XIV

Fonctions de la variable réelle
LIMITES

La notion de limite est un concept central en analyse. Elle intervient dès que l'on étudie les suites ou les fonctions. Elle est indispensable pour définir la dérivée ou la continuité. Plus tard, la limite se mue en topologie et se fait plus générale, plus abstraite.

Dire qu'une quantité « admet une limite » est quelque chose de très intuitif. Tellement intuitif que les mathématiciens n'avaient pas ressenti pendant plusieurs siècles le besoin de définir précisément ce dont il s'agissait.

Ce n'est qu'au XIX$^{\text{ème}}$siècle que Weierstrass, à la suite de travaux d'Euler et des siens sur des fonctions continues nulle part dérivables, en donne une définition correcte.

Avant de passer à des considérations plus terre à terre, voici comment le célèbre mathématicien du XX$^{\text{ème}}$ siècle Ian Stewart [1] voit la définition : « f admet ℓ comme limite en a » :

« C'est un peu un jeu … Le joueur Epsilon indique quel écart maximum il accepte entre $f(x)$ et ℓ (c'est-à-dire qu'il impose $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est choisi par lui).

Le joueur Delta essaie de faire ce qu'il faut pour le satisfaire (c'est-à-dire qu'il essaie de trouver $\delta > 0$ tel que, si l'écart entre x et a est inférieur à δ, alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$).

Si, quel que soit le choix d'Epsilon, le joueur Delta a toujours une stratégie gagnante, alors $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a ».

Contenu

I. Limites **2**
- I.1 Point adhérent 2
- I.2 Limite et premières conséquences 4
- I.3 Limites à droite et à gauche 9
- I.4 Asymptote 13

II. Stabilité algébrique **16**
- II.1 Limite d'une somme 16
- II.2 Limite d'un produit 18
- II.3 Limite d'un quotient 19
- II.4 Limite d'une composée 21

III. Propriétés de la limite **24**
- III.1 La limite contrôle la fonction 24
- III.2 Limite et relation d'ordre 25
- III.3 La monotonie contrôle la limite 28
- III.4 Limites à gauche et à droite 29

IV. Extension aux fonctions complexes **30**

Dans tout ce chapitre, on considère une fonction définie sur un sous-ensemble quelconque D de $\mathbb{R}$:

$$f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}.$$

[1]. Ian Stewart FRS, né en **1945** en Angleterre, est professeur de mathématiques à l'université de Warwick au Royaume-Uni. Il a publié plus de 140 publications scientifiques.

I Limites

I.1 Point adhérent

On étudiera la limite de f en un point a dit adhérent à D *i.e.* un point appartenant à D ou « au bord de D ». Dans la même idée, on dira qu'un point est intérieur à A s'il appartient à A sans être « au bord de A ».

Plus précisément,

Définition I (Point intérieur/adhérent à une partie de $\mathbb{R}$) : (Hors-Programme)
Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Point intérieur : Soit $x \in \mathbb{R}$.

On dit que x est *intérieur* à A si A contient un voisinage de x :

$$\exists \mathrm{V}_x \in \mathcal{V}(x), \mathrm{V}_x \subset \mathrm{A}.$$

On note $\mathring{\mathrm{A}}$ leur ensemble.

Point adhérent : Soit $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que x est *adhérent* à A si A rencontre tout voisinage de x :

$$\forall\ \mathrm{V}_x \in \mathcal{V}(x),\ \mathrm{A} \cap \mathrm{V}_x \neq \varnothing.$$

On note $\overline{\mathrm{A}}$ leur ensemble.

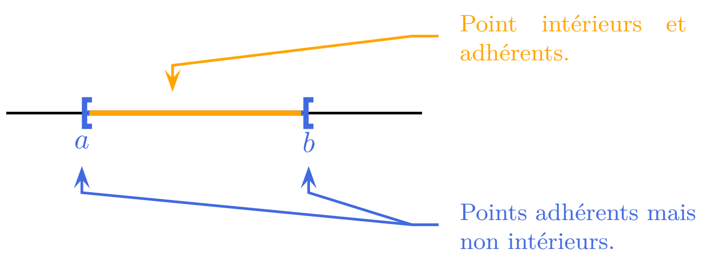


Figure XIV.1 – Points intérieurs et adhérents à un intervalle $[a\,;b[$.

Exemples I :

- 1 est adhérent à $[0\,;1[$ et $+\infty$ est adhérent à $\mathbb{R}_+^*$.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Alors $\mathring{\overbrace{[a\,;b[}} =]a\,;b[$ et $\overline{[a\,;b[} = [a\,;b]$.

  D'une manière générale, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $\overline{\mathrm{I}}$ est l'intervalle fermé correspondant dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ en incluant les bornes et $\mathring{\mathrm{I}}$ l'intervalle ouvert excluant les bornes.

I	$\mathring{\mathrm{I}}$	$\overline{\mathrm{I}}$
$]1\,;2] \cup [3\,;4]$	$]1\,;2[\cup]3\,;4[$	$[1\,;2] \cup [3\,;4]$
$]1\,;+\infty[$	$]1\,;+\infty[$	$[1\,;+\infty]$
$]-\infty\,;2[$	$]-\infty\,;2[$	$[-\infty\,;2]$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\overline{\mathbb{R}}$

- Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$. Alors,
  - a et b sont adhérents à $[a\,;b[$.
  - $\forall\, x \in \mathbb{R}$ tel que $a < x < b$ est à la fois intérieur et adhérent à $[a\,;b[$.

Il existe une caractérisation des points adhérents fort pratique.

Proposition I (Caractérisation séquentielle) : Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
x est adhérent à A si, et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.

Preuve : On montre successivement les deux implications :

$(\Longrightarrow)$ **:** On suppose que x est adhérent à A.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme x est adhérent à A, tout voisinage $\mathrm{V}_{x,n} = \left]x - \dfrac{1}{n+1}\,;x + \dfrac{1}{n+1}\right[$ rencontre A i.e. $\exists\, a_n \in \mathrm{V}_{x,n} \cap \mathrm{A}$.

Par construction, $|x - a_n| < \dfrac{1}{n+1}$ i.e. la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers x.

$(\Longleftarrow)$ **:** Considérons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et un voisinage $\mathrm{V}_x =]x-\varepsilon\,;x+\varepsilon[$ quelconque de x.

Par définition de la convergence, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de A convergeant vers x, il existe un rang à partir duquel $|x - a_n| < \varepsilon \iff a_n \in \mathrm{V}_x$ et $\mathrm{A} \cap \mathrm{V}_x \neq \varnothing$.

Corollaire I.1 : Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

$$\sup(\mathrm{A}) \in \overline{\mathrm{A}} \qquad \text{et} \qquad \inf(\mathrm{A}) \in \overline{\mathrm{A}}.$$

En particulier, on pourra toujours trouver une suite d'éléments de A convergeant vers $\sup(\mathrm{A})$. De même pour $\inf(\mathrm{A})$.

Preuve : On ne démontre ce résultat que pour $\sup(\mathrm{A})$, la démonstration étant identique pour $\inf(\mathrm{A})$.

Par définition de la borne supérieure, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup(\mathrm{A}) - \dfrac{1}{n+1}$ n'est pas un majorant de A donc il existe $x_n \in \mathrm{A}$ tel que :

$$\sup(\mathrm{A}) - \frac{1}{n+1} < x_n \leqslant \sup(\mathrm{A})\,.$$

Par construction, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A converge vers $\sup(\mathrm{A})$ et $\sup(\mathrm{A}) \in \overline{\mathrm{A}}$.

I.2 Limite et premières conséquences

En reprenant les voisinage définis précédemment, on peut adopter une définition uniforme, globale et équivalente à celle que vous connaissiez de la notion de limites :

Définition 2 (Définition topologique des limites) : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f admet une *limite* b lorsque x tend vers a si, et seulement si

$$\forall\, \mathrm{V}_b \in \mathcal{V}(b),\, \exists\, \mathrm{U}_a \in \mathcal{V}(a) \,/\, \forall\, x \in \mathrm{U}_a \cap \mathrm{D} \implies f(x) \in \mathrm{V}_b.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Dans le cadre de la définition (2) , on pourra, selon les besoins, visualiser un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ sous la forme $\mathcal{B}\,(a\,;\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x-a| < \varepsilon\}$ ou $]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[$.

On remarquera que $|x-a| < \varepsilon$ équivaut à $x \in \mathcal{B}\,(a\,;\varepsilon)$.

On passe alors du cas topologique au cas normé en remarquant que tout voisinage de a contient une boule $\mathcal{B}\,(a\,;\alpha)$, et du cas normé au cas topologique en remarquant qu'une boule $\mathcal{B}\,(a\,;\alpha)$ est un voisinage de a.

On pourra également mélanger les deux points de vue. Ainsi, la définition (2) s'écrira aussi de manière équivalente :

(i) $\forall\, \mathrm{V} \in \mathcal{V}(b),\, \exists\, \alpha(\mathrm{V}) \in \mathbb{R}_+^*,\, \forall\, x \in \mathrm{D},\, |x-a| < \alpha \implies f(x) \in \mathrm{V}.$

(ii) $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\, \exists\, \mathrm{U} \in \mathcal{V}(a),\, \forall\, x \in \mathrm{D},\, x \in \mathrm{U} \implies |f(x)-b| < \varepsilon.$

Remarque : Les inégalités sont indifféremment strictes ou larges pour définir des voisinages ouverts ou fermés excepté $\varepsilon > 0$. Le programme demande d'utiliser des inégalités larges ce que j'essaierai.

