Nom : .... **Prénom :** ....

Fonctions de référence, sommes et produits finis, fonctions circulaires (trigo)

Question de cours : Croissances comparées : formules et démonstration.

Exercice 1 : Calculer les valeurs exactes de :

1. $\sin\left(\frac{25\pi}{3}\right)$.
2. $\cos\left(\frac{19\pi}{4}\right)$.
3. $\tan\left(\frac{37\pi}{6}\right)$.

Exercice 2 :

1. Vérifier que $\forall\, k \in \mathbb{N}^\star, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
2. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^\star, \mathrm{T}_n = \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$.

Exercice 3 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + e^x \end{array}$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable et donner $(f^{-1})'(1)$.
3. Montrer que f^{-1} est deux fois dérivable et donner $(f^{-1})''(1)$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Fonctions de référence, sommes et produits finis, fonctions circulaires (trigo)

Question de cours : Limites remarquables des fonctions hyperboliques : formules et démonstration (de une ou plusieurs des limites).

Exercice 1 : Exprimer $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exercice 2 : Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} (k \times k!) = (n+1)! - 1$.

Exercice 3 : On considère la fonction f définie sur $\mathrm{I} = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera.
2. Sans déterminer f^{-1}, déterminer le plus grand intervalle $\mathrm{K} \subset \mathrm{J}$ sur lequel f^{-1} est dérivable. Déterminer alors $(f^{-1})'(x)$ pour $x \in \mathrm{K}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Fonctions de référence, sommes et produits finis, fonctions circulaires (trigo)

Question de cours : Valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et démonstration par calcul direct, sans récurrence.

Exercice 1 : Linéariser les polynômes trigonométriques suivants $1+\cos^2(x)$, $\cos^3(x)+2\sin^2(x)$.

Exercice 2 : À l'aide d'un changement d'indices, calculer $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2$.

Exercice 3 : Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\ln(1+x)}-\sqrt{\ln x}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Fonctions de référence, sommes et produits finis, fonctions circulaires (trigo)

Question de cours : Formule du binôme de Newton.

Exercice 1 : Simplifier, suivant la valeur de $x\in[-\pi,\pi]$, l'expression $\sqrt{1+\cos(x)}+\left|\frac{\sin(x)}{2}\right|$.

Exercice 2 : À l'aide d'un changement d'indices, calculer $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2}{k}\right)$.

Exercice 3 : Discutez, suivant la valeur du paramètre $\lambda\in\mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $\ln(\lambda x)=x$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Fonctions de référence, sommes et produits finis, fonctions circulaires (trigo)

Question de cours : Somme des termes d'une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q \neq 1$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \ldots$$

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et placer sur le cercle trigonométrique les images des solutions.

1. $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$,
2. $\tan(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,
3. $\sin(5x) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{3} + x\right)$,

Exercice 2 : Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}$.

Exercice 3 : On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \arccos(\operatorname{th}(x)) + \arctan(\operatorname{sh}(x))$$

1. Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de f.
2. Calculer la dérivée de f.
3. En déduire une expression simplifiée de f.
4. Résoudre l'équation $\operatorname{th}(x) = \dfrac{5}{13}$ puis montrer que

$$\arccos\left(\frac{5}{13}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Nom : .... **Prénom :** ....

Fonctions de référence, sommes et produits finis, fonctions circulaires (trigo)

Question de cours : Formule de Bernoulli : $a^n - b^n = \ldots$.

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et placer sur le cercle trigonométrique les images des solutions.

1. $\sin(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,
2. $\tan(x) = -1$,
3. $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$,

Exercice 2 : Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$.

Exercice 3 :

1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant :
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(\operatorname{ch} x) = e^x.$$
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(e^x) = \operatorname{ch} x.$$
Préciser le nombre de solutions.
3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(e^x) = \operatorname{ch} x.$$
Préciser le nombre de solutions ; y a t-il des solutions continues sur $\mathbb{R}^+$?

Nom : .... **Prénom :** ....

Fonctions de référence, sommes et produits finis, fonctions circulaires (trigo)

Question de cours : Calcul des valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et placer sur le cercle trigonométrique les images des solutions.

1. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
2. $\cos(3x) = \sin(x)$.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

Exercice 3 : Soit x un réel fixé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{C}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\,(kx) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{sh}\,(kx).$$

Calculer C_n et S_n.

Nom : .... **Prénom :** ....

Fonctions de référence, sommes et produits finis, fonctions circulaires (trigo)

Question de cours : Démonstration de $\cos(a+b) = \ldots$ et $\sin(a+b) = \ldots$.

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans I les équations suivantes :

1. $\sin(2x) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{I} = [0, 2\pi]$,
2. $12\cos^2(x) - 8\sin^2(x) = 2$, $\mathrm{I} = [-\pi, \pi]$.

Exercice 2 : Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j|$.

Exercice 3 : Étude complète $x \longmapsto \ln|\mathrm{sh}\, x - 1|$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Fonctions de référence, sommes et produits finis, fonctions circulaires (trigo)

Question de cours : Croissances comparées : formules et démonstration.

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\cos(5x) + \cos(3x) \leqslant \cos(x)$.

Exercice 2 : Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j+1}$.

