Matrices

Exercice 1 : Effectuer le produit des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & -1 & 1 \\ 0 & 2\,\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & 0 \\ 3 & 3\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Correction :

4. $\begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} & 1+2\,\mathrm{i} \\ 11+4\,\mathrm{i} & 9\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

6. (10)

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. Non défini.

Exercice 2 : Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

Application : $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 : Montrer que le produit de deux matrices symétriques est une matrice symétrique si et seulement si les deux matrices commutent.

Exercice 4 :

1. Soit $\mathrm{A}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

   Calculer $\mathrm{A}(\theta) \times \mathrm{A}(\theta')$ et $\mathrm{A}(\theta)^n$ pour $n \geqslant 1$.

2. Soit $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,(t) & \mathrm{sh}\,(t) \\ \mathrm{sh}\,(t) & \mathrm{ch}\,(t) \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

   Calculer B^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}(\theta)\times\mathrm{A}(\theta') &= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos\theta' & -\sin\theta'\\ \sin\theta' & \cos\theta'\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\sin\theta'-\sin\theta\cos\theta'\\ \sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta' & -\sin\theta\sin\theta'+\cos\theta\cos\theta'\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta')\\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta')\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{A}(\theta+\theta')
\end{aligned}$$

Bilan : $\mathrm{A}(\theta)\times\mathrm{A}(\theta')=\mathrm{A}(\theta+\theta')$.

Nous allons montrer par récurrence sur $n\geqslant 1$ que $\mathrm{A}(\theta)^n=\mathrm{A}(n\theta)$.

- C'est bien sûr vrai pour $n=1$.
- Fixons $n\geqslant 1$ et supposons que $(\mathrm{A}(\theta))^n=\mathrm{A}(n\theta)$ alors

$$(\mathrm{A}(\theta))^{n+1}=\mathrm{A}(\theta)^n\times\mathrm{A}(\theta)=\mathrm{A}(n\theta)\times\mathrm{A}(\theta)=\mathrm{A}(n\theta+\theta)=\mathrm{A}((n+1)\theta)$$

- C'est donc vrai pour tout $n\geqslant 1$.

Remarques :

- Comme $\mathrm{A}(\theta')\times\mathrm{A}(\theta)=\mathrm{A}(\theta+\theta')=\mathrm{A}(\theta)\times\mathrm{A}(\theta')$, on peut en déduire que les matrices $\mathrm{A}(\theta)$ et $\mathrm{A}(\theta')$ commutent.
- Comme $\mathrm{A}(\theta)\times\mathrm{A}(-\theta)=\mathrm{A}(0)=\mathrm{I}_2$, on pourrait prolonger la dernière identité à $n\in\mathbb{Z}$ mais seulement après avoir définie l'inverse d'une matrice :

$$\forall\, n\in\mathbb{Z},\ (\mathrm{A}(\theta))^n=\mathrm{A}(n\theta).$$

- En terme géométrique $\mathrm{A}(\theta)$ est la matrice de la rotation d'angle θ (centrée à l'origine). On vient de montrer que si l'on compose un rotation d'angle θ avec un rotation d'angle θ' alors on obtient une rotation d'angle $\theta+\theta'$.

Exercice 5 : On pose $\mathrm{J}=\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \dots & 1\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que pour tout $k\in\mathrm{N}^*$, $\mathrm{J}^k=n^{k-1}\mathrm{J}$.

Exercice 6 : On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, montrer que $\mathrm{A}^n=\begin{pmatrix}1 & n & 2n\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Correction : On a $\mathrm{A}=\mathrm{I}_3+\mathrm{J}$ où $\mathrm{J}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $\mathrm{J}^2=0$.

Donc $A^n = (J + I_3)^n = I_3 + nJ = \begin{pmatrix} 1 & n & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

   a) Montrer que B est nilpotente d'indice 3.
   b) Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binôme et simplifier.
   c) En déduire A^n Pour tout entier n.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Pour tout entier n, calculer A^n en utilisant $A - I_4$.

3. Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

   Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 8 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Justifier l'existence de deux suites réelles (α_n) et (β_n) telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2.$$

   Déterminer les réels α_n et β_n en fonction de n.

Exercice 9 : On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer N^2 et N^3.
2. Déterminer trois réels a, b, c tels que $A = aN^2 + bN + cI_3$.
3. Trouver $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Exercice 10 : Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^2 et montrer que $B^2 = 2I_3 - B$.
2. En déduire que B est inversible et calculer B^{-1}.

Exercice 11 : Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $C^2 = 3C - 2I_3$.

2 En déduire que C est inversible et calculer C^{-1}.

Exercice 12 : On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1 Calculer $A^3 - 7A^2 + 13A$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

2 Calculer B^3. La matrice B est-elle inversible ?

Exercice 13 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1 (a) Montrer que $A^2 = 4A + 5I$.