Preuve : *Il suffit de constater que*

$$\mathcal{B}_f\,(a\,;\tfrac{\alpha}{2}) \subset \mathcal{B}_o\,(a\,;\alpha) \subset \mathcal{B}_f\,(a\,;\alpha)$$

et,

$$\mathcal{B}_f\,(b\,;\tfrac{\varepsilon}{2}) \subset \mathcal{B}_o\,(b\,;\varepsilon) \subset \mathcal{B}_f\,(b\,;\varepsilon)\,.$$

On retrouve alors tous les cas déjà connus :

Proposition 2 (Limites en $+\infty$) : Soient D tel que $+\infty \in \overline{\mathrm{D}}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\, \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R},\, \forall\, x \in \mathrm{D},\, x \geqslant \alpha \implies |f(x)-b| \leqslant \varepsilon.$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R},\, \exists\, \alpha(\mathrm{A}) \in \mathbb{R},\, \forall\, x \in \mathrm{D},\, x \geqslant \alpha \implies f(x) \geqslant \mathrm{A}.$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall\, \mathrm{B} \in \mathbb{R},\, \exists\, \alpha(\mathrm{B}) \in \mathbb{R},\, \forall\, x \in \mathrm{D},\, x \geqslant \alpha \implies f(x) \leqslant \mathrm{B}.$

Décortiquons l'expression dans le cas d'une limite finie :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\, \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R},\, \forall\, x \in \mathrm{D},\, x \in [\alpha\,;+\infty[\implies |f(x)-b| \leqslant \varepsilon.$$

— $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$: « Quelle que soit la marge d'erreur ε qu'on se donne, aussi petite soit-elle ... ».
— $\exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}$: « ...il existe un seuil α ... ».

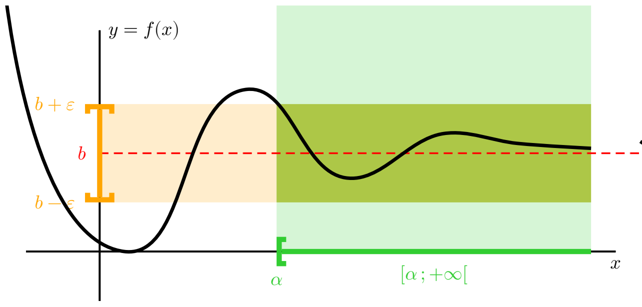


Figure XIV.2 – Limite finie en l'infini.

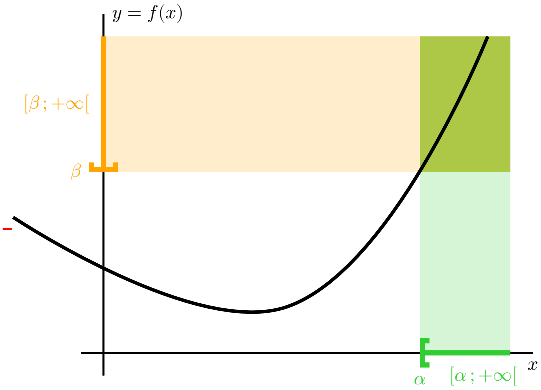


Figure XIV.3 – Limite infinie à l'infini.

— $\forall\, x \in \mathrm{D}$, : $x \in [\alpha\,;+\infty[$ ... : « ...tel que si x est à la fois dans D et au-delà de α *i.e.* dans un voisinage de $+\infty$ ... ».

— ... $\Longrightarrow$ $|f(x) - b| \leqslant \varepsilon$: alors $f(x)$ est proche de b à ε près ».

Autrement dit : « Si $x \in \mathrm{D}$ est suffisamment grand, alors $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de b ».

Exercice 1 : À l'aide de la définition, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

De manière analogue, en $-\infty$:

Proposition 3 (Limites en $-\infty$) : Soient D tel que $-\infty \in \overline{\mathrm{D}}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b \iff \forall\,\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\,\beta(\varepsilon) \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \leqslant \beta \Longrightarrow |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\,\mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\,\beta(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \leqslant \beta \Longrightarrow f(x) \geqslant \mathrm{A}.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \iff \forall\,\mathrm{B} \in \mathbb{R}, \exists\,\beta(\mathrm{B}) \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \leqslant \beta \Longrightarrow f(x) \leqslant \mathrm{B}.$

Remarque : Toutes les fonctions n'ont pas nécessairement une limite en l'infini. C'est le cas, notamment des fonctions circulaires cos, sin ou tan mais aussi de la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \lfloor x \rfloor \end{array}.$$

Exercice 2 : Déterminer les limites (si elles existent) en $\pm\infty$ des fonctions suivantes :

$f_1 : x \longmapsto \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{5x^3 - x}$ $\qquad f_2 : x \longmapsto \cos(x) - x$ $\qquad f_3 : x \longmapsto x^2 e^{-x} - x$

Remarque : Une fonction peut tendre vers $+\infty$ en $+\infty$ de plusieurs façons. On parle de vitesse de divergence différentes.

C'est le cas par exemple des fonctions suivantes :

$f(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
$\underset{n\neq 0}{x^n}$	$+\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair
$\underset{n\neq 0}{\dfrac{1}{x^n}}$	0	0
$\sqrt{x}$	$+\infty$	non défini
$\ln(x)$	$+\infty$	non défini
e^x	$+\infty$	0
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	0	non défini
$\sin(x)$ $\cos(x)$ $\tan(x)$	pas de limite	pas de limite
$\arctan(x)$	$\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{2}$
$\mathrm{ch}\,(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\mathrm{sh}\,(x)$	$+\infty$	$-\infty$

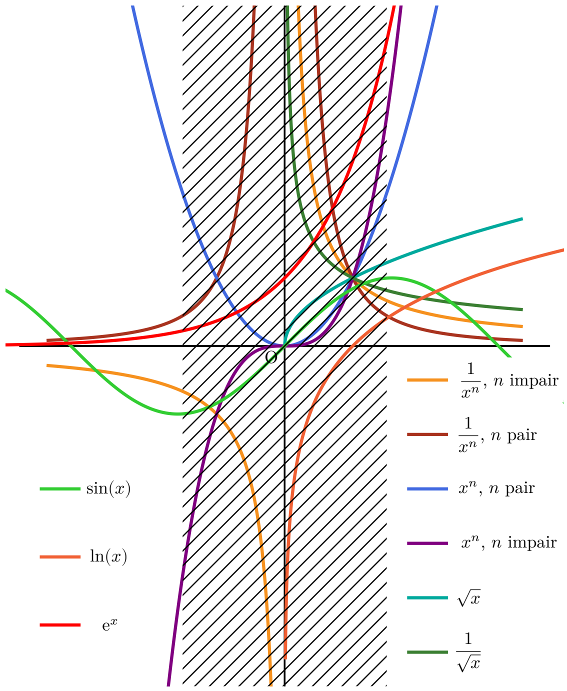


Figure XIV.4 – Limites des fonctions de référence en l'infini.

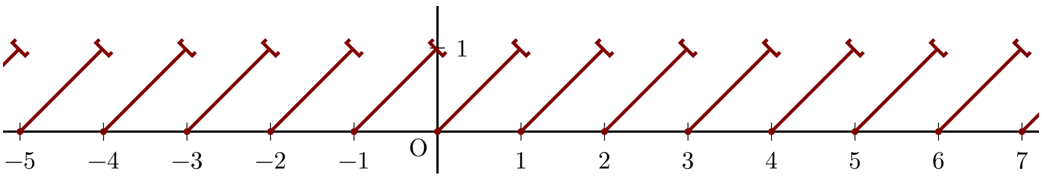


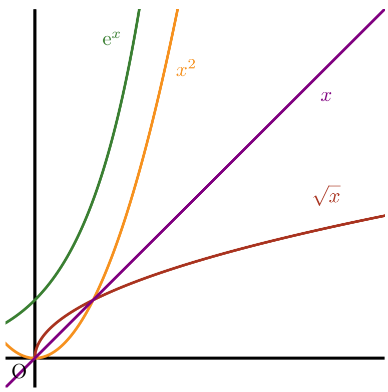
Figure XIV.5 – La fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ n'a pas de limite en $\pm\infty$.

— $x \longmapsto x^2$ tend « rapidement » vers l'infini.
La concavité est tournée vers le haut.

— $x \longmapsto x$ tend « moyennement » vers l'infini.
Pas de concavité

— $x \longmapsto \sqrt{x}$ tend « lentement » vers l'infini.
La concavité est tournée vers le bas.

— $x \longmapsto e^x$ tend vers l'infini « incommensurablement plus vite » que les fonctions précédentes.



Ces simples informations sont importantes puisqu'elles nous permettront de conjecturer certaines limites. Une fonction rapide sera prépondérante sur une fonction lente en l'infini donc pourra y imposer sa limite.

Proposition 4 (Limite en un point fini) : Soient $a \in \overline{\mathrm{D}} \cap \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ |x-a| \leqslant \alpha \implies |f(x)-b| \leqslant \varepsilon.$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ |x-a| \leqslant \alpha \implies f(x) \geqslant \mathrm{A}.$

Soient α, β, γ des réels strictement positifs.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{\ln^\gamma(x)} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\beta \left|\ln(x)\right|^\gamma = 0.$$

Figure XIV.6 – Croissances comparées.

- $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \iff \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ |x-a| \leqslant \alpha \implies f(x) \leqslant \mathrm{A}.$

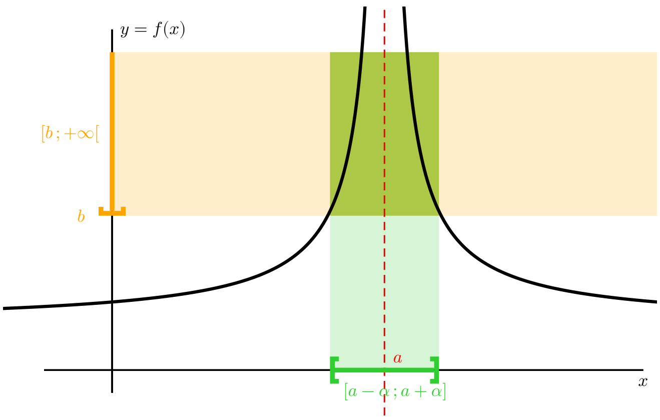


Figure XIV.7 – Limite infinie en un point fini

Remarques :

— L'hypothèse $a \in \overline{\mathrm{D}}$ est nécessaire pour pouvoir considérer des points aussi proches que l'on veut de a.

