

Nom :

Prénom :

Applications et Fonctions de référence

Question de cours : La fonction logarithme népérien : définition, continuité, dérivabilité, monotonie, ...

Exercice 1 : Résoudre l'inéquation : $\ln(2x + 1) + \ln(x + 3) \leq \ln 3$.

Exercice 2 :

- 1 Montrer, grâce au TVI strictement monotone, que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^3 - 1}$ est bijective de $[1, +\infty[$ sur son image (à préciser).
- 2 Retrouver le résultat de la question précédente et déterminer une expression explicite de f^{-1} en résolvant l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in [1, +\infty[$.

Exercice 3 : Déterminer l'image de la fonction $x \mapsto x^n \ln x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Nom :

Prénom :

Applications et Fonctions de référence

Question de cours : Limites remarquable de la fonction \ln avec démonstration de la limite de $\frac{\ln(x)}{x}$.

Exercice 1 :

- 1 Étudier $f : x \mapsto \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$.
- 2 Montrer que f est bijective. Calculer f^{-1} .
- 3 Tracer \mathcal{C}_f et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

Exercice 2 : Étudier complète de la fonction $x \mapsto \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{\frac{1}{x(x-1)}}$.

Exercice 3 : Résoudre dans \mathbb{R} le système suivant :

$$\begin{cases} xy = a^2 \\ \ln^2(x) + \ln^2(y) = \frac{5}{2} \ln^2(a) \end{cases}$$

Nom :

Prénom :

Applications et Fonctions de référence

Question de cours : Propriétés algébriques du logarithme. Démonstration pour le logarithme du produit,...

Exercice 1 : Résoudre l'inéquation $\ln(2x+1) + \ln(x+3) \leq \ln 3$.

Exercice 2 : On note f la fonction $x \mapsto \sqrt{2-x}$.

- 1 Tracer rapidement l'allure du graphe de f .
- 2 Déterminer les points fixes de f et montrer que $[0, 2]$ et $[-2, 2]$ sont stables par f .

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto x + e^x$$

- 1 Montrer que f est bijective.
- 2 Montrer que f^{-1} est dérivable et donner $(f^{-1})'(1)$.
- 3 Montrer que f^{-1} est deux fois dérivable et donner $(f^{-1})''(1)$.

Nom :

Prénom :

Applications et Fonctions de référence

Question de cours : La fonction logarithme népérien : définition, continuité, dérivabilité, monotonie, ...

Exercice 1 : Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$.

- 1 Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.
- 2 Expliciter l'application réciproque de f .

Exercice 2 : Étudier complète de la fonction $x \mapsto \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$.

Exercice 3 : On considère la fonction f définie sur $I = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.

- 1 Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera.
- 2 Sans déterminer f^{-1} , déterminer le plus grand intervalle $K \subset J$ sur lequel f^{-1} est dérivable. Déterminer alors $(f^{-1})'(x)$ pour $x \in K$.

Nom :

Prénom :

Applications et Fonctions de référence

Question de cours : Limites remarquable de la fonction \ln avec démonstration de la limite de $\frac{\ln(x)}{x}$.

Exercice 1 : Étudier complète de la fonction $x \mapsto x e^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 2 : Discutez, suivant la valeur du paramètre $a > 0$, le nombre de solutions de l'équation $a^x = x$.

Exercice 3 : Discutez, suivant la valeur du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $\ln(\lambda x) = x$.

Nom :

Prénom :

Applications et Fonctions de référence

Question de cours : Propriétés algébriques du logarithme. Démonstration pour le logarithme du produit,...

Exercice 1 : Tracer rapidement l'allure du graphe des fonctions :

- 1 $x \mapsto \sqrt{3x-4}$.
- 2 $x \mapsto \frac{5}{2x+1}$.
- 3 $x \mapsto 1 + \ln(2-x)$.

Exercice 2 : Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

- 1 Déterminer $f(\mathbb{R})$.
- 2 Montrer que la corestriction ϕ de f à $f(\mathbb{R})$ est bijective.
- 3 Déterminer sa bijection réciproque ϕ^{-1} .

Exercice 3 : Résoudre l'équation $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

Nom :

Prénom :

Applications et Fonctions de référence

Question de cours : La fonction logarithme népérien : définition, continuité, dérivabilité, monotonie, ...

Exercice 1 : Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est bijective de $[1, +\infty[$ sur son image (à préciser) et déterminer une expression explicite de sa réciproque.

Exercice 2 : Construire le graphe de la fonction définie par $f_1(x) = 2|2x - 1| - |x + 2| + 3x$.

Exercice 3 : Résoudre l'équation $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

Nom :

Prénom :

Applications et Fonctions de référence

Question de cours : Limites remarquable de la fonction \ln avec démonstration de la limite de $\frac{\ln(x)}{x}$.

Exercice 1 : Soit $f : x \mapsto \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + dx + 3}$.

Déterminer les réels a, b, c tels que :

- Le point $A(2, -11)$ appartient à la courbe de f , et sa tangente en ce point ait pour coefficient directeur -9 .
- Les droites d'équation $x = 1$ et $y = 2$ soient asymptotes à \mathcal{C}_f .

Exercice 2 : Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\ln(-x - 2) = \ln\left(\frac{-x - 11}{x + 3}\right)$.

Exercice 3 : Discutez, suivant la valeur du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $\ln(\lambda x) = x$.

