Nom : . . . . **Prénom :** . . . .

Trigonométrie et Nombres Complexes I

Question de cours : *Relation entre* $\arctan(x)$ *et* $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 1 : Montrer que $\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{84}\right)\right)$.

Exercice 2 : Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 3 : Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $t = \arctan(\operatorname{sh}(x))$.

Établir les relations suivantes :

1. $\tan(t) = \operatorname{sh}(x)$
2. $\dfrac{1}{\cos(t)} = \operatorname{ch}(x)$
3. $\sin(t) = \operatorname{th}(x)$

Nom : .... **Prénom :** ....

Trigonométrie et Nombres Complexes I

Question de cours : *Démonstration de* $|z+z'|^2 = ...$ *et de l'inégalité triangulaire supérieure.*

Exercice 1 : Montrer que $(1-i)(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)(\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{60}\right)-i\sin\left(\frac{13\pi}{60}\right)\right)$.

Exercice 2 : Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 3 : Simplifier $\arctan\frac{1+x}{1-x}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Trigonométrie et Nombres Complexes I

Question de cours : *Démonstration de* $\cos(p) + \cos(q) = \ldots$ *en passant par les complexes.*

Exercice 1 : Montrer que $\dfrac{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}{1+i} = \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$.

Exercice 2 : À l'aide du changement d'indice $j = n-k$, calculer $\mathrm{T}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Exercice 3 :

1. Calculer $\mathrm{A} = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$
2. Résoudre $\arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3) = \dfrac{\pi}{4}$

Nom : .... **Prénom :** ....

Trigonométrie et Nombres Complexes I

Question de cours : *Démonstration de la formule de Moivre.*

Exercice 1 : Calculer $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{32}$.

Exercice 2 : Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

1. $\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$,
2. $\sin\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin(x) + \sin\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 0$,

Exercice 3 : Résoudre $\arcsin(x) = \arcsin\dfrac{4}{5} + \arcsin\dfrac{5}{13}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Trigonométrie et Nombres Complexes I

Question de cours : *La fonction arc tangente*

Exercice 1 : Calculer $(1+i\sqrt{3})^{2000}$.

Exercice 2 : Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

1. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{2}{\cos(2x)}$,
2. $\frac{1}{\tan(x)}-\tan(x)=\frac{2}{\tan(2x)}$.

Exercice 3 : Résoudre $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\arctan(x)$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Trigonométrie et Nombres Complexes I

Question de cours : *Relation entre* $\arctan(x)$ *et* $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 1 : Calculer $\left(\sqrt{3}-i\right)^{2009}$.

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans I les équations suivantes :

1. $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 = 0$, $\mathrm{I} = [0, 2\pi]$,
2. $\cos(nx) = 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Exercice 3 : Résoudre l'équation $\arccos(x) = \arccos\frac{1}{4} + \arcsin\frac{1}{3}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Trigonométrie et Nombres Complexes I

Question de cours : *Démonstration de $|z+z'|^2 = \ldots$ et de l'inégalité triangulaire supérieure.*

Exercice 1 : Montrer que $\dfrac{\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}$.

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans I les équations suivantes :

1. $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 = 0$, $\mathrm{I} = [0, 2\pi]$,
2. $\cos(nx) = 0$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Exercice 3 :

1. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos(x)$.
2. Montrer que

$$\begin{cases} \forall\, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], & \arccos(4x^3-3x) = 3\arccos(x) \\ \forall\, x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], & \arccos(4x^3-3x) = 2\pi - 3\arccos(x) \end{cases}$$

3. Déterminer une expression simplifiée de $\arccos(4x^3-3x)$ si $x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Trigonométrie et Nombres Complexes I

Question de cours : *Démonstration de* $\cos(p)+\cos(q)=\ldots$ *en passant par les complexes.*

Exercice 1 : Donner le module et l'argument de $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}-\sqrt{3}(1-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}\right)^2$.

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans I les équations suivantes :

1. $|\sin(nx)|=1$,
2. $\sin(x)=\tan(x)$, $\mathrm{I}=[0,2\pi]$.

Exercice 3 : On considère l'équation (E) : $x^3-3x+1=0$.

1. Montrer que (E) a trois solutions, et les encadrer par des entiers consécutifs.
2. Pour $\theta\in\mathbb{R}$, exprimer $\sin 3\theta$ en fonction de $\sin\theta$.
3. En posant $x=2\sin\theta$, montrer que x est solution de (E) $\iff$ $\sin 3\theta=\dfrac{1}{2}$.
4. Déterminer la valeur exacte des solutions de E.

Nom : .... **Prénom :** ....

Trigonométrie et Nombres Complexes I

Question de cours : *Démonstration de la formule de Moivre.*

Exercice 1 : Calculer $(1+i\sqrt{3})^5+(1-i\sqrt{3})^5$.

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\cos^2(x)-\sin^2(x)=\sin(3x)$.