On dira que la limite de f est envisageable en a si cette hypothèse est satisfaite (sans considération d'existence ou non de la limite), et qu'elle ne l'est pas si $a \notin \overline{\mathrm{D}}$.

— Dans le cas fini, l'inégalité est d'autant plus contraignante que ε est petit. On peut alors se contenter d'étudier le cas de valeurs de ε inférieures à une valeur ε_0 donnée.

— De même, dans le cas d'une limite ∞, la définition trouve sa pertinence lorsque A devient grand ou petit (vers $-\infty$) mais il n'est pas nécessaire de le supposer strictement positif ou négatif.

Exercice 3 : Déterminer la limite (si elle existe) des fonctions suivantes en 0. On distinguera éventuellement 0^- et 0^+.

$f_1 : x \longmapsto x - \ln(x)$

$f_2 : x \longmapsto x\sqrt{1+(\ln(x))^2}$

$f_3 : x \longmapsto \dfrac{e^{5x} - e^{3x}}{x}$

$f_4 : x \longmapsto x e^{\frac{1}{x}}$

Corollaire 4.1 (Limite et valeur absolue) : Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{K}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \implies \lim_{x\to a} |f(x)| = |\ell|\,.$$

Preuve : *Dans le cas $\ell \in \mathbb{R}$, tout découle de l'inégalité triangulaire :*

$$\big|\,|f(x)| - |\ell|\,\big| \leqslant |f(x) - \ell|\,.$$

$f(x)$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$
$\dfrac{1}{x^n}$ $n\neq 0$	$+\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$+\infty$	non défini
$\ln(x)$	$-\infty$	non défini

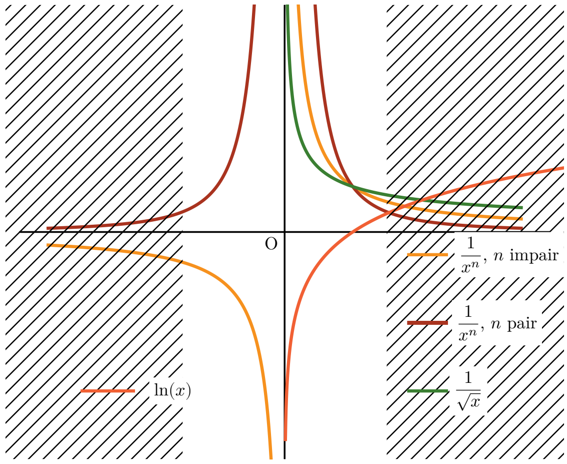


Figure XIV.8 – Limites des fonctions de référence en 0.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x}\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(x)}{x}\end{array}\right\}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Figure XIV.9 – Taux d'accroissement de fonctions dérivables.

Dans le cas $\ell=\pm\infty$, tout découle de la définition de la valeur absolue :

$$|f(x)|=\max\{f(x),-f(x)\}.$$

L'unicité de la limite d'une fonction provient d'une propriété topologique de $\mathbb{R}$: la séparation.

Théorème 5 (Unicité de la limite, cas réel) : Soit $a\in\overline{\mathrm{D}}$ et f une fonction réelle.

Si elle existe, la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est unique.

Par la contraposée, une fonction admettant deux valeurs d'adhérence au voisinage d'un point a ne peut y avoir de limite.

Preuve : Posons ℓ et ℓ' les deux limites de f en a et supposons $\ell\neq\ell'$.

Il existe donc deux voisinages disjoints $\mathcal{V}_\ell$ et $\mathcal{V}_{\ell'}$ tels que $\ell\in\mathcal{V}_\ell$, $\ell'\in\mathcal{V}_{\ell'}$ et $\mathcal{V}_\ell\cap\mathcal{V}_{\ell'}=\varnothing$.

Appliquons alors la définition de la limite de f en a :

– Il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,\mathcal{V}_\ell}$ de a (dépendant de $\mathcal{V}_\ell$) tel que

$$x\in\mathcal{V}_{a,\mathcal{V}_\ell}\implies f(x)\in\mathcal{V}_\ell.$$

– Il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,\mathcal{V}_{\ell'}}$ de a (dépendant de $\mathcal{V}_{\ell'}$) tel que

$$x \in \mathcal{V}_{a,\mathcal{V}_{\ell'}} \implies f(x) \in \mathcal{V}_{\ell'}.$$

Il suffit alors de considérer $x \in \mathcal{V}_{a,\mathcal{V}_\ell} \cap \mathcal{V}_{a,\mathcal{V}_{\ell'}}$ pour avoir la contradiction.

Notation : En cas d'existence de la limite en a, le théorème (5) permet de justifier la notation, maintenant non ambigüe, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ de LA limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a.

ATTENTION

Certaines fonctions peuvent ne pas avoir de limite en un point.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

En 0, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right) = \pm\infty$. Comme la limite de $\sin(x)$ en l'infini n'existe pas, celle de $f(x)$ en 0 n'existe pas non plus. Nous verrons dans un autre chapitre une manière efficace et rigoureuse de montrer ce point.

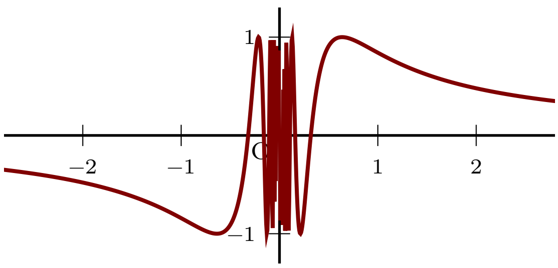


Figure XIV.10 – La fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

I.3 Limites à droite et à gauche

Tout d'abord, que se passe-t-il en un point où la fonction est définie ?

Proposition 6 : Si f est définie en $a \in \mathrm{D}$ non adhérent à D et y admet une limite, alors cette limite est nécessairement égale à $f(a)$.

Une fonction ne peut donc pas avoir de limite infinie en un point où elle est définie.

ATTENTION

La proposition (6) ne dit absolument pas que toute fonction définie en a est continue en a mais seulement qu'une condition nécessaire à l'être est que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe.

Preuve : Faisons l'hypothèse que f est définie en a et y possède une limite ℓ.

Pour tout voisinage V_ℓ de ℓ, il existe alors un voisinage V_a de a inclus dans D pour lequel $f(x) \in \mathrm{V}_\ell$ pour tout $x \in \mathrm{D} \cap \mathrm{V}_a$.

Comme a appartient nécessairement à tout voisinage de a, $f(a)$ appartient à tout voisinage de ℓ.

On en déduit déjà que $\ell \in \mathbb{R}$ car $]f(a)\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;f(a)[$ sont des voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ respectivement ne contenant pas $f(a)$ donc à écarter.

Enfin, la condition « $f(a)$ appartient à TOUT voisinage de ℓ » implique que $\ell = f(a)$. (Imaginez des voisinages aussi réduits que l'on veux !)

Conclusion, une fonction admet une limite en un point (intérieur) de D si, et seulement si elle y est continue. [2]

Il y a donc peu de problèmes en un point intérieur mais que se passe-t-il alors aux bornes de celui-ci ? Une fonction peut y être définie mais ne pas y avoir de limite.

C'est, par exemple, le cas de la fonction partie entière en $a = 1$ où la fonction, pourtant correctement définie, prend des valeurs différentes suivant « le côté » d'où l'on arrive.

On parlera alors de *limite à droite* ou de *limite à gauche*.

Soit J un intervalle (ou une réunion d'intervalles, ou plus généralement un sous-ensemble quelconque) tel que $a \in \overline{\mathrm{D} \cap \mathrm{J}}$. Si la limite (finie ou infinie) en a de la restriction $f_{|\mathrm{D}\cap\mathrm{J}}$ existe, on utilise la notation suivante :

$$\lim_{x\to a} f_{|\mathrm{D}\cap\mathrm{J}}(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in\mathrm{J}}} f(x).$$

Définition 3 (Limites à droite et à gauche) : Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

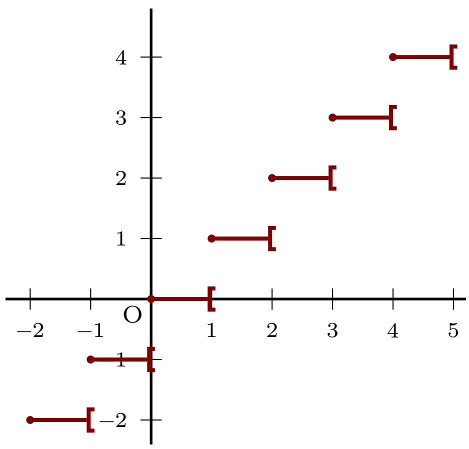
Limite à gauche : Si a est adhérent à $\mathrm{D}\cap]-\infty\,;a[$, on dit que f possède une *limite à gauche* en a si $f_{|\mathrm{D}\cap]-\infty;a[}$ possède une limite en a.

Cette limite est notée $\displaystyle\lim_{x\to a^-} f(x)$, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x\in]-\infty;a[}} f(x)$, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ ou encore $f(a-0)$.

Limite à droite : Si a est adhérent à $\mathrm{D}\cap]a\,;+\infty[$, on dit que f possède une *limite à droite* en a si $f_{|\mathrm{D}\cap]a;+\infty[}$ possède une limite en a.

Cette limite est notée $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x\in]a;+\infty[}} f(x)$, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $f(a+0)$.

Remarque : a n'appartient ni à $\mathrm{D}\cap]-\infty\,;a[$ ni à $\mathrm{D}\cap]a\,;+\infty[$. Il y est seulement adhérent.



$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\quad \lim_{\substack{x\to n\\ x<n}} \lfloor x \rfloor = n-1$$

et

$$\lim_{\substack{x\to n\\ x>n}} \lfloor x \rfloor = n.$$

Figure XIV.11 – La fonction partie entière n'a pas de limites en tout point de $\mathbb{Z}$ mais seulement des limites à droite et à gauche.