Nom :

Prénom :

Applications et Fonctions de référence

Question de cours : Propriétés algébriques du logarithme. Démonstration pour le logarithme du produit,...

Exercice 1 : Soit $f : x \mapsto x + \ln(1 + e^{-2x})$.

Étudier la fonction f (parité, asymptotes).

Exercice 2 : Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\ln(-x-2) = \ln\left(\frac{-x-11}{x+3}\right)$.

Exercice 3 : Résoudre l'équation $x^y = y^x$ où x et y sont des entiers positifs non nuls.

Nom :

Prénom :

Applications et Fonctions de référence

Question de cours : La fonction logarithme népérien : définition, continuité, dérivabilité, monotonie, ...

Exercice 1 : Étudier la fonction définie par :

$$x \mapsto x e^{\frac{1}{\ln x}}$$

Exercice 2 : On considère deux segments I et J de \mathbb{R} non réduits à un point.

Montrer qu'il existe une bijection de l'un sur l'autre.

Exercice 3 : Résoudre l'équation $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

Nom :

Prénom :

Applications et Fonctions de référence

Question de cours : Limites remarquable de la fonction \ln avec démonstration de la limite de $\frac{\ln(x)}{x}$.

Exercice 1 : Étudier la fonction définie par :

$$x \mapsto x e^{\frac{1}{\ln x}}$$

Exercice 2 : Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

Exercice 3 : Soit E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$.
 On définit $\phi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ et $\psi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$.

$$\begin{matrix} X & X \cap A & X & X \cup A \end{matrix}$$

 Montrer que :
 ■ ϕ est injective $\Leftrightarrow \phi$ est surjective $\Leftrightarrow A = E$.
 ■ ψ est surjective $\Leftrightarrow \psi$ est injective $\Leftrightarrow A = \emptyset$.

Nom :

Prénom :

Applications et Fonctions de référence

Question de cours : Propriétés algébriques du logarithme. Démonstration pour le logarithme du produit,...

Exercice 1 : Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\ln(1+x)} - \sqrt{\ln x}$.

Exercice 2 : Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $x^{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 3 : Démontrer les inégalités :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) \text{ pour } x > 0 \quad \text{et} \quad 1+x \leq e^x \text{ pour tout } x \text{ réel.}$$

Nom :

Prénom :

Applications et Fonctions de référence

Question de cours : La fonction logarithme népérien : définition, continuité, dérivabilité, monotonie, ...

Exercice 1 : Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$.

Exercice 2 : Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x \leq 3$.

Exercice 3 : Construire le graphe de la fonction définie par $f_3(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$.

Nom :

Prénom :

Applications et Fonctions de référence

Question de cours : Limites remarquable de la fonction \ln avec démonstration de la limite de $\frac{\ln(x)}{x}$.

Exercice 1 : Déterminer $\lim_{x \rightarrow e} \frac{x^2 - e^x}{x - e}$.

Exercice 2 : Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\ln(-x - 2) = \ln\left(\frac{-x - 11}{x + 3}\right)$.

Exercice 3 : Étudier complète de la fonction $x \mapsto x^x$.

Nom :

Prénom :

Applications et Fonctions de référence

Question de cours : Propriétés algébriques du logarithme. Démonstration pour le logarithme du produit,...

Exercice 1 : Étudier l'injectivité et la surjectivité de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
 $(x, y) \qquad (2x - y, x + 2y)$

Exercice 2 : Résoudre l'équation $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

Exercice 3 : Résoudre l'équation $x^y = y^x$ où x et y sont des entiers positifs non nuls.

Nom :

Prénom :

Applications et Fonctions de référence

Question de cours : La fonction logarithme népérien : définition, continuité, dérivabilité, monotonie, ...

Exercice 1 : Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

1 $x^{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{2}$.
2 $4^x - 6^x = 2 \times 9^x$.

Exercice 2 : Soit E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$.
 On définit $\phi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ et $\psi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$.
 $X \qquad X \cap A \qquad X \qquad X \cup A$
 Montrer que :
 ■ ϕ est injective $\iff \phi$ est surjective $\iff A = E$.
 ■ ψ est surjective $\iff \psi$ est injective $\iff A = \emptyset$.

Exercice 3 : Construire le graphe de la fonction définie par $f_5(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ (à étudier sur $]0, +\infty[$).

Nom :

Prénom :

Applications et Fonctions de référence

Question de cours : Limites remarquable de la fonction \ln avec démonstration de la limite de $\frac{\ln(x)}{x}$.

Exercice 1 : Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

1 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x \leq 3.$

2 $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$

Exercice 2 :

1 Sur quels intervalles les plus grands possible, la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ est-elle injective ?

2 Déterminer $f([-2, 4])$.

Exercice 3 : Étudier la fonction définie par

$$x \mapsto x \times 2^{-x}.$$

Donner l'équation de la tangente en $\frac{2}{\ln(2)}$.

Nom :

Prénom :

Applications et Fonctions de référence

Question de cours : Propriétés algébriques du logarithme. Démonstration pour le logarithme du produit,...

Exercice 1 : Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

1 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{3}{2}.$

2 $\frac{2^x}{2^x + 1} < \frac{1}{3}.$

Exercice 2 : Étudier l'injectivité et la surjectivité de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

$$(x, y) \longmapsto (x - 3y, -2x + 6y)$$

Exercice 3 : Construire le graphe de la fonction définie par $f_6(x) = \log_2(1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6))$.