Fichiers Nombres-Reels-Borne-Sup a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Montrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x,y,z)$.

Correction : Explicitons la formule pour $\max(x,y)$.

Si $x \geqslant y$, alors $|x-y| = x-y$ donc $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+x-y) = x$.

De même si $x \leqslant y$, alors $|x-y| = -x+y$ donc $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-x+y) = y$.

Pour trois éléments, nous avons $\max(x,y,z) = \max\big(\max(x,y),z\big)$, donc d'après les formules pour deux éléments :

$$\begin{aligned}\max(x,y,z) &= \frac{\max(x,y)+z+|\max(x,y)-z|}{2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)+z+\left|\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)-z\right|}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 2 : Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $[0,1] \cap \mathbb{Q}$
2. $]0,1[\cap \mathbb{Q}$
3. $\mathbb{N}$
4. $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Correction :

1. $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. Les majorants : $[1,+\infty[$. Les minorants : $]-\infty,0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Le plus grand élément : 1. Le plus petit élément 0.
2. $]0,1[\cap \mathbb{Q}$. Les majorants : $[1,+\infty[$. Les minorants : $]-\infty,0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Il n'existe pas de plus grand élément ni de plus petit élément.
3. $\mathbb{N}$. Pas de majorants, pas de borne supérieure, ni de plus grand élément. Les minorants : $]-\infty,0]$. La borne inférieure : 0. Le plus petit élément : 0.
4. $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Les majorants : $[\frac{5}{4},+\infty[$. Les minorants : $]-\infty,-1]$. La borne supérieure : $\frac{5}{4}$. La borne inférieure : -1. Le plus grand élément : $\frac{5}{4}$. Pas de plus petit élément.

Exercice 3 : Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées.
Montrer que $\sup A \cup B$ existe et que $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$.

Correction : A, B, $A \cup B$ sont non vides et majorés. Ils admettent donc tous une borne supérieure.

Comme $\sup A \leqslant \max(\sup A, \sup B)$, A est majoré par $\max(\sup A, \sup B)$. De même, B est majoré par $\max(\sup A, \sup B)$.

Par conséquent, $A \cup B$ est majoré par $\max(\sup A, \sup B)$ et donc : $\sup A \cup B \leqslant \max(\sup A, \sup B)$.

D'autre part, $A \subset A \cup B$. Donc $\sup A \leqslant \sup A \cup B$. De même, $\sup B \leqslant \sup A \cup B$.

Et donc $\max(\sup A, \sup B) \leqslant \sup A \cup B$.

Exercice 4 : Soient A une partie bornée et non vide de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On définit $\lambda A = \{\lambda a, a \in A\}$.
Montrer que lorsque $\lambda > 0$, on a $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$.
Que se passe-t-il si $\lambda \leqslant 0$?

Exercice 5 : A et B sont deux parties bornées et non vides de $\mathbb{R}$.
On définit $A + B = \{a + b, (a, b) \in A \times B\}$ et $A - B = \{a - b, (a, b) \in A \times B\}$.
Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ et $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de :

$$A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

en posant $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

Correction : $(u_{2k})_k$ tend vers $+\infty$ et donc A ne possède pas de majorant, ainsi A n'a pas de borne supérieure.

D'autre part toutes les valeurs de (u_n) sont positives et $(u_{2k+1})_k$ tend vers 0, donc $\inf A = 0$.

Exercice 2 : Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Correction :

$\mathbb{N}$: Pas de majorants, pas de borne supérieure, ni de plus grand élément. Les minorants : $]-\infty, 0]$. La borne inférieure : 0. Le plus petit élément : 0.

$\left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$: Les majorants : $\left[\frac{5}{4}, +\infty\right[$.
Les minorants : $]-\infty, -1]$.
La borne supérieure : $\frac{5}{4}$. La borne inférieure : -1.
Le plus grand élément : $\frac{5}{4}$. Pas de plus petit élément.

Exercice 3 : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que $\forall\, a \in A, \quad \alpha \leqslant a \leqslant \beta$.
On pose $B = \left\{\frac{1}{a}, a \in A\right\}$.
Montrer que B est bornée ; exprimer ses bornes supérieures et inférieures en fonction de celles de A.

Exercice 4 : L'ensemble suivant est-il majoré, minoré ?

Admet-il une borne supérieure, une borne inférieure, un plus grand élément, un plus petit élément ?

$$\mathrm{A} = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercice 5 : L'ensemble suivant est-il majoré, minoré ?

Admet-il une borne supérieure, une borne inférieure, un plus grand élément, un plus petit élément ?

$$\mathrm{B} = \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{n} - n^2, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Soit $\mathrm{A} = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Déterminer sup A et inf A.

Correction : Posons pour n entier naturel non nul $u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$ de sorte que

$$\mathrm{A} = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\} = \left\{ 0, \frac{1}{2} + 1, \frac{1}{3} - 1, \frac{1}{4} + 1, \frac{1}{5} - 1, ... \right\}.$$

Pour $n \geqslant 1$, $u_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 < u_{2n} \leqslant \frac{3}{2}$.

Et pour $n \geqslant 1$, $u_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -1 < u_{2n-1} \leqslant 0$.

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -1 < u_n \leqslant \frac{3}{2}$.

Donc, sup A et inf A existent dans $\mathbb{R}$ et, en particulier,

$$-1 \leqslant \inf \mathrm{A} \leqslant \sup \mathrm{A} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Comme $u_2 = \frac{3}{2}$ la borne supérieure est atteinte et on a :

$$\boxed{\sup \mathrm{A} = \max \mathrm{A} = \frac{3}{2}.}$$

Enfin, pour chaque entier naturel non nul n, on a

$$-1 \leqslant \inf \mathrm{A} \leqslant u_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}.$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\boxed{\inf \mathrm{A} = -1.}$$

(cette borne inférieure n'est pas un minimum).