Exercice 4 : Que dire des limites suivantes ?

[2]. En un point de l'intérieur de D et non de $\overline{\mathrm{D}}$ je le redis.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$
3. $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|}$
6. $\lim_{x\to 0} \lfloor x \rfloor$
7. $\lim_{x\to 0} \lfloor x^2 \rfloor$

Remarque : De même que plus haut, on peut dire que la limite $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in \mathrm{J}}} f(x)$ est envisageable ou non suivant que a appartient à $\overline{\mathrm{D}\cap \mathrm{J}}$ ou pas.

Ici la définition topologique atteint ses limites et on doit utiliser une définition métrique ou au moins partiellement :

Corollaire 6.1 : Soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Dire que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$ revient à dire que :

$$\forall\, \mathrm{V}_b \in \mathcal{V}(b),\ \exists\, \alpha(\mathrm{V}_b) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\quad \underset{\text{ou } x\in [a-\alpha\,;a[}{a-\alpha \leqslant x < a} \quad\Longrightarrow\ f(x) \in \mathrm{V}_b.$$

- Dire que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b$ revient à dire que :

$$\forall\, \mathrm{V}_b \in \mathcal{V}(b),\ \exists\, \alpha(\mathrm{V}_b) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\quad \underset{\text{ou } x\in]a\,;a+\alpha]}{a < x \leqslant a+\alpha} \quad\Longrightarrow\ f(x) \in \mathrm{V}_b.$$

Les limites à gauche/à droite ne sont jamais que des limites au sens initial du chapitre mais appliquées à des restrictions. Cela justifie qu'elles auront les mêmes propriétés notamment leur unicité.

Théorème 7 (Limite et limites à gauche et à droite) : Soit $a \in \overline{\mathrm{D}}$.

La fonction f admet une limite en a notée $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ si, et seulement si

1. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(a)$ si f est définie en a.
2. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ si f n'est pas définie en a.

En particulier, dans tous les cas, une condition nécessaire est que les quantités $f(a-0)$ et $f(a+0)$ existent et soient égales.

Exemple 2 :

- La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ a pour limite $+\infty$ en 0 [3].
- La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 mais $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$.
- Soit δ_0, la fonction qui, à tout réel associe 1 si $x = 0$ et 0 sinon.
  On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \delta_0 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \delta_0 = 0$ mais δ_0 n'a pas de limite en 0 car $\delta_0(0) = 1$.

[3]. Car la même limite infinie à droite et à gauche.

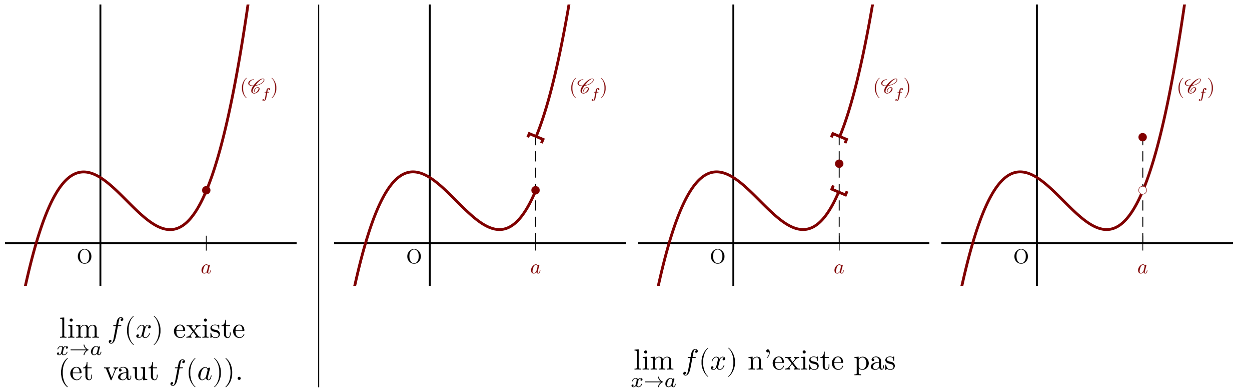


Figure XIV.12 – Caractérisation de la limite en fonction des ses limites à gauche et à droite.

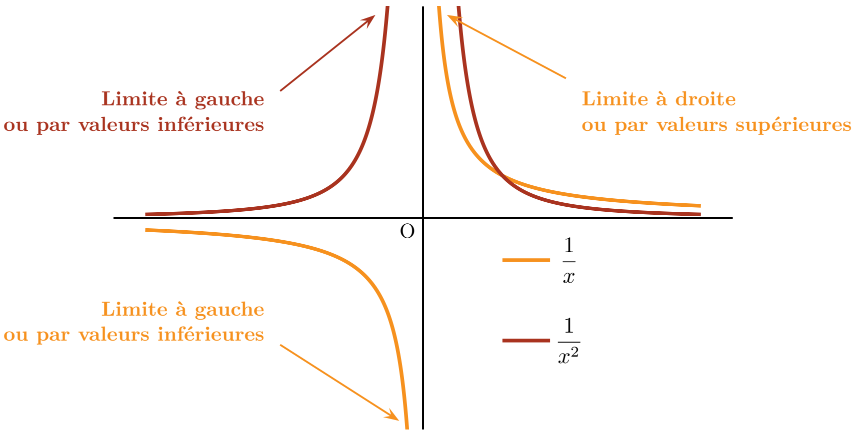


Figure XIV.13 – Limites à droite et à gauche d'une fonction

Remarque : Cette propriété va nous permettre de définir correctement le prolongement par continuité d'une fonction admettant une limite finie aux bornes de son intervalle de définition.

Exemples 3 : Étudions les limites de $\dfrac{1}{2-x}$ et $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ dans un voisinage de 2 :

Comme $\lim\limits_{x\to 2} 2-x = 0$, on est ramené à l'étude de $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{1}{u}$ qui dépend du signe de u :

1. On commence par dresser un tableau de signes de $x-2$: [4]

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	

Avec les conventions de notations :

$$\lim_{x\to 2^-} 2-x = 0^+$$
et
$$\lim_{x\to 2^+} 2-x = 0^-$$

2. On conclut :

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} 2-x &= 0^+ \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} &= +\infty \end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{les composées de limites}]{\text{D'après les théorèmes sur}} \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2-x} = +\infty,$$

et

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2^+} 2-x &= 0^- \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} &= -\infty \end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{les composées de limites}]{\text{D'après les théorèmes sur}} \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{2-x} = -\infty.$$

Ici, malgré la difficulté apparente, $\lim\limits_{x\to 2^-} (2-x)^2 = \lim\limits_{x\to 2^+} (2-x)^2 = \lim\limits_{x\to 2} (2-x)^2 = 0^+$.

D'où :

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2} (2-x)^2 &= 0^+ \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} &= +\infty \end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{les composées de limites}]{\text{D'après les théorèmes sur}} \lim_{x\to 2} \frac{1}{(2-x)^2} = +\infty.$$

En conclusion, on remarquera bien que si $\dfrac{1}{2-x}$ n'a pas de limite en 2, $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ en a bien une qui est $+\infty$.

Exemples 4 :

- La fonction partie entière à des limites à droite et à gauche distinctes pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et n'admet donc pas de limite en ces points.
- La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ n'est pas définie en 0 mais y admet une limite :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 1.$$

- La fonction sinus cardinal $g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est définie en 0 et y admet une limite :

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1.$$

- La fonction $x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est définie en 0, admet une limite à droite et une limite à gauche en 0 mais n'admet pas de limite en 0.

Exercice 5 : Déterminer les limites suivantes si elles existent. Dans le cas contraire, on déterminera les limites par valeurs supérieures et inférieures.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

I.4 Asymptote

Le comportement à l'infini, dit *comportement asymptotique*, peut aussi aider à cerner l'allure de la courbe.

On définit pour cela la notion de droite asymptote [5] : il s'agit d'une droite qui approche d'aussi près que l'on veut une portion de la courbe lorsque l'on s'éloigne vers l'infini dans l'une des deux directions. Plus précisément :

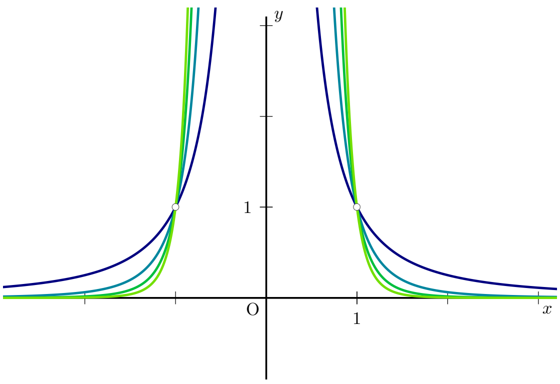
Définition 4 (Asymptote) : On dit qu'une fonction f admet :

1. une *asymptote verticale* au voisinage de a d'équation $x = a$ lorsque $\displaystyle\lim_{x\to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.
2. une *asymptote horizontale* au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = b$ lorsque $\displaystyle\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = b$.
3. plus généralement, une droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = ax + b$, dite *asymptote oblique*, au voisinage de $\pm\infty$ lorsque $\displaystyle\lim_{x\to \pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$.

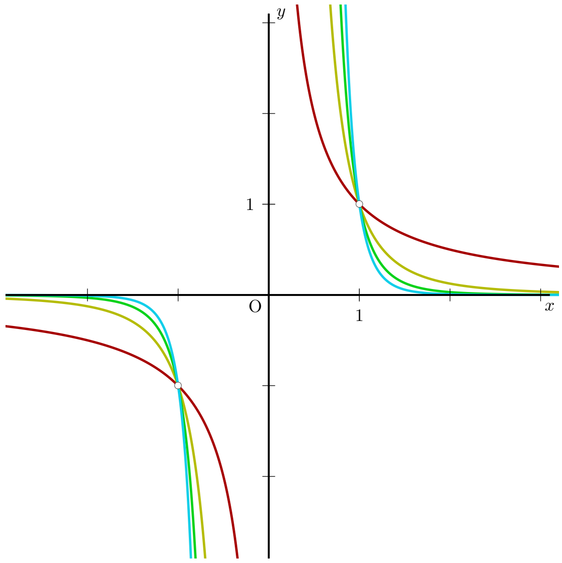
On remarquera que l'existence de la limite n'est pas nécessaire pour que la courbe admette une asymptote verticale comme c'est le cas pour $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour n impair.

