Fonctions de la variable réelle
LIMITES

Exercice 1 : Déterminer les limites (si elles existent) suivantes :

1. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$
2. $\lim_{x\to\pm\infty} x-\ln(x)$
3. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x}$
4. $\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+1}-x$
5. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
6. $\lim_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right)$
7. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cos(x)}{1-x}$
8. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+\sin(x)}{2-\sin(x)}$
9. $\lim_{x\to\pm\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
10. $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
11. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(x)-2}{\ln(x)+1}$
12. $\lim_{x\to\pm\infty} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
13. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x\sin(5x^2)}{x+1}$.
14. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$.
15. $\lim_{x\to+\infty} e^{x-\sin(x)}$.
16. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}-\sqrt{x}\sin(x)$.

Exercice 2 : Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$
2. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$
3. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$
4. $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos(x)}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$
6. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$
8. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$
9. $\lim_{x\to\alpha} \frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n}$
10. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin(x)(\cos(2x)-\cos(x))}$
11. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$
12. $\lim_{x\to\alpha^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}$, $(\alpha>0)$
13. $\lim_{x\to 0} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$
14. $\lim_{x\to 2} \frac{e^x-e^2}{x^2+x-6}$
15. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{1+x^\alpha\sin^2 x}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Correction :

1. $\frac{x^2+2|x|}{x}=x+2\frac{|x|}{x}$. Si $x>0$ cette expression vaut $x+2$ donc la limite à droite en $x=0$ est $+2$. Si $x<0$ l'expression vaut -2 donc la limite à gauche en $x=0$ est -2. Les limites à droite et à gauche sont différentes donc il n'y a pas de limite en $x=0$.
2. $\frac{x^2+2|x|}{x}=x+2\frac{|x|}{x}=x-2$ pour $x<0$. Donc la limite quand $x\to-\infty$ est $-\infty$.
3. $\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\frac{x+2}{x-1}$, lorsque $x\to 2$ cette expression tend vers 4.
4. $\frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}=\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos(x)}=\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{1+\cos(x)}=1-\cos(x)$. Lorsque $x\to\pi$ la limite est donc 2.

5 $$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x-(1+x^2)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}.$$
$$= \frac{x-x^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}.$$

Lorsque $x \to 0$ la limite vaut $\frac{1}{2}$.

6 $$\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} = \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}\right)\times\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{x+5-(x-3)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}.$$

Lorsque $x \to +\infty$, la limite vaut 0.

7 Nous avons l'égalité $a^3-1=(a-1)(1+a+a^2)$. Pour $a=\sqrt[3]{1+x^2}$ cela donne :

$$\frac{a-1}{x^2} = \frac{a^3-1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1+x^2-1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1}{1+a+a^2}.$$

Lors que $x \to 0$, alors $a \to 1$ et la limite cherchée est $\frac{1}{3}$.

Autre méthode : si l'on sait que la limite d'un taux d'accroissement correspond à la dérivée nous avons une méthode moins astucieuse. Rappel (ou anticipation sur un prochain chapitre) : pour une fonction f dérivable en a alors

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$

Pour la fonction $f(x)=\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}$ ayant $f'(x)=\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$ cela donne en $a=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \frac{1}{3}.$$

8 $\frac{x^n-1}{x-1} = 1+x+x^2+\cdots+x^n$. Donc si $x\to 1$ la limite de $\frac{x^n-1}{x-1}$ est n. Donc la limite de $\frac{x-1}{x^n-1}$ en 1 est $\frac{1}{n}$.

La méthode avec le taux d'accroissement fonctionne aussi très bien ici. Soit $f(x)=x^n$, $f'(x)=nx^{n-1}$ et $a=1$. Alors $\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ tend vers $f'(1)=n$.

