Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et fonctions réelles

Question de cours : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $f^{(n)} = f \circ f \circ f \dots \circ f$ (composée successive de n fonctions f).
Donner l'expression de $f^{(2)}$ et $f^{(3)}$. Conjecturer une expression de $f^{(n)}$. et prouver cette conjecture.

Exercice 2 : Soit $s_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1, s_{n+1} = s_n + 3n(n+1)$.
Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un multiple de 6.

Exercice 3 : Soient E un ensemble, $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathfrak{P}(\mathrm{E})$. Montrer :

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{C} \iff \mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{B}} = \mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{C}},$$

où on a noté $\overline{\mathrm{B}}$ (resp. $\overline{\mathrm{C}}$) le complémentaire de B (resp. C) dans E.

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et fonctions réelles

Question de cours : Montrer que $\forall\, f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists!(g,h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), g$ paire, h impaire, tel que $f = g + h$.

Exercice 1 : Parmi les propositions suivantes, quelles sont les négations de la proposition

$$(\forall\, x \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x))?$$

1. $\exists\, x \in \mathrm{E}, (\rceil \mathrm{Q}(x) \Rightarrow \rceil \mathrm{P}(x))$,
2. $\exists\, x \in \mathrm{E}, (\mathrm{P}(x) \wedge \rceil \mathrm{Q}(x))$,
3. $\exists\, x \notin \mathrm{E}, (\mathrm{P}(x) \wedge \rceil \mathrm{Q}(x))$,

Exercice 2 : Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 3 : Soit f une application de E dans F.
Soit g l'application de $\mathscr{P}(\mathrm{F}) \implies \mathscr{P}(\mathrm{E})$ définie par $\forall\, \mathrm{Y} \subset \mathrm{F}, g(\mathrm{Y}) = f^{-1}(\mathrm{Y})$.

1. Montrer que g est surjective si et seulement si f est injective.
2. Montrer que g est injective si et seulement si f est surjective.

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et fonctions réelles

Question de cours : Que dire de l'image directe et réciproque de l'union de deux parties par une application ?

Exercice 1 : Parmi les propositions suivantes, quelles sont les négations de la proposition

$$(\forall x \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x))?$$

1. $\exists x \in \mathrm{E}, (\mathrm{Q}(x) \Rightarrow \mathrm{P}(x))$,
2. $\exists x \in \mathrm{E}, (\rceil \mathrm{Q}(x) \Rightarrow \rceil \mathrm{P}(x))$,
3. $\exists x \notin \mathrm{E}, (\rceil \mathrm{Q}(x) \Rightarrow \rceil \mathrm{P}(x))$.

Exercice 2 : Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 3$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - 3 > \dfrac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 3 : Écrire $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathrm{E})\,)$ lorsque $\mathrm{E} = \{a, b\}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et fonctions réelles

Question de cours : Que dire de l'image directe et réciproque de l'intersection de deux parties par une application ?

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \implies \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \Rightarrow x \leqslant 0$.

Exercice 2 :

1. Dans le plan, on considère trois droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ formant un "vrai" triangle : elles ne sont pas concourantes, et il n'y en a pas deux parallèles. Donner le nombre R_3 de régions (zones blanches) découpées par ces trois droites.
2. On considère quatre droites $\Delta_1, \dots, \Delta_4$, telles qu'il n'en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Donner le nombre R_4 de régions découpées par ces quatre droites.
3. On considère n droites $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, telles qu'il n'en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Soit R_n le nombre de régions délimitées par $\Delta_1 \dots \Delta_n$, et R_{n-1} le nombre de régions délimitées par $\Delta_1 \dots \Delta_{n-1}$. Montrer que $\mathrm{R}_n = \mathrm{R}_{n-1} + n$.
4. Calculer par récurrence le nombre de régions délimitées par n droites en position générale, c'est-à-dire telles qu'il n'en existe pas trois concourantes ni deux parallèles.

Exercice 3 : Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application, $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$.
Montrer que $f(\mathrm{A} \cap f^{-1}(\mathrm{B})) = f(\mathrm{A}) \cap \mathrm{B}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et fonctions réelles

Question de cours : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall\, \mathrm{M} > 0, \exists\, \mathrm{A} > 0, \forall\, x \geqslant \mathrm{A}, f(x) > \mathrm{M}$.
2. $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0, \forall\, (x, y) \in \mathrm{I}^2, |x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 2 : Montrer pour tous $x \in [0\,;1]$ et $n \in \mathbb{N}$: ; $1 - nx \leqslant (1 - x)^n \leqslant \dfrac{1}{1 + nx}$.

Exercice 3 : Soient f une application de E vers F et $(\mathrm{B}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille de parties d'un ensemble F indexée par un ensemble J.