[4]. Au moins dans sa tête !
[5]. De l'étymologie grecque construit à l'aide du préfixe privatif « a » et de « symptôsis » (rencontre) : la droite qui ne se rencontre pas.

Remarque : L'utilisation du terme asymptote ne se limite pas aux droites. On parlera bientôt de courbes asymptotes.



$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour $n = 2, 4, 6, 8$.



$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour $n = 1, 3, 5, 7$.

Figure XIV.14 – Les courbes des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ admettent l'axe des ordonnées comme asymptote verticale et l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

Méthode I (Déterminer une droite asymptote (non verticale)) :
Tant qu'on ne dispose pas de méthode plus sophistiquée, le principe est le suivant (pour une asymptote en $+\infty$) :

1. Étudier la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$:
   - Si cette limite n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.
   - Si cette limite est finie, de valeur a, on dit que la droite $y = ax$ est direction asymptotique de la courbe en $+\infty$.
2. On étudie la limite de $f(x) - ax$:
   - Si elle n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.
   - Si cette limite est finie, de valeur b, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

Nous verrons plus tard comment on peut obtenir a sans former le quotient, à l'aide d'équivalents, ou même comment obtenir simultanément a et b à l'aide d'un « développement limité ».

Exercice 6 : Étudier les asymptotes éventuelles des courbes de :

$f_1 : x \longmapsto \dfrac{4x^2 - 2}{2x + 1}$ $\qquad$ $f_2 : x \longmapsto \sqrt{x^2 + 3x + 1}$

Exercice 7 : Montrer que la courbe de $x \mapsto \cos(x) - x$ n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.

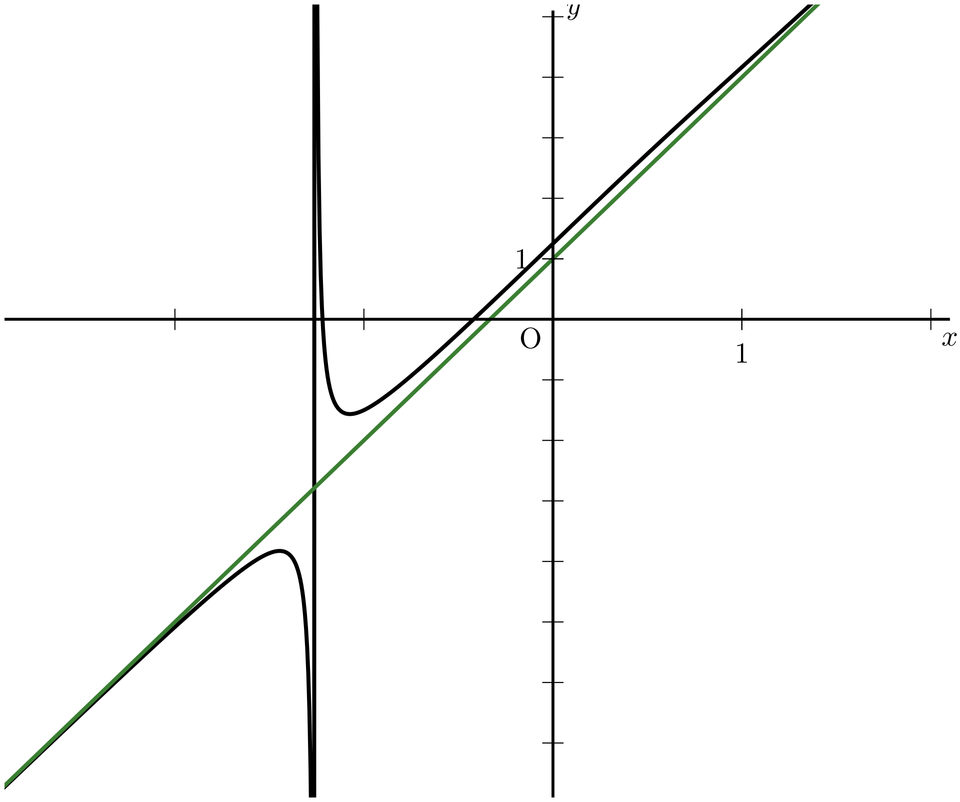


Figure XIV.15 – La droite d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote à la courbe de $f : x \longmapsto 3x + 1 + \dfrac{1}{2(x^3 + 2)}$.

Remarque : Dire que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ est équivalent de dire que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - b = 0$. Cette dernière expression représente, au signe près, la distance entre la courbe et son asymptote : à l'infini, la courbe représentative se rapproche infiniment de son asymptote.

Méthode 2 (Position relative d'une courbe et de son asymptote) :

Soit f une fonction et $y = ax + b$ l'équation de son asymptote horizontale ou oblique $(\mathscr{D})$.

Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de $(\mathscr{D})$ en $+\infty$, il suffit d'étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$ sur un voisinage $]\alpha\,;+\infty[$ de celui-ci.

x	α	δ	$+\infty$
Signe de $f(x) - (ax + b)$	$+$	0	$-$
Position de $\mathscr{C}_f$ et $(\mathscr{D})$	$\mathscr{C}_f$ au dessus de $(\mathscr{D})$		$\mathscr{C}_f$ au dessous de $(\mathscr{D})$

II Stabilité algébrique

Un peu d'histoire : *Les théorèmes qui suivent étaient jugés évidents au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. Une tentative de démonstration aurait alors paru incongrue et superflue. Ces démonstrations nous sont cependant nécessaires pour plusieurs raisons :*

— *Montrer l'efficacité de notre définition de limite.*
— *Justifier la validité de notre intuition.*
— *Servir de modèle de démonstration pouvant être utilisé dans des cas plus complexes.*

Les résultats de certaines opérations sur les limites sont intuitifs et parfaitement déterminés.

D'autres opérations mènent à des formes dites « indéterminées », c'est-à-dire qu'elles conduisent à plusieurs résultats possibles qu'ils faudra… déterminer.

- $0 \times \infty$
- $\dfrac{\infty}{\infty}$
- 1^{∞}
- ∞^{0}
- $\dfrac{0}{0}$
- $\infty - \infty$
- 0^{0}
- 0^{∞}

Pour ce faire, il faudra alors user de différentes méthodes et techniques pour transformer l'écriture de la suite et « lever l'indétermination ».

Notamment, soit factoriser une somme, développer un produit, décomposer une fraction en éléments simples ou multiplier le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée, soit essayer de changer la forme de l'expression, soit utiliser le théorème de comparaison ou des gendarmes, soit le corollaire (18.1) sur les suites monotones pour pouvoir conclure [6].

ATTENTION Dans les paragraphes qui suivent, on considèrera un réel $a \in \overline{\mathbb{R}}$, deux fonctions f et g à valeurs réelles définies dans un voisinage de a et on considèrera les limites en ce point.

II.1 Limite d'une somme

Proposition 8 (Somme) : Soient $\ell,\ \ell' \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme Indéter.

Preuve :

Cas où ℓ et ℓ' sont finies : Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire et d'écrire :

$$|f(x)+g(x)-(\ell+\ell')| \leqslant |f(x)-\ell| + |g(x)-\ell'|\,.$$

– Comme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies |f(x)-\ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

– Comme $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,g}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,g} \implies |g(x)-\ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

[6]. Dans tous les cas, réfléchir avant d'affirmer.

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}_{a,g}$ on a alors $|f(x)+g(x)-(\ell+\ell')| \leqslant |f(x)-\ell|+|g(x)-\ell'| \leqslant \varepsilon$.

Donc $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x) = \ell+\ell'$.

Cas où ℓ est finie et $\ell' = +\infty$: Soit $A \in \mathbb{R}$.

– Comme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies |f(x)-\ell| \leqslant 1 \implies f(x) \geqslant \ell - 1.$$

– Comme $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,g}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,g} \implies g(x) \geqslant A - \ell + 1.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}_{a,g}$ on a alors $f(x)+g(x) \geqslant (A - \cancel{\ell} + \cancel{1}) + (\cancel{\ell} - \cancel{1}) = A$. Donc $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x) = +\infty$.

Cas où $\ell+\ell' = +\infty$: Soit $A \in \mathbb{R}$.

– Comme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies f(x) \geqslant \frac{A}{2}.$$

– Comme $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,g}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,g} \implies g(x) \geqslant \frac{A}{2}.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}_{a,g}$ on a alors $f(x)+g(x) \geqslant A$.

Donc $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x) = +\infty$.

ATTENTION

Cas de la forme indéterminée $(+\infty)-(+\infty)$:

— On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+\ell) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, mais $\lim\limits_{x\to+\infty} ((x+\ell)-x) = \ell$.

— On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$, mais $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} = -\infty$.

— On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\cos(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x = +\infty$, mais $(x+\cos(x)-x) = \cos(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Exemple 5 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 2 + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ a pour limite 2 en $+\infty$.

En effet $\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{\sqrt{x}} & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2 & = & 2 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{les sommes de limites}]{\text{D'après les théorèmes sur}} \lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \dfrac{4}{\sqrt{x}} = 2.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2+0 = 2$ d'après les théorèmes sur les limites de sommes.

II.2 Limite d'un produit

Proposition 9 (Produit) : Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si g a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $f \times g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞ [7]	Forme Indéter.	∞ [7]

Preuve :

Cas où ℓ et ℓ' sont finies : Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$$|f(x)g(x) - \ell\ell'| \leqslant |(f(x) - \ell)g(x) + \ell(g(x) - \ell')| \leqslant |f(x) + \ell||g(x)| + |\ell||g(x) - \ell'|.$$

Or, d'après la proposition (13) , la fonction g est bornée dans un voisinage $\mathcal{V}_{a,g}$ de a, disons par un réel $K > 0$.