Exercice 3 :

1. Pour $k\in\mathbb{N}$, calculer $\arctan(k+1)-\arctan(k)$.
2. Montrer que la suite (S_n) où $\mathrm{S}_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\arctan\frac{1}{k^2+k+1}$ converge, et déterminer la limite.

Nom : .... **Prénom :** ....

Trigonométrie et Nombres Complexes I

Question de cours : *La fonction arc tangente*

Exercice 1 : Étudier le signe de $\cos(3x) + \cos(5x)$.

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 1$.

Exercice 3 : Résoudre l'équation $\tan(3\arcsin(x)) = 1$. On exprimera les trois solutions au moyen de radicaux.

Nom : .... **Prénom :** ....

Trigonométrie et Nombres Complexes I

Question de cours : *Relation entre* $\arctan(x)$ *et* $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 1 : Étudier le signe de $\cos(x) - \cos(3x)$.

Exercice 2 : À quelle condition sur le réel m l'équation $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = m$ a-t-elle une solution réelle ?

Résoudre cette équation pour $m = \sqrt{2}$.

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\arcsin(2x) = \arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{2}).$$

Nom : .... **Prénom :** ....

Trigonométrie et Nombres Complexes I

Question de cours : *Démonstration de* $|z+z'|^2 = \ldots$ *et de l'inégalité triangulaire supérieure.*

Exercice 1 : Déterminer le domaine de dérivabilité puis la fonction dérivée de $x \longmapsto x^2 \cos(x) \sin(x)$.

Exercice 2 : Résoudre dans I les inéquations suivantes :

1. $\cos(x) \leqslant \frac{1}{2}$, $\mathrm{I} = [-\pi, \pi]$,
2. $\cos\left(\frac{x}{3}\right) \leqslant \sin\left(\frac{x}{3}\right)$, $\mathrm{I} = [0, 2\pi]$.

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$2\arcsin(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$

Nom : .... **Prénom :** ....

Trigonométrie et Nombres Complexes I

Question de cours : *Démonstration de* $\cos(p) + \cos(q) = ...$ *en passant par les complexes.*

Exercice 1 : Déterminer le domaine de dérivabilité puis la fonction dérivée de $\dfrac{\cos(x)}{1+\sqrt{x}}$.

Exercice 2 : Résoudre dans I les inéquations suivantes :

1. $\sin(x) \geqslant -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$,
2. $\cos^2(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{I} = [0, 2\pi]$.

Exercice 3 : Étude complète de $f : x \longmapsto = \dfrac{1+x^2}{x^3}(\arctan(x) - \dfrac{x}{1+x^2})$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Trigonométrie et Nombres Complexes I

Question de cours : *Démonstration de la formule de Moivre.*

Exercice 1 : Déterminer le domaine de dérivabilité puis la fonction dérivée de $\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}$.

Exercice 2 : Déterminer les complexes z tels que z, $\dfrac{1}{z}$ et $z-1$ aient même module.

Exercice 3 : Simplifier en précisant le domaine de validité

$$\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$

Nom : .... **Prénom :** ....

Trigonométrie et Nombres Complexes I

Question de cours : *La fonction arc tangente*

Exercice 1 : Déterminer le domaine de dérivabilité puis la fonction dérivée de $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)+2}}$.

Exercice 2 : On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
Montrer que :

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\} \iff \exists x \in \mathbb{R} \,/\, z = \frac{1+ix}{1-ix}.$$

Exercice 3 : Montrer que $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{8} = \arctan\dfrac{2}{3}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Trigonométrie et Nombres Complexes I

Question de cours : *Démonstration de* $\cos(p) + \cos(q) = \ldots$ *en passant par les complexes.*

Exercice 1 : Déterminer le domaine de dérivabilité puis la fonction dérivée de $x \longmapsto \cos^4(x) - \sin^4(x)$.

Exercice 2 : Mettre $\dfrac{1+2j}{1+j^4}$ sous la forme $a + bj$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : Montrer que $\forall\, x \in [1, +\infty[, \quad \arccos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) + \arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = \pi.$

Nom : .... **Prénom :** ....

Trigonométrie et Nombres Complexes I

Question de cours : *Démonstration de la formule de Moivre.*

Exercice 1 : Calculer le module et l'argument de $\dfrac{\tan\varphi - \mathrm{i}}{\tan\varphi + \mathrm{i}}$ où $\varphi \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 : Exprimer $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Exercice 3 : Montrer $\forall\, x \in]0,1[, \quad \arctan\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \arccos(x)$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Trigonométrie et Nombres Complexes 1

Question de cours : *La fonction arc tangente*

Exercice 1 : Calculer le module et l'argument de $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$.

Exercice 2 : Calculer les valeurs exactes de :

1. $\sin\left(\dfrac{25\pi}{3}\right)$.
2. $\cos\left(\dfrac{19\pi}{4}\right)$.
3. $\tan\left(\dfrac{37\pi}{6}\right)$.

Exercice 3 : Montrer $\forall\, x \in]-1,0[,\quad \arctan\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \arccos(x) - \pi$.