Montrer que $f^{-1}(\bigcap_{i \in \mathrm{J}} \mathrm{B}_i) = \bigcap_{i \in \mathrm{J}} f^{-1}(\mathrm{B}_i)$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et fonctions réelles

Question de cours : Montrer que $\forall\, f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists!(g, h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), g$ paire, h impaire, tel que $f = g + h$.

Exercice 1 : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$. Que dire de f quand elle satisfait les affirmations suivantes ?

1. $\forall\, y \in \mathrm{F}, \forall\, x \in \mathrm{E}, f(x) = y$,
2. $\forall\, y \in \mathrm{F}, \exists\, x \in \mathrm{E}, f(x) = y$,
3. $\exists\, y \in \mathrm{F}, \forall\, x \in \mathrm{E}, f(x) = y$,
4. $\exists\, y \in \mathrm{F}, \exists\, x \in \mathrm{E}, f(x) = y$.

Exercice 2 : On remarque que $(1+\sqrt{2}) = 1+\sqrt{2}$, $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$, et $(1+\sqrt{2})^3 = 7+5\sqrt{2}$.
Le but est de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha_n \in \mathbb{N}$ tel que $(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{\alpha_n} + \sqrt{\alpha_n + 1}$.

1. Montrer qu'il existe deux entiers a_n et b_n tel que
$$\begin{cases} (1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \\ (1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}. \end{cases}$$
2. Établir alors que $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$ et en déduire le résultat attendu.

Exercice 3 : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F.

1. Montrer que si $\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$, $f(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) \cup f(\mathrm{B})$.
2. Est-ce vrai pour l'intersection ?

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et fonctions réelles

Question de cours : Que dire de l'image directe et réciproque de l'union de deux parties par une application ?

Exercice 1 : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$. Que dire de f quand elle satisfait les affirmations suivantes ?

1. $\forall x \in \mathrm{E}, \forall y \in \mathrm{F}, f(x) = y$,
2. $\forall x \in \mathrm{E}, \exists y \in \mathrm{F}, f(x) = y$,
3. $\exists x \in \mathrm{E}, \forall y \in \mathrm{F}, f(x) = y$,
4. $\exists x \in \mathrm{E}, \exists y \in \mathrm{F}, f(x) = y$.

Exercice 2 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute fonction croissante f de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même possède un point fixe *i.e.* $\exists k \in [\![1, n]\!], \quad f(k) = k$.

Exercice 3 : Comparer :

- $\mathcal{P}(\mathrm{E} \cap \mathrm{F})$ et $\mathcal{P}(\mathrm{E}) \cap \mathcal{P}(\mathrm{F})$;
- $\mathcal{P}(\mathrm{E} \cup \mathrm{F})$ et $\mathcal{P}(\mathrm{E}) \cup \mathcal{P}(\mathrm{F})$;
- $\mathcal{P}(\mathrm{E} \times \mathrm{F})$ et $\mathcal{P}(\mathrm{E}) \times \mathcal{P}(\mathrm{F})$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et fonctions réelles

Question de cours : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 1 : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans lui-même.

On définit une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant $f(n) = f_n(n) + 1$.

Démontrer qu'il n'existe aucun $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$.

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$.

Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n, puis la prouver par récurrence.

Exercice 3 : Montrer que $\begin{cases} \mathrm{B} \setminus \mathrm{C} \subset \mathrm{A} \\ \mathrm{C} \setminus \mathrm{D} \subset \mathrm{A} \end{cases} \implies \mathrm{B} \setminus \mathrm{D} \subset \mathrm{A}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et fonctions réelles

Question de cours : Montrer que $\forall\, f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists!(g,h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), g$ paire, h impaire, tel que $f = g + h$.

Exercice 1 : Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ de réels vérifiant

$$0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant \dots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n \leqslant 1.$$

On veut démontrer la propriété suivante : « il y a au moins deux de ces réels dont la distance est inférieure ou égale à $\dfrac{1}{n}$.

1. Écrire à l'aide de quantificateurs la propriété.
2. En déduire une formulation équivalente pour les valeurs $x_i - x_{i-1}$.
3. Écrire la négation de cette dernière proposition.
4. Démontrer la propriété.

Exercice 2 : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$. Que pensez-vous des affirmations suivantes ?

1. $\forall\ x \in \mathrm{E} \quad \forall\ y \in \mathrm{F} \quad f(x) = y$.
2. $\forall\ x \in \mathrm{E} \quad \exists\ y \in \mathrm{F}$ tel que $\quad f(x) = y$.
3. $\exists\ x \in \mathrm{E}$ tel que $\quad \forall\ y \in \mathrm{F} \quad f(x) = y$.

Exercice 3 : Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer de deux manière que :

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \implies \mathrm{A} = \mathrm{B}.$$