Matrices

Exercice 1 : Effectuer le produit des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & -1 & 1 \\ 0 & 2\,\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & 0 \\ 3 & 3\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

Application : $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 : Montrer que le produit de deux matrices symétriques est une matrice symétrique si et seulement si les deux matrices commutent.

Exercice 4 :

1. Soit $\mathrm{A}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

   Calculer $\mathrm{A}(\theta) \times \mathrm{A}(\theta')$ et $\mathrm{A}(\theta)^n$ pour $n \geqslant 1$.

2. Soit $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,(t) & \mathrm{sh}\,(t) \\ \mathrm{sh}\,(t) & \mathrm{ch}\,(t) \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

   Calculer B^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 : On pose $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{J}^k = n^{k-1}\mathrm{J}$.

Exercice 6 : On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 :

1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

(a) Montrer que B est nilpotente d'indice 3.
(b) Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binôme et simplifier.
(c) En déduire A^n Pour tout entier n.

2 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier n, calculer A^n en utilisant $A - I_4$.

3 Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 8 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1 Calculer A^2 et A^3.

2 Justifier l'existence de deux suites réelles (α_n) et (β_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2.$$

Déterminer les réels α_n et β_n en fonction de n.

Exercice 9 : On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1 Calculer N^2 et N^3.

2 Déterminer trois réels a, b, c tels que $A = aN^2 + bN + cI_3$.

3 Trouver $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Exercice 10 : Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1 Calculer B^2 et montrer que $B^2 = 2I_3 - B$.

2 En déduire que B est inversible et calculer B^{-1}.

Exercice 11 : Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1 Montrer que $C^2 = 3C - 2I_3$.

2 En déduire que C est inversible et calculer C^{-1}.

Exercice 12 : On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1 Calculer $A^3 - 7A^2 + 13A$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

2 Calculer B^3. La matrice B est-elle inversible ?

Exercice 13 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1 (a) Montrer que $A^2 = 4A + 5I$.

(b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

2 (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $D = X^2 - 4X - 5$, $(n \in \mathbb{N})$.

(b) En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3 (a) Exprimer N^2 en fonction de N, puis N^k en fonction de $k \in \mathbb{N}^*$.

(b) En remarquant que $A = N - I$, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 14 : Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1 Calculer $T = P^{-1}AP$.

2 Montrer que pour tout entier naturel non nul n, T^n est de la forme $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & a_n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$ (où a_n est une suite que l'on déterminera plus loin).

3 On pose, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^{n-1}u_n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique. En déduire a_n en fonction de n.

4 En déduire A^n, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15 (Matrice de Vandermonde [1] des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité) :
Soit $V = \left(v_{jk} = \omega^{(j-1)(k-1)}\right)_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ 1\leqslant k\leqslant n}}$ où $\omega = e^{\frac{2\,i\,\pi}{n}}$, $(n \geqslant 2)$.

Montrer que $V\overline{V} = nI_n$.

Exercice 16 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente, on définit :

$$\exp(A) = \sum_{i\geqslant 0} \frac{A^i}{i!},$$

la somme étant finie et s'arrêtant par exemple au premier indice i tel que $A^i = 0$.

[1]. **Alexandre-Théophile Vandermonde** (parfois appelé Alexis-Théophile), né à Paris le 28 février **1735** et mort à Paris le 1er janvier **1796**, est un mathématicien français.

Il fut aussi économiste, musicien et chimiste, travaillant notamment avec Étienne **Bézout** et Antoine **Lavoisier**. Son nom est maintenant surtout associé à une matrice et son déterminant utilisés en *interpolation polynomiale.*

Un cas particulier de matrice de Vandermonde apparaît dans la formule de la *transformée de **Fourier*** discrète, où les coefficients (α_i) sont les racines complexes de l'unité.

En notant $\omega_j = \omega^{j-1}$, la matrice V s'écrit :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \omega_1 & {\omega_1}^2 & \dots & {\omega_1}^{n-1} \\ 1 & \omega_2 & {\omega_2}^2 & \dots & {\omega_2}^{n-1} \\ 1 & \omega_3 & {\omega_3}^2 & \dots & {\omega_3}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n & {\omega_n}^2 & \dots & {\omega_n}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, pour tous j et k, $v_{jk} = {\omega_j}^{k-1}$.

1. Montrer que si A et B sont nilpotentes et commutent, alors $\exp(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \exp(\mathrm{A})\exp(\mathrm{B})$.
2. En déduire que $\exp(\mathrm{A})$ est toujours inversible et calculer son inverse.

Exercice 17 : Une matrice carrée réelle A est dite *stochastique* si

$$\forall\, i, j \ 0 \leqslant a_{i,j} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \forall\, j, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est aussi une matrice stochastique.
2. Soit $\mathrm{B} = \mathrm{A}^2$, $\mathrm{A}_i = \max_j \left(a_{i,j}\right)$ et $a_i = \min_j \left(a_{i,j}\right)$.

   Montrer que $\forall\, j,\ a_i \leqslant b_{i,j} \leqslant \mathrm{A}_i$.