Exercice 3 : Étude complète $x \longmapsto \ln|\operatorname{sh} x - 1|$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Fonctions de référence, sommes et produits finis, fonctions circulaires (trigo)

Question de cours : Croissances comparées : formules et démonstration.

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$, $2\cos^2(x) - 9\cos(x) + 4 > 0$.

Exercice 2 : Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i+j)$.

Exercice 3 :

1. Montrer que pour tout réel x non nul, on a : $\operatorname{th}(x) = \dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \dfrac{1}{\operatorname{th}(x)}$.
2. En déduire la valeur de $u_n = 2^0 \operatorname{th}(2^0 x) + 2^1 \operatorname{th}(2^1 x) + \ldots + 2^{n-1} \operatorname{th}(2^{n-1} x)$ pour n entier naturel non nul et x réel non nul donnés puis calculer la limite de (u_n).

Nom : .... **Prénom :** ....

Fonctions de référence, sommes et produits finis, fonctions circulaires (trigo)

Question de cours : Limites remarquables des fonctions hyperboliques : formules et démonstration (de une ou plusieurs des limites).

Exercice 1 : À quelle condition sur le réel m l'équation $\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)=m$ a-t-elle une solution réelle ?

Résoudre cette équation pour $m=\sqrt{2}$.

Exercice 2 : Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)$.

Exercice 3 : Simplifier l'expression $\dfrac{2\operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{sh}(2x)}{x-\ln(\operatorname{ch}x)-\ln 2}$ et donner ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Fonctions de référence, sommes et produits finis, fonctions circulaires (trigo)

Question de cours : Valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$ et démonstration par calcul direct, sans récurrence.

Exercice 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)=\sqrt{2}$.
2. À l'aide une méthode similaire, résoudre l'équation $\cos(x)+\sin(x)=1$.

Exercice 2 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 3 : Soit x un réel fixé. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{C}_n=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{ch}(kx)\qquad\text{et}\qquad\mathrm{S}_n=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sh}(kx).$$

Calculer C_n et S_n.

Nom : .... **Prénom :** ....

Fonctions de référence, sommes et produits finis, fonctions circulaires (trigo)

Question de cours : Formule du binôme de Newton.

Exercice 1 : Résoudre dans I les inéquations suivantes :

1. $\cos(x) > \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, $\mathrm{I} = [0, 2\pi]$,
2. $\cos^2(x) \geqslant \cos(2x)$, $\mathrm{I} = [-\pi, \pi]$.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice 3 : Soient a et b deux réels positifs tels que $a^2 - b^2 = 1$. Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{ch}\,(x) + \mathrm{ch}\,(y) = 2a \\ \mathrm{sh}\,(x) + \mathrm{sh}\,(y) = 2b \end{array}\right.$$

Nom : .... **Prénom :** ....

Fonctions de référence, sommes et produits finis, fonctions circulaires (trigo)

Question de cours : Somme des termes d'une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q \neq 1$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \ldots$$

Exercice 1 : Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to \mathrm{e}} \frac{x^2 - e^x}{x - e}$

Exercice 2 : Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{sh}\,(2+x) + \mathrm{sh}\,(2+2x) + \ldots + \mathrm{sh}\,(2+100x) = 0$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Fonctions de référence, sommes et produits finis, fonctions circulaires (trigo)

Question de cours : Formule de Bernoulli : $a^n - b^n = ...$

Exercice 1 : Résoudre l'inéquation $\ln(2x+1) + \ln(x+3) \leqslant \ln 3$.

Exercice 2 : Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 3 : À l'aide d'un changement d'indices, calculer $\sum_{k=1}^{n}, k2^k$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Fonctions de référence, sommes et produits finis, fonctions circulaires (trigo)

Question de cours : Calcul des valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 1 : Étudier complète de la fonction $x \longmapsto \sqrt{\frac{1}{x}+5} - \sqrt{\frac{1}{x}+2}$.

Exercice 2 : À l'aide du changement d'indice $j = n-k$, calculer $\mathrm{T}_n = \sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Exercice 3 : Calculer $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{i}{j}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Fonctions de référence, sommes et produits finis, fonctions circulaires (trigo)

Question de cours : Démonstration de $\cos(a+b) = \ldots$ et $\sin(a+b) = \ldots$.

Exercice 1 : Étudier complète de la fonction $x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}}$.

Exercice 2 : Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

1. $\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$,
2. $\sin\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin(x) + \sin\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 0$,

Exercice 3 :

1. Vérifier que $\forall\, k \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.
2. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $\mathrm{T}_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Fonctions de référence, sommes et produits finis, fonctions circulaires (trigo)

Question de cours : Croissances comparées : formules et démonstration.

Exercice 1 : Tracer rapidement l'allure du graphe des fonctions :

1. $x \longmapsto \sqrt{3x-4}$.
2. $x \longmapsto \dfrac{5}{2x+1}$.
3. $x \longmapsto 1 + \ln(2-x)$.

Exercice 2 : Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

1. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) + \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{2}{\cos(2x)}$,
2. $\dfrac{1}{\tan(x)} - \tan(x) = \dfrac{2}{\tan(2x)}$.

Exercice 3 : Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k \times k!) = (n+1)! - 1$.