Fonctions de la variable réelle
LIMITES

Exercice 1 : Déterminer les limites (si elles existent) suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$
2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x-\ln(x)$
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+1}-x$
5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1\right)$
7. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\cos(x)}{1-x}$
8. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+\sin(x)}{2-\sin(x)}$
9. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
10. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
11. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\ln(x)-2}{\ln(x)+1}$
12. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x\sin(5x^2)}{x+1}$.
14. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$.
15. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\sin(x)}$.
16. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}-\sqrt{x}\sin(x)$.

Exercice 2 : Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$
4. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos(x)}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$
8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n-1}$
9. $\lim\limits_{x\to \alpha} \dfrac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin(x)(\cos(2x)-\cos(x))}$
11. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$
12. $\lim\limits_{x\to \alpha^+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}$, $\quad(\alpha>0)$
13. $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$
14. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x-e^2}{x^2+x-6}$
15. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4}{1+x^\alpha\sin^2 x}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Trouver pour $(a,b)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 4 : Déterminer la limite (si elle existe) des fonctions suivantes en 0. On distinguera éventuellement 0^- et 0^+.

$f_1 : x \longmapsto \dfrac{3x^2-1}{x^2}$

$f_2 : x \longmapsto \dfrac{2x-1}{\sqrt{x}}$

$f_3 : x \longmapsto \dfrac{x^2}{|x|}$

$f_4 : x \longmapsto \dfrac{\tan(x)}{x}$

$f_5 : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

$f_6 : x \longmapsto \sqrt{1+\cos(x)} + \sqrt{1-\cos(x)}$

$f_7 : x \longmapsto \dfrac{\sin(5x)}{\sin(3x)}$

$f_8 : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$

$f_9 : x \longmapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$

$f_{10} : x \longmapsto \dfrac{\frac{1}{1-x} - (1+x+\cdots+x^n)}{x^n}$

$f_{11} : x \longmapsto x^x$

$f_{12} : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$

$f_{13} : x \longmapsto \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$

$f_{14} : x \longmapsto \dfrac{x}{e^{\sin(x)}-1}$

$f_{15} : x \longmapsto \dfrac{5^x-2^x}{x}$

Exercice 5 : En utilisant $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ déterminer les limites suivantes (montrer en même temps qu'elles existent) :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin(\sqrt{x})\ln(x)$.
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)}{x}$.
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin\left(xe^{-x}\right) \mathrm{e}^x$.

Exercice 6 : Déterminer les limites suivantes si elles existent. Dans le cas contraire, on déterminera les limites par valeurs supérieures et inférieures.

Dans tous les cas, préciser l'équation d'une éventuelle asymptote à la courbe représentative de f.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \arctan\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x^2-2x}$

Exercice 7 : Pour les fonctions suivantes, étudier les asymptotes éventuelles ainsi que la position relative de leur courbe représentative.

$f_1 : x \longmapsto 3 - \dfrac{1}{x+2}$

$f_2 : x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ où $c \neq 0$.

$f_3 : x \longmapsto \dfrac{-x^3+2x^2-x+3}{x^2+1}$.

$f_4 : x \longmapsto \dfrac{3\,(x-1)^3}{3x^2+1}$.

$f_5 : x \longmapsto \dfrac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^4-1}$

$f_6 : x \longmapsto \dfrac{2x-2}{x^2+x-2}$

$f_7 : x \longmapsto \dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}$

$f_8 : x \longmapsto \sqrt{x^2-3x+1}$

$f_9 : x \longmapsto \sqrt{x^2-x+1}$

$f_{10} : x \longmapsto 2x - \sqrt{x^2+1}$

$f_{11} : x \longmapsto 2x+2+\sqrt{x^2-6x+1}$

Exercice 8 : Montrer que les courbes des fonctions $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$, $x \longmapsto \mathrm{ch}\,(x)$ et $x \longmapsto \mathrm{sh}\,(x)$ sont asymptotes en $+\infty$.

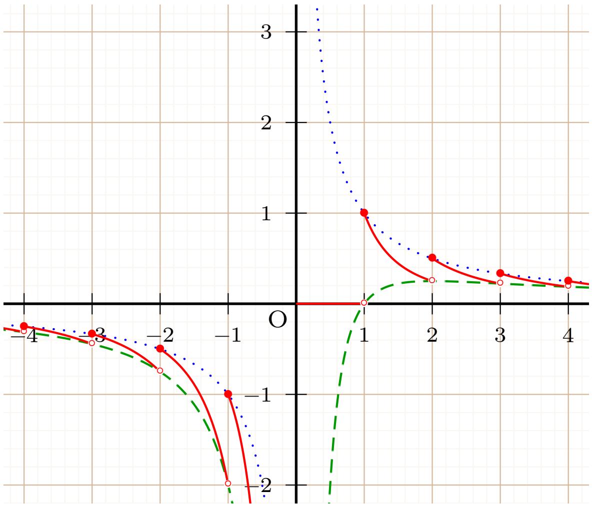
Exercice 9 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x^2}$$

représentée dans le repère ci-contre avec deux autres courbes d'équations

$$y = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{x-1}{x^2}.$$



1. Démontrer que, pour tout réel $x \neq 0$;

$$\frac{x-1}{x^2} < f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

2. En déduire la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.