Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et fonctions réelles

Question de cours : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall\, \varepsilon > 0,\ |a| \leqslant \varepsilon \implies a = 0$.

Exercice 2 : Montrer $\forall\, x \geqslant 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

Exercice 3 : Étant donné $(\mathrm{A}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille d'ensembles, et B un ensemble, tous inclus dans un ensemble E.

1. Montrer que $\mathrm{B} \cap \left(\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i\right) = \bigcup_{i\in\mathrm{I}} (\mathrm{B}\cap \mathrm{A}_i)$.
2. Déterminer $\mathrm{I} = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, n\right]$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et fonctions réelles

Question de cours : Montrer que $\forall\, f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists!(g,h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), g$ paire, h impaire, tel que $f = g + h$.

Exercice 1 : Exprimer les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs (f étant une fonction réelle) :

1. L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
2. La fonction f est constante.

Exercice 2 : Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 3 : À quelle condition sur f a-t-on : $\forall\ \mathrm{A} \subset \mathrm{E},\ f(\mathrm{E}\setminus \mathrm{A}) = \mathrm{F} \setminus f(\mathrm{A})$?

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et fonctions réelles

Question de cours : Que dire de l'image directe et réciproque de l'union de deux parties par une application ?

Exercice 1 : Exprimer les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs (f étant une fonction réelle) :

1. Tout réel a (au moins) un antécédent par f.
2. La fonction f ne prend pas de valeur négative.

Exercice 2 : Soit $q \in \mathbb{R}$, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 3 : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{E}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$ et $f^0 = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

Soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, $\mathrm{A}_n = f^n(\mathrm{A})$, et $\mathrm{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{A}_n$.

1. Montrer que $f(\mathrm{B}) \subset \mathrm{B}$.
2. Montrer que B est la plus petite partie de E stable par f et contenant A.

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et fonctions réelles

Question de cours : Que dire de l'image directe et réciproque de l'intersection de deux parties par une application ?

Exercice 1 : Exprimer les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs (f étant une fonction réelle) :

1. Tout réel a (au moins) deux antécédents par f.
2. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.

Exercice 2 : Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

Exercice 3 : Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application, $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$.
Montrer que $f(\mathrm{A} \cap f^{-1}(\mathrm{B})) = f(\mathrm{A}) \cap \mathrm{B}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et fonctions réelles

Question de cours : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 1 : Parmi les propositions suivantes, déterminer lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. On essaiera de justifier les affirmations vraies, et de donner des contre-exemples aux affirmations fausses :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 2$
2. $\exists x \in \mathbb{N},\ 2 < x < 4$

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$.

Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n, puis la prouver par récurrence.

Exercice 3 : Soient f une application de E vers F et $(\mathrm{B}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de parties d'un ensemble F indexée par un ensemble J.

Montrer que $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathrm{J}} \mathrm{B}_i\right) = \bigcap_{i\in\mathrm{J}} f^{-1}(\mathrm{B}_i)$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et fonctions réelles

Question de cours : Montrer que $\forall f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists!(g,h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), g$ paire, h impaire, tel que $f = g + h$.

Exercice 1 : Parmi les propositions suivantes, déterminer lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. On essaiera de justifier les affirmations vraies, et de donner des contre-exemples aux affirmations fausses :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x$
2. $\forall x > 0, \exists y > 0,\ y < x$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p = 2n$

Exercice 2 : Montrer $\forall n \geqslant 1, \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

Exercice 3 : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F.

1. Montrer que si $\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$, $f(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) \cup f(\mathrm{B})$.
2. Est-ce vrai pour l'intersection ?

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et fonctions réelles

Question de cours : Que dire de l'image directe et réciproque de l'union de deux parties par une application ?

Exercice 1 : Parmi les propositions suivantes, déterminer lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. On essaiera de justifier les affirmations vraies, et de donner des contre-exemples aux affirmations fausses :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, p \in \mathbb{N},\ n = 2p$
2. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, p \in \mathbb{N},\ n(n+1) = 2p$

Exercice 2 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute fonction croissante f de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même possède un point fixe *i.e.* $\exists\, k \in [\![1, n]\!], \quad f(k) = k$.

Exercice 3 : Comparer :

- $\mathcal{P}(\mathrm{E} \cap \mathrm{F})$ et $\mathcal{P}(\mathrm{E}) \cap \mathcal{P}(\mathrm{F})$;
- $\mathcal{P}(\mathrm{E} \cup \mathrm{F})$ et $\mathcal{P}(\mathrm{E}) \cup \mathcal{P}(\mathrm{F})$;
- $\mathcal{P}(\mathrm{E} \times \mathrm{F})$ et $\mathcal{P}(\mathrm{E}) \times \mathcal{P}(\mathrm{F})$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et fonctions réelles

Question de cours : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 1 : Parmi les propositions suivantes, déterminer lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. On essaiera de justifier les affirmations vraies, et de donner des contre-exemples aux affirmations fausses :

1. $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R}, x < y^2$
2. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y > 0, y = \ln(x)$

Exercice 2 : Montrer $\forall\, n \geqslant 4,\ 2^n \leqslant n!$.

Exercice 3 : Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer de deux manière que :

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \implies \mathrm{A} = \mathrm{B}.$$

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique, raisonnement et fonctions réelles

Question de cours : Montrer que $\forall\, f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists!(g,h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), g$ paire, h impaire, tel que $f = g + h$.

Exercice 1 : Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ de réels vérifiant

$$0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant \dots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n \leqslant 1.$$

On veut démontrer la propriété suivante : « il y a au moins deux de ces réels dont la distance est inférieure ou égale à $\dfrac{1}{n}$.

1. Écrire à l'aide de quantificateurs la propriété.
2. En déduire une formulation équivalente pour les valeurs $x_i - x_{i-1}$.
3. Écrire la négation de cette dernière proposition.
4. Démontrer la propriété.

Exercice 2 : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$. Que pensez-vous des affirmations suivantes ?

1. $\forall\ x \in \mathrm{E} \quad \forall\ y \in \mathrm{F} \quad f(x) = y.$
2. $\forall\ x \in \mathrm{E} \quad \exists\ y \in \mathrm{F}$ tel que $\quad f(x) = y.$
3. $\exists\ x \in \mathrm{E}$ tel que $\quad \forall\ y \in \mathrm{F} \quad f(x) = y.$

Exercice 3 : Montrer que $\begin{cases} \mathrm{B} \setminus \mathrm{C} \subset \mathrm{A} \\ \mathrm{C} \setminus \mathrm{D} \subset \mathrm{A} \end{cases} \implies \mathrm{B} \setminus \mathrm{D} \subset \mathrm{A}.$