– Comme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies |f(x) - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2K}.$$

– Comme $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,g}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,g} \implies |g(x) - \ell'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2|\ell|}.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}_{a,g'}$ on a alors $|f(x)g(x) - \ell\ell'| \leqslant \varepsilon$.

Donc $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = \ell\ell'$.

Remarque : Si jamais il arrivait que ℓ ou K soient nuls, il suffirait de choisir les voisinages $\mathcal{V}_{a,g}$ et $\mathcal{V}_{a,f}$ respectivement tels que :

$$|g(x) - \ell'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(|\ell| + 1)} \quad \text{ou} \quad |f(x) - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(K + 1)}$$

sans que l'inégalité finale ne soit changée.

Cas où $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ell' = +\infty$: Soit $A > 0$.

– Comme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies |f(x) - \ell| \leqslant \frac{\ell}{2} \implies f(x) \geqslant \frac{\ell}{2}.$$

– Comme $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,g}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,g} \implies g(x) \geqslant \frac{2A}{\ell}.$$

[7]. Appliquer la règle des signes d'un produit.

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}_{a,g}$, on a alors $f(x)g(x) \geqslant \frac{\ell}{2} \times \frac{2\mathrm{A}}{\ell} = \mathrm{A}$.

Donc $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = +\infty$.

Cas où $\ell = \ell' = +\infty$: Soit $\mathrm{A} > 0$.

- Comme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies f(x) \geqslant \sqrt{\mathrm{A}}.$$

- Comme $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,g}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,g} \implies g(x) \geqslant \sqrt{\mathrm{A}}.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}_{a,g}$, on a alors $f(x)g(x) \geqslant \mathrm{A}$.

Donc $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = +\infty$.

ATTENTION

Cas de la forme indéterminée $0 \times (\infty)$:

— On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{\pi}{x-2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} x - 2 = 0$, mais $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{\pi}{x-2} \times (x-2) = \pi$.

— On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, mais $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} \times x^2 = -\infty$.

— On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, mais $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} \times x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

II.3 Limite d'un quotient

Proposition 10 (Inverse) : Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	$\ell \neq 0$	0	∞
alors $\frac{1}{f}$ a pour limite	$\frac{1}{\ell}$	∞ [8]	0

Preuve :

Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell \neq 0$: Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|f(x) - \ell|}{|f(x)|\,|\ell|}.$$

- Comme $\ell \neq 0$, d'après le théorème (14), il existe un voisinage $\mathcal{V}'_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}'_{a,f} \implies f(x) \neq 0.$$

[8]. Appliquer la règle des signes d'un quotient.

– Comme $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies |f(x) - \ell| \leqslant \min\left(\frac{|\ell|}{2} ; \frac{|\ell|^2 \varepsilon}{2}\right).$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire,

$$x \in \mathcal{V}_{a,f},\ \big||f(x)| - |\ell|\big| \leqslant |f(x) - \ell| \leqslant \frac{|\ell|}{2} \implies |f(x)| \geqslant |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2}.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}'_{a,f}$, on a alors

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|f(x) - \ell|}{|f(x)|\,|\ell|} \leqslant \frac{\dfrac{|\ell|^2 \varepsilon}{2}}{\dfrac{|\ell|}{2} \times |\ell|} = \varepsilon.$$

Donc $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$.

Cas où $\ell + \infty$: Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies f(x) \geqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

En particulier, $\forall x \in \mathcal{V}_{a,f}$, $f(x) > 0$ puis $\frac{1}{|f(x)|} = \frac{1}{f(x)} \leqslant \varepsilon$.

Donc $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Cas où $\ell = 0$: On suppose, par exemple, que 0 est atteint par valeurs supérieures.

Soit $\mathrm{A} > 0$.

– Comme f n'est pas identiquement nulle, il existe un voisinage $\mathcal{V}'_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}'_{a,f} \setminus \{a\} \implies f(x) > 0.$$

– Comme $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies |f(x)| \leqslant \frac{1}{\mathrm{A}}.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}'_{a,f}$, on a alors $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{|f(x)|} \geqslant \mathrm{A}$.

Donc $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

En remarquant que $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$, on en déduit alors les résultats sur les limites de quotients :

Proposition 11 (Quotient) : Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞
Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0	0	∞	ℓ' [9]
alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞ [10]	Forme Indéter.	0	∞ [10]

Exercice 8 : Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{1-x^4}$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2-\sqrt{4-\frac{1}{x}}}$.

II.4 Limite d'une composée

Proposition 12 (Limite d'une fonction Composée) : Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathrm{E}$ et $g : \mathrm{E} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à E et $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x\to b} g(x) = c, \text{ alors } \lim_{x\to a} (g\circ f)(x) = c.$$

Preuve : Parmi les 27 cas possibles, démontrons ce théorème quand a et c sont finis et $b = +\infty$, par exemple.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $]c-\varepsilon\,;c+\varepsilon[$ un voisinage ouvert de c.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to b} g(x) = c$, $\exists\, \mathrm{A}(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, \mathrm{X} \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{X} > \mathrm{A} \implies g(\mathrm{X}) \in]c-\varepsilon\,;c+\varepsilon[.$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = b(=+\infty)$, i.e. , qu'il existe $\alpha(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$x \in]a-\alpha\,;a+\alpha[\implies f(x) \in]\mathrm{A}\,;+\infty[\text{ i.e. } f(x) > \mathrm{A}.$$

Conclusion, $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x \in]a-\alpha\,;a+\alpha[$ entraîne $f(x) > \mathrm{A}$ puis $g(f(x)) \in]c-\varepsilon\,;c+\varepsilon[$.

On a bien montré que $\displaystyle\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

Cette dernière propriété nous permet alors de justifier la recherche d'une limite par changement de variable *i.e.* on ne s'intéresse plus à la limite de $(gof)(x)$ quand $x \to a$, mais de $g(\mathrm{X})$ quand $\mathrm{X} \to b$.

Exemple 6 : On cherche la limite de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln^2(x) + 2\ln(x)}{\ln^2(x)+1}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(x)+2\ln(x)}{\ln^2(x)+1} \underset{\boxed{\substack{\mathrm{X}=\ln(x)\\ \lim_{x\to 0}\mathrm{X}=-\infty}}}{\overset{}{=}} \lim_{\mathrm{X}\to-\infty} \frac{\mathrm{X}^2+2\mathrm{X}}{\mathrm{X}^2+1} = 1.$$

[9]. y compris $\ell' = 0$.
[10]. Appliquer la règle des signes d'un quotient.

Exercice 9 : Déterminer les limites suivantes si elles existent. Dans le cas contraire, on déterminera les limites par valeurs supérieures et inférieures.

Dans tous les cas, préciser l'équation d'une éventuelle asymptote à la courbe représentative de f.

1. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+6x-7}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1+x}{1-x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to0}\sqrt{\frac{2-x}{x}}$

En posant $g \equiv |...|$ dans la proposition (12) , on retrouve le corollaire (4.1) :

Corollaire 12.1 (Limite et valeur absolue) : Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{K}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \implies \lim_{x\to a} |f(x)| = |\ell|\,.$$

Les deux théorèmes suivants sont de simples corollaires de la proposition (12) précédente. Leurs applications sont cependant loin d'être triviales. Nous en verrons quelques exemples.

Corollaire 12.2 (Limite d'une suite explicite) : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[\mathrm{A}\,;+\infty[$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = f(n)$ pour tout entier naturel $n \geqslant \mathrm{A}$.

Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\text{Si } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Rien à démontrer ici. C'est la définition de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ en remplaçant x par n.

Exemple 7 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{\dfrac{3n+2}{n+1}}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+2}{n+1} = 3$ et $\displaystyle\lim_{x\to3}\sqrt{x} = \sqrt{3}$, on a aisément $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.

Corollaire 12.3 (Limite d'une suite quelconque) : Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont tous les termes appartiennent à I.

Pour réels a et b de $\overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\text{Si } \begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = a \\ \text{et} \\ \displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = b \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = b.$$

Preuve :

- Soit J_b un voisinage ouvert quelconque de b [11].
- Comme $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = b$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ ouvert de a [12](dépendant de J_b) tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \in \mathcal{V}_a \cap \mathrm{I} \implies f(x) \in \mathrm{J}_b.$$

– Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ i.e. , il existe un rang $n_0(\mathcal{V}_a) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\; n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad u_n \in \mathcal{V}_a.$$

– Conclusion, $n \geqslant n_0$ entraîne $u_n \in \mathcal{V}_a$ puis $f(u_n) \in \mathrm{J}_b$.

On a bien prouvé que :

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = b.$$

Cet énoncé est la base d'un théorème fort des suites récurrentes définies par $u_{n+1} = f(u_n)$. En effet, si $u_n \longrightarrow \ell$, alors $u_{n+1} \longrightarrow \ell$.

Le corollaire précédent permet donc d'écrire :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(u_n).$$

On est à l'aube d'un de vos premiers théorèmes d'interversion de limites !

Pour l'instant, on ne peut encore rien dire si ce n'est que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendra vers la limite de f en ℓ pour peu qu'elle en ait une.

Mais, imaginons que, tout naturellement, on ait $\lim\limits_{x \to \ell} f(x) = f(\ell)$ ou, autrement dit, que f soit **continue** en ℓ.

On obtiendrait alors un moyen efficace de trouver la limite d'une suite récurrente à l'aide de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ que l'on ferait « passer à la limite » :

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle n \to +\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle n \to +\infty} \\ \ell & = & f(\ell) \end{array}$$

Autrement dit $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = f\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right).}$$

(sous conditions de continuité de f)

La limite cherchée serait alors nécessairement une solution de l'équation

$$f(x) = x.$$

Nous y reviendrons plus avant dans les chapitres suivants car, pour l'instant, rien ne nous assure que $\lim\limits_{x \to \ell} f(x) = f(\ell)$!!!