(b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

2 (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $D = X^2 - 4X - 5$, $(n \in \mathbb{N})$.

(b) En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3 (a) Exprimer N^2 en fonction de N, puis N^k en fonction de $k \in \mathbb{N}^*$.

(b) En remarquant que $A = N - I$, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 14 : Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1 Calculer $T = P^{-1}AP$.

2 Montrer que pour tout entier naturel non nul n, T^n est de la forme $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & a_n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$

(où a_n est une suite que l'on déterminera plus loin).

3 On pose, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^{n-1}u_n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique. En déduire a_n en fonction de n.

4 En déduire A^n, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15 (Matrice de Vandermonde [1] des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité) :

Soit $V = \left(v_{jk} = \omega^{(j-1)(k-1)}\right)_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ 1\leqslant k\leqslant n}}$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $(n \geqslant 2)$.

Montrer que $V\overline{V} = nI_n$.

[1]. **Alexandre-Théophile Vandermonde** (parfois appelé Alexis-Théophile), né à Paris le 28 février **1735** et mort à Paris le 1er janvier **1796**, est un mathématicien français.

Il fut aussi économiste, musicien et chimiste, travaillant notamment avec Étienne **Bézout** et Antoine **Lavoisier**. Son nom est maintenant surtout associé à une matrice et son déterminant utilisés en *interpolation polynomiale*.

Un cas particulier de matrice de Vandermonde apparaît dans la formule de la *transformée de* ***Fourier*** discrète, où les coefficients (α_i) sont les racines complexes de l'unité.

En notant $\omega_j = \omega^{j-1}$, la matrice V s'écrit :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \omega_1 & {\omega_1}^2 & \dots & {\omega_1}^{n-1} \\ 1 & \omega_2 & {\omega_2}^2 & \dots & {\omega_2}^{n-1} \\ 1 & \omega_3 & {\omega_3}^2 & \dots & {\omega_3}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n & {\omega_n}^2 & \dots & {\omega_n}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, pour tous j et k, $v_{jk} = {\omega_j}^{k-1}$.

Correction : Soient k et l deux entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant n$ et $1 \leqslant l \leqslant n$.

Le coefficient de W_{kl} de $k^{\text{ème}}$ ligne et de la $l^{\text{ème}}$ colonne de $V\overline{V}$ est tel que :

$$\begin{aligned} W_{kl} &= \sum_{j=1}^{n} V_{kj}\overline{V}_{jl} = \sum_{j=1}^{n} \omega^{(k-1)(j-1)}\omega^{-(j-1)(l-1)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \omega^{(j-1)(k-1-l+1)} = \sum_{j=1}^{n} \omega^{(j-1)(k-l)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\omega^{(k-l)}\right)^{(j-1)} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\omega^{(k-l)}\right)^{j}. \end{aligned}$$

1^{er} cas : Si $k = l$ alors $W_{kl} = \sum_{j=1}^{n} 1 = n$.

$2^{\text{ème}}$ cas : Si $k \neq l$ alors remarquons tout d'abord que :

$$\begin{cases} 1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant l \leqslant n \end{cases} \implies \begin{cases} 1 \leqslant k \leqslant n \\ -n \leqslant -l \leqslant -1 \end{cases} \implies -(n-1) \leqslant k-l \leqslant n-1.$$

L'entier $k-l$ ne peut donc être un multiple de n. Étant aussi non nul, on en déduit que $\omega^{k-l} \neq 1$.

Reconnaissant la somme des n premiers termes d'une suite géométriques de raison $\omega^{k-l} \neq 1$ et de premier terme 1, on a :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(\omega^{k-l}\right)^{j} = \frac{1-\left(\omega^{k-l}\right)^{n}}{1-\omega} = \frac{1-1^{k-l}}{1-\omega} = 0.$$

En résumé, seuls les coefficients diagonaux de $V\overline{V}$ sont non nuls égaux à n i.e. $V\overline{V} = nI_n$.

En particulier, après avoir vérifié que $\overline{V}V = nI_n$, la matrice V est inversible d'inverse $V^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{V}$.

Exercice 16 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente, on définit :

$$\exp(A) = \sum_{i \geqslant 0} \frac{A^i}{i!},$$

la somme étant finie et s'arrêtant par exemple au premier indice i tel que $A^i = 0$.

1. Montrer que si A et B sont nilpotentes et commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.
2. En déduire que $\exp(A)$ est toujours inversible et calculer son inverse.

Exercice 17 : Une matrice carrée réelle A est dite *stochastique* si

$$\forall\, i, j \;\; 0 \leqslant a_{i,j} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \forall\, j, \; \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est aussi une matrice stochastique.
2. Soit $B = A^2$, $A_i = \max_j \left(a_{i,j}\right)$ et $a_i = \min_j \left(a_{i,j}\right)$.

   Montrer que $\forall\, j,\; a_i \leqslant b_{i,j} \leqslant A_i$.