Nombres réels et Matrices

1 On considère l'équation différentielle $y' - xy = x^2 - 1$.

Montrer que les seules solutions polynomiales sont celles vérifiant $y(0) = 0$.

Les solutions générales sont les fonctions de la forme

$$y : x \longmapsto \lambda \, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} - x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La condition impose $\lambda = 0 = y(0)$.

2 Donner un encadrement (justifié) à 10^{-1} près de $\sqrt{3}$.

Parce que je suis trop gentil :

n	15	16	17	18	19	20
n^2	225	256	289	324	361	400

$\left(10\sqrt{3}\right)^2 = 300$. Avec $17^2 = 289 \leqslant 300 \leqslant 18^2 = 324$, on obtient $1,7 \leqslant \sqrt{3} \leqslant 1,8$.

3 Donner la caractérisation de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Tout intervalle $]a\,;b[$ non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$.

Ou

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists q \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - q| < \varepsilon$.

4 Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner une suite d'irrationnels qui converge vers x.

$$\left(p_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

5 Énoncer 4 propriétés importantes et distinctes de $\mathbb{R}$:

- $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.
- $\mathbb{R}$ est doté d'une relation d'ordre totale $\leqslant$.
- $\mathbb{R}$ est archimédien.
- $\mathbb{R}$ est indénombrable.
- $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$ qui y est dense. De même que son complémentaire et l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux.

6 Représenter la matrices $\mathrm{G} = \left(\mathrm{sh}\,(a_i + a_j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$.

$$\mathrm{G} = \begin{pmatrix} \mathrm{sh}\,(2a_1) & \mathrm{sh}\,(a_1 + a_2) & \mathrm{sh}\,(a_1 + a_3) \\ \mathrm{sh}\,(a_1 + a_2) & \mathrm{sh}\,(2a_2) & \mathrm{sh}\,(a_2 + a_3) \\ \mathrm{sh}\,(a_1 + a_3) & \mathrm{sh}\,(a_2 + a_3) & \mathrm{sh}\,(2a_3) \end{pmatrix}$$

7 On considère la matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ définie par

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Compléter :

(a) $\mathrm{J} = [\![1\,;3]\!]$.

(b) $a_{3,1} = 7.$

(c) $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3.$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} a_{k,2} = a_{1,2} + a_{2,2} + a_{3,2} + a_{4,2} = 2 + 5 + 8 + 11 = 26.$

(e) $\forall\, 1 \leqslant i \leqslant 4,\ \forall\, 1 \leqslant j \leqslant 3,\ a_{i+1,j} = a_{i,j} + 3.$

(f) $\mathrm{A} = (3i + j - 3)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 4\\ 1\leqslant j\leqslant 3}}$

Nombres réels

1 On considère l'équation différentielle $y' - \frac{1}{1+x^2}y = 2x - 1$.

Montrer que les seules solutions polynomiales sont celles vérifiant $y(0) = 1$.

Les solutions générales sont les fonctions de la forme

$$y : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{\arctan(x)} + x^2 + 1, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La condition impose $\lambda = 0 = y(0) - 1 \iff y(0) = 1$.

2 Donner un encadrement (justifié) à 10^{-1} près de $\sqrt{5}$.

Parce que je suis trop gentil :

n	20	21	22	23	24	25
n^2	400	441	484	529	576	625

$\left(10\sqrt{5}\right)^2 = 500$. Avec $22^2 = 484 \leqslant 500 \leqslant 23^2 = 529$, on obtient $2,2 \leqslant \sqrt{5} \leqslant 2,3$.

3 Donner la caractérisation de la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Tout intervalle $]a\,;b[$ non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Ou

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists\, q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $|x - q| < \varepsilon$.

4 Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner une suite de rationnels qui converge vers x.

$\left(p_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

5 Énoncer 4 propriétés importantes et distinctes de $\mathbb{R}$:

- $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.
- $\mathbb{R}$ est doté d'une relation d'ordre totale $\leqslant$.
- $\mathbb{R}$ est archimédien.
- $\mathbb{R}$ est indénombrable.
- $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$ qui y est dense. De même que son complémentaire et l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux.

6 Représenter la matrices $\mathrm{D} = \left(a^{\min(i,j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 4}$.

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a^2 & a^2 & a^2 \\ a & a^2 & a^3 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & a^4 \end{pmatrix}$$

7 On considère la matrice $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{(i;j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ définie par

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Compléter :

a) $\mathrm{I} = [\![1\,;4]\!]$.

b) $a_{1,3} = 3$.

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4 3$.

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} a_{2,k} = a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} = 4+5+6 = 15$.

e) $\forall\, 1 \leqslant i \leqslant 4,\ \forall\, 1 \leqslant j \leqslant 3,\ a_{i,j+1} = a_{i,j}+1$.

f) $\mathrm{A} = (3i+j-3)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 4\\ 1\leqslant j\leqslant 3}}$