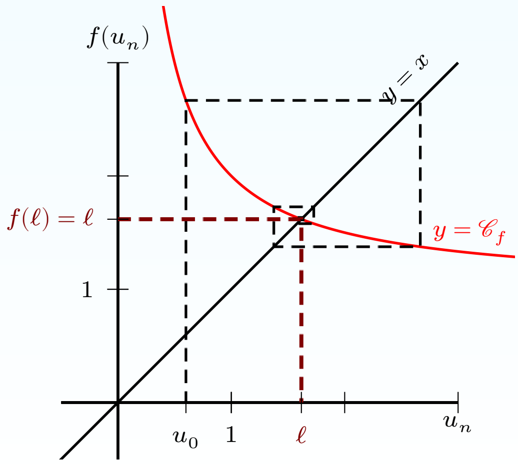
Exemple 8 :

[11]. de la forme $]b - \varepsilon\,; b + \varepsilon[$ ou $]\beta\,; +\infty[$ suivant que b est fini ou non.
[12]. de la forme $]a - \alpha\,; a + \alpha[$ ou $]\alpha\,; +\infty[$ suivant que a est fini ou non.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite définie par récurrence par une fonction dont est tracée la courbe représentative ci-contre.

Les termes de la suite semblent converger vers le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$, un « point fixe » de f.

On verra dans quel contexte ceci est vrai.



En pratique, le corollaire (12.3) permet souvent de démontrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point a :

Méthode 3 (Montrer qu'une fonction n'a pas de limite) :
Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Pour montrer que f n'a pas de limite en a, il suffit de trouver 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$.

Exemple 9 ($\cos$ n'a pas de limite en $\pm\infty$) : Considérons les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n = 2\pi n$ et $v_n = \dfrac{\pi}{2} + u_n$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(u_n) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(v_n)$.

La fonction cos ne peut donc avoir de limites en $+\infty$.

Exercice 10 : Soit f une fonction périodique.

Démontrer que si f admet une limite ℓ en $+\infty$, f est constante.

III Propriétés de la limite

III.1 La limite contrôle la fonction

Proposition 13 : Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, D un voisinage de a et $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$.

Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

Par la contraposée, toute fonction non bornée sur un voisinage de a ne peut avoir de limite finie.

Preuve : Soit $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de f en a.

Par définition, il existe une voisinage $\mathcal{V}_{a,1}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,1} \implies |f(x) - \ell| \leqslant 1.$$

i.e. $\forall\, x \in \mathcal{V}_{a,1}$, $\ell - 1 \leqslant f(x) \leqslant \ell + 1$. La fonction f est bornée dans un voisinage de a.

On a mieux que la proposition (13) :

Théorème 14 : Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

1. Si $m < \ell$ alors, il existe un voisinage de a sur lequel $m < f(x)$.
2. Si $\ell < \mathrm{M}$ alors, il existe un voisinage de a sur lequel $f(x) < \mathrm{M}$.

Preuve :

1. Soient $m < \ell$ et $\varepsilon = \dfrac{\ell - m}{2} > 0$.

   Comme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, $\forall\, x \in \mathrm{D}$,

$$\begin{aligned} |x - a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon \implies \ell - \varepsilon < f(x) \\ \iff \frac{\ell + m}{2} = \ell - \frac{\ell - m}{2} < f(x) \\ \iff m < f(x). \end{aligned}$$

2. Le cas $\ell < \mathrm{M}$ est identique.

Un cas particulier TRÈS important est le cas où $\ell > 0$ ou $\ell \neq 0$, le théorème (14) nous assure de l'existence d'un voisinage de a sur lequel $f(x) > 0$ ou $f(x) \neq 0$ *i.e.* il existe un voisinage de a sur lequel, f prend des valeurs du même signe que sa limite.

III.2 Limite et relation d'ordre

Proposition 15 (Limite et ordre) : Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et deux fonctions f et g définies sur tout voisinage $\mathcal{V}_a$ de a.

$$\text{Si,} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall\, x \in \mathcal{V}_a,\ g(x) \leqslant f(x), \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell' \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \end{array} \right. \qquad \text{alors} \quad \ell' \leqslant \ell.$$

On parle souvent de conservation des inégalités **larges** par passage à la limite.

Preuve :

Avec le théorème (14) : D'après le théorème (14), si $\ell' - \ell > 0$ alors $g(x) - f(x) > 0$ sur un voisinage de $\mathcal{V}_a$ de a.

Par la contraposition, si $g(x) - f(x) \leqslant 0$ sur un voisinage de a alors $\ell' \leqslant \ell$.

Preuve directe : Soit $\mathcal{V}_a$ un voisinage de a et supposons que $\forall\, x \in \mathcal{V}_a$, $g(x) \leqslant f(x)$ avec $\ell' > \ell$.

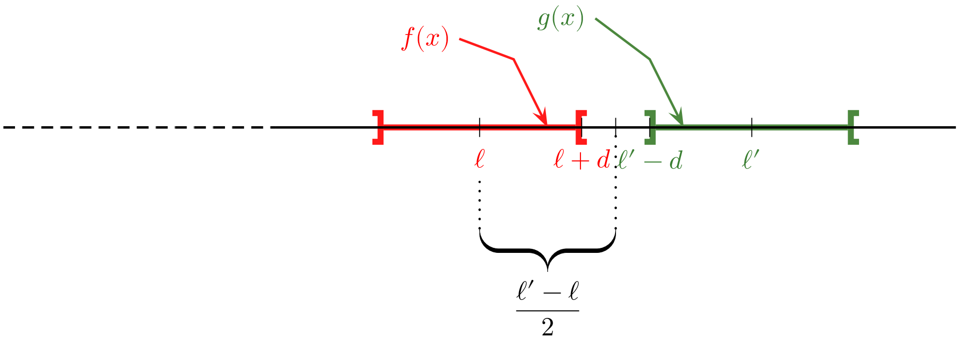
Posons alors, comme pour la démonstration de l'unicité de la limite, $d < \dfrac{\ell' - \ell}{2}$.

– Comme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{\ell,f}$ de ℓ tel que :

$$\forall\, x \in \mathcal{V}_{\ell,f} \cap \mathcal{V}_a, \quad \ell - d < f(x) < \ell + d.$$

– Comme $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{\ell',g}$ de ℓ' tel que :

$$\forall\, x \in \mathcal{V}_{\ell',g} \cap \mathcal{V}_a, \quad \ell' - d < g(x) < \ell' + d.$$



D'où, pour $x \in \mathcal{V}_{\ell,f} \cap \mathcal{V}_{\ell',g} \cap \mathcal{V}_a$ on obtiendrait :

$$f(x) < \ell + d < \ell' - d < g(x) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) < g(x).$$

D'où la contradiction et la nécessité que $\ell' \leqslant \ell$.

Remarques :

— La proposition (15) n'est pas vraie avec des inégalités strictes : Si $g(x) < f(x)$ alors on ne peut pas en déduire $\ell < \ell'$ mais seulement $\ell \leqslant \ell'$:

Prenez, par exemple $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ qui tendent toutes deux vers 0 alors qu'il est clair que $-\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$.

— La proposition (15) permet de comparer deux limites, mais elle ne permet pas de démontrer l'existence de la limite d'une fonction ce qui n'est pas le cas des théorèmes qui suivent.

— La proposition (15) peut s'étendre aux limites à gauche ou à droite. (Il suffit simplement de modifier l'intervalle de définition des fonctions).

Théorème 16 : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, trois fonctions f, g et h définies sur un voisinage ouvert $\mathcal{V}_a$ de a et ℓ un réel.

Théorème d'encadrement :

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a, \quad g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

Théorème de majoration :

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a, \quad g(x) \leqslant f(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

Théorème de minoration :

$$\text{Si} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall\, x \in \mathcal{V}_a, \quad f(x) \leqslant g(x) \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Preuve :

Théorème d'encadrement : Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $]\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon[$ un voisinage ouvert quelconque de ℓ.

Comme $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$, il existe deux voisinages ouverts $\mathcal{V}_{g,a}$ et $\mathcal{V}_{h,a}$ de a tels que :

$$x \in \mathcal{V}_{g,a} \implies \ell-\varepsilon < g(x) < \ell+\varepsilon \quad \text{et} \quad x \in \mathcal{V}_{h,a} \implies \ell-\varepsilon < h(x) < \ell+\varepsilon.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_a \cap \mathcal{V}_{g,a} \cap \mathcal{V}_{h,a}$, on a alors :

$$\ell-\varepsilon < g(x) < f(x) < h(x) < \ell+\varepsilon \quad \text{i.e.} \quad f(x) \in\,]\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon[\,.$$

Donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Théorème de majoration : La démonstration est identique en plus simple.

Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ et $]\mathrm{A}\,;+\infty[$ un voisinage ouvert de $+\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}_{g,a}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{g,a} \implies \mathrm{A} < g(x).$$

Pour $x \in \mathcal{V}_a \cap \mathcal{V}_{g,a}$, on a alors :

$$\mathrm{A} < g(x) < f(x) \quad \text{i.e.} \quad f(x) \in\,]\mathrm{A}\,;+\infty[\,.$$

Donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Théorème de minoration : La démonstration est identique.

Exercice 11 : Déterminer les limites suivantes :

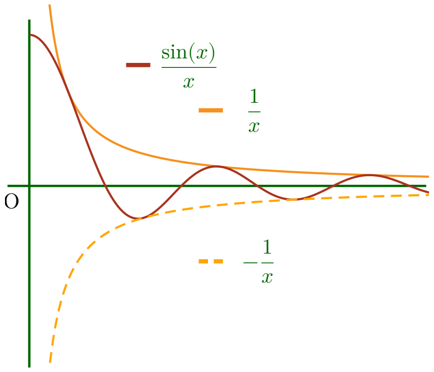
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \cos(x)$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.
4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.

