac{1}{2}$.

Et alors, $0 \leqslant x'+y' < 1$ et c'est absurde puisque $\lfloor x'+y' \rfloor = 1$.

Exercice 3 : Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor$.

Correction :

- En mettant au carré, on voit qu'on a toujours $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leqslant \sqrt{4n+2}$.

  En effet,

  $$\begin{aligned} \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leqslant \sqrt{4n+2} &\iff 2n+1+2\sqrt{n^2+n} \leqslant 4n+2 \iff 2\sqrt{n^2+n} \leqslant 2n+1 \\ &\iff 4n^2+4n \leqslant 4n^2+4n+1 \iff 0 \leqslant 1. \end{aligned}$$

  La fonction $\lfloor \cdot \rfloor$ étant croissante, on en déduit que $\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor$
- Supposons que $\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor < \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor$.

  Alors, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} < p \leqslant \sqrt{4n+2}$, et donc $2n+1+2\sqrt{n^2+n} < p^2 \leqslant 4n+2$.

  En posant $q = p^2 - 2n - 1$, on a $2\sqrt{n^2+n} < q \leqslant 2n+1$ d'où $4n^2+4n < q^2 \leqslant 4n^2+4n+1$.

  Comme $q \in \mathbb{Z}$, on a $q^2 = 4n^2+4n+1$, donc $q = 2n+1$ et $p^2 = 4n+2$.

  On a donc $2|p^2$, mais $4 \not| p^2$. C'est absurde !

Donc

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor}.$$

Exercice 4 : Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\left\lfloor \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor = 4n+1$.

Exercice 5 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.
2. Soit $\dfrac{p}{q}$ une fraction irréductible, avec $q > 0$.

   Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor k\frac{p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -1 \text{ si } x \notin \mathbb{Z} \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$.
2. Posons $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor k\frac{p}{q} \right\rfloor$.

   On a aussi $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor (q-k)\frac{p}{q} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{q-1} \left(p + \left\lfloor -k\frac{p}{q} \right\rfloor \right) = (q-1)p + \sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor -k\frac{p}{q} \right\rfloor$.

   D'où $2\mathrm{S} = (q-1)p + \displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} \left(\left\lfloor -k\frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor k\frac{p}{q} \right\rfloor \right) = (q-1)p + \sum_{k=1}^{q-1} -1 = (q-1)p - (q-1) = (q-1)(p-1)$.

   CQFD

Exercice 6 : Résoudre $x\lfloor x \rfloor = x^2 - \lfloor x \rfloor^2$.