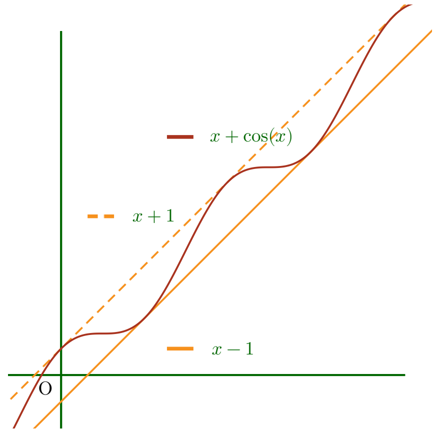
Correction :

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, d'où $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\sin(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, d'après le théorème d'encadrement, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$





2 De la même manière, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x-1 \leqslant x+\cos(x)\ (\leqslant x+1)$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$, d'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x\to+\infty} x+\cos(x) = +\infty.$$

3 $\forall x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x} < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1 \iff \frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$.

Donc, suivant le signe de x, on a :

$$1-x < x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1 \quad \text{ou} \quad 1 < x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1-x.$$

Dans tous les cas, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$.

4 Pour $x>1$, $0 < \frac{1}{x} < 1$ donc $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$.

De même, $\forall x < -1$, $-1 < \frac{1}{x} < 0$ donc $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = -1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$.

III.3 La monotonie contrôle la limite

Les variations de la fonction peuvent aussi « forcer » certaines propriétés de la limite.

Théorème 17 (Théorème de la limite monotone) : Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ $(a<b)$ et $f :]a\,;b[\longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b, et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \sup\limits_{]a;b[}(f) < +\infty$.
- Si f n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$.

Preuve : On ne traite ici que le cas où $b<+\infty$. Le cas infini étant plus simple.

– On suppose que f est majorée et on considère $\mathrm{F} = \{f(x), x \in]a\,;b[\,\}$. L'ensemble F est donc une partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée.

F admet donc une borne supérieure $\ell = \sup\{f(x),\ x\in]a\,;b[\,\} = \sup\limits_{]a;b[}(f)$.

Soit $\varepsilon > 0$.
Par définition de ℓ, $\ell - \varepsilon$ n'est plus un majorant de F. Il existe donc $u \in]a\,;b[$ tel que $\ell - \varepsilon < f(u) \leqslant \ell$.

Comme f est croissante, $\forall x \in]a\,;b[$,

$$x \geqslant u \implies \ell - \varepsilon < f(u) \leqslant f(x) \leqslant \ell < \ell + \varepsilon. \tag{XIV.1}$$

Posons $\eta = b - u > 0$. Quel que soit x dans $]a, b[$, si $|x - b| \leqslant \eta$, alors $b - \eta \leqslant x < b$ i.e. $u \leqslant x < b$.

D'après (XIV.1), on a alors $\ell - \varepsilon < f(x) \leqslant \ell + \varepsilon$ d'où $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Et donc $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \ell < +\infty$.

– On suppose maintenant que f n'est pas majorée et soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$.

Comme A n'est pas un majorant de f, il existe $u \in]a\,;b[$ tel que $\mathrm{A} \leqslant f(u)$.

Comme f est croissante, $\forall x \in]a\,;b[$,

$$x \geqslant u \implies \mathrm{A} \leqslant f(u) \leqslant f(x). \tag{XIV.2}$$

Posons $\eta = b - u > 0$. Quel que soit x dans $]a\,;b[$, si $|x - b| \leqslant \eta$, alors $u \leqslant x < b$.

D'après (XIV.2), on a alors $f(x) \geqslant \mathrm{A}$.

Et donc $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$.

Dans le cas croissant, on a donc montré que $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \sup\limits_{]a;b[}(f)$ (éventuellement $+\infty$).

Remarque : Lorsque f est décroissante, on a les résultats correspondants :

— Si f est décroissante et minorée, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \inf\limits_{]a;b[}(f) > -\infty$.

— Si f est décroissante et non minorée, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = -\infty$.

III.4 Limites à gauche et à droite

Proposition 18 : Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ $(a < b)$ et $f :]a\,;b[\longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante et $x_0 \in]a\,;b[$.

Alors, f admet une limite à gauche et une limite à droite finies en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Preuve : Dire que f est définie en x_0 revient à dire que $f(x_0)$ existe et $-\infty < f(x_0) < +\infty$.

Notons $f_1 = f_{|]a,x_0[}$. La fonction f_1 est croissante, et majorée par $f(x_0)$.

D'après le théorème (17), f_1 admet donc une limite finie en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \sup\limits_{]a,x_0[}(f_1)$.

Or, par définition, $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

D'autre part, $\sup\limits_{]a,x_0[}(f_1)$ étant le plus petit des majorants de f_1, et $f(x_0)$ étant un majorant de f_1, on peut en déduire que $\sup\limits_{]a,x_0[}(f_1) \leqslant f(x_0)$.

On a donc prouvé que f admettait une limite à gauche en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0)$.

Idem pour la limite à droite en considérant $f_2 = f_{|]x_0,b[}$ décroissante, minorée et

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{]x_0,b[} (f_2) \geqslant f(x_0).$$

On retiendra le théorème et la proposition précédents sous la forme ci-dessous :

Corollaire 18.1 : Toute fonction monotone possède une limite à gauche et une limite à droite en tout point en lequel cela a un sens.

Afin de bien le comprendre, précisons cet énoncé dans un cas particulier d'une fonction $f : [a\,; b[\longmapsto \mathbb{R}$ croissante avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a\,; +\infty]$.

À retenir 1 : Le théorème de la limite monotone affirme que :

1. la limite $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ EXISTE et elle est forcément FINIE car $f(a) \leqslant \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ par passage à la limite,
2. pour tout $c \in]a\,; b[$, les limites $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ EXISTENT et elles sont forcément FINIES car $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$,
3. la limite $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ EXISTE et elle est soit finie, soit égale à $+\infty$.

IV Extension aux fonctions complexes

Définition/Théorème 5 (Limite d'une fonction complexe en un point) : Soit $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$.

On dit que f admet ℓ pour limite en a si :

$$\forall\, \mathrm{V}_\ell \in \mathscr{V}_{\mathbb{C}}(\ell), \quad \exists\, \mathrm{V}_a \in \mathscr{V}_{\mathbb{R}}(a), \quad \forall\, x \in \mathrm{D} \cap \mathrm{V}_a, \quad f(x) \in \mathrm{V}_\ell,$$

i.e.

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0, \quad \forall\, x \in \mathrm{D}, \quad |x - a| < \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

ou encore

$$\lim_{x \to a} |f(x) - \ell| = 0.$$

Le théorème d'unicité de la limite est encore valable, ce qui autorise la notation $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Théorème 19 (Parties réelle et imaginaire) : Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to a} \mathrm{Re}\,(f)(x) = \mathrm{Re}\,(\ell) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \mathrm{Im}\,(f)(x) = \mathrm{Im}\,(\ell).$$

Définition 6 (Fonction bornée) : Soit $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction.

On dit que f est bornée s'il existe un réel $\mathrm{K} \geqslant 0$ tel que $\forall\, x \in \mathrm{D}, \quad |f(x)| \leqslant \mathrm{K}$.

Globalement, on dit que f est bornée sur D si, et seulement si $|f|$ l'est.

En particulier,

Corollaire 19.1 : Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Si $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ admet une limite finie en $a \in \overline{\mathrm{D}}$ alors f est bornée sur un voisinage de a.

Preuve : Soit $\ell \in \mathbb{C}$ la limite de f en a. Alors,

$$\forall\, x \in \mathrm{D},\ |f(x)| \leqslant |f(x) - \ell| + |\ell|\,.$$

Comme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|x - a| \leqslant \alpha \implies |f(x) - \ell| \leqslant 1$ et

$$\forall\, x \in \mathrm{D} \cap [a - \alpha\,; a + \alpha]\,,\ |f(x)| \leqslant 1 + |\ell|\,.$$

Globalement,

$$\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}_+,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, x \in \mathrm{D} \cap\,]a - \eta\,; a + \eta[\,,\ |f(x)| \leqslant \mathrm{M}.$$

Donc, f est bornée dans un voisinage de a.

ATTENTION

Pas de $\pm\infty$ dans $\mathbb{C}$ ni de théorèmes basés sur la relation d'ordre.

Les notions de limite à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, sont maintenues pour les fonctions complexes, de même que les résultats sur les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse, à ceci près que les symboles $\pm\infty$ sont bannis.

Les grands théorèmes d'existence de limite - théorèmes d'encadrement/minoration/-majoration et théorème de la limite monotone - n'ont pas de sens dans le cas complexe car ils utilisent de façon essentielle la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$.

Index

Adhérence, 2
Asymptote, 13, 14
    horizontale, 13
    oblique, 13–15
    verticale, 13

Concavité, 5

Développement
    limité, 14

Espace
    séparé, 8
Euler, 1

Fonction
    bornée, 30
    continue, 23
    monotone, 28
    valeur absolue, 7, 22

Intérieur, 2
Inégalité
    triangulaire, 20

Limite, 4
    d'un produit, 18
    d'un quotient, 21
    d'une composée, 21
    d'une somme, 16
    d'une suite, 22
    de l'inverse, 19
    Définition topologique, 4
    en l'infini, 4, 5
    en un point, 6, 9
    fonctions de référence, 8
    Propriétés des, 16
    Unicité de la, 8
    à droite, 9, 10
    à gauche, 9, 10

Méthode
    Déterminer une droite asymptote, 14
    Position d'une courbe et de son asymptote, 15
    Une fonction n'a pas de limite, 24

Point
    adhérent, 2
    fixe, 24
    intérieur, 2
Prolongement
    par continuité, 12

Restriction, 10

Suite
    explicite
        limite d'une, 22
    Limite d'une, 22

Théorème
    d'encadrement, 26
    d'interversion, 23
    de comparaison, 25, 26
    de la limite monotone, 28, 30
Topologie, 1, 4, 8

Weierstrass, 1