9 Montrons d'abord que la limite de

$$f(x)=\frac{x^k-\alpha^k}{x-\alpha}$$

en α est $k\alpha^{k-1}$, k étant un entier fixé. Un calcul montre que $f(x)=x^{k-1}+\alpha x^{k-2}+\alpha^2x^{k-3}+\cdots+\alpha^{k-1}$; en effet $(x^{k-1}+\alpha x^{k-2}+\alpha^2x^{k-3}+\cdots+\alpha^{k-1})(x-\alpha)=x^k-\alpha^k$. Donc la limite en $x=\alpha$ est $k\alpha^{k-1}$.
Une autre méthode consiste à dire que $f(x)$ est la taux d'accroissement de la fonction x^k, et donc la limite de f en α est exactement la valeur de la dérivée de x^k en α, soit $k\alpha^{k-1}$. Ayant fait ceci revenons à la limite de l'exercice : comme

$$\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n} = \frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x-\alpha}\times\frac{x-\alpha}{x^n-\alpha^n}.$$

Le premier terme du produit tend vers $(n+1)\alpha^n$ et le second terme, étant l'inverse d'un taux d'accroissement, tend vers $1/(n\alpha^{n-1})$. Donc la limite cherchée est

$$\frac{(n+1)\alpha^n}{n\alpha^{n-1}} = \frac{n+1}{n}\alpha.$$

10 La fonction $f(x)=\frac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin(x)(\cos(2x)-\cos(x))}$ s'écrit aussi $f(x)=\frac{1-\cos(x)}{\cos(x)(\cos(2x)-\cos(x))}$. Or $\cos(2x)=2\cos^2x-1$. Posons $u=\cos(x)$, alors

$$f(x)=\frac{1-u}{u(2u^2-u-1)}=\frac{1-u}{u(1-u)(-1-2u)}=\frac{1}{u(-1-2u)}$$

Lorsque x tend vers 0, $u=\cos(x)$ tend vers 1, et donc $f(x)$ tend vers $-\dfrac{1}{3}$.

11

$$\begin{aligned}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x} &= \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1}\end{aligned}$$

Quand $x\to+\infty$ alors $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\to 0$ et $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}=\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}\to 0$, donc la limite recherchée est $\dfrac{1}{2}$.

12 La fonction s'écrit

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x+\alpha}}=\frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}-1}{\sqrt{x+\alpha}}.$$

Notons $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}$ alors à l'aide de l'expression conjuguée

$$g(x)=\frac{x-\alpha}{(\sqrt{x-\alpha})(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})}=\frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}.$$

Donc $g(x)$ tend vers 0 quand $x\to\alpha^+$. Et maintenant $f(x)=\dfrac{g(x)-1}{\sqrt{x+\alpha}}$ tend vers $-\dfrac{1}{\sqrt{2\alpha}}$.

13 Pour tout réel y nous avons la double inégalité $y-1<\lfloor y\rfloor\leqslant y$. Donc pour $y>0$, $\dfrac{y-1}{y}<\dfrac{\lfloor y\rfloor}{y}\leqslant 1$. On en déduit que lorsque y tend vers $+\infty$ alors $\dfrac{\lfloor y\rfloor}{y}$ tend 1. On obtient le même résultat quand y tend vers $-\infty$. En posant $y=1/x$, et en faisant tendre x vers 0, alors $x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor=\dfrac{\lfloor y\rfloor}{y}$ tend vers 1.

14

$$\frac{e^x-e^2}{x^2+x-6}=\frac{e^x-e^2}{x-2}\times\frac{x-2}{x^2+x-6}=\frac{e^x-e^2}{x-2}\times\frac{x-2}{(x-2)(x+3)}=\frac{e^x-e^2}{x-2}\times\frac{1}{x+3}.$$

La limite de $\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$ en 2 vaut e^2 ($\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$ est la taux d'accroissement de la fonction $x\mapsto e^x$ en la valeur $x=2$), la limite voulue est $\dfrac{e^2}{5}$.

15 Soit $f(x)=\dfrac{x^4}{1+x^\alpha\sin^2 x}$. Supposons $\alpha\geqslant 4$, alors on prouve que f n'a pas de limite en $+\infty$. En effet pour pour $u_k=2k\pi$, $f(2k\pi)=(2k\pi)^4$ tend vers $+\infty$ lorsque k (et donc u_k) tend vers $+\infty$. Cependant pour $v_k=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $f(v_k)=\dfrac{v_k^4}{1+v_k^\alpha}$ tend vers 0 (ou vers 1 si $\alpha=4$) lorsque k (et donc v_k) tend vers $+\infty$. Ceci prouve que $f(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.

Reste le cas $\alpha<4$. Il existe β tel que $\alpha<\beta<4$.

$$f(x)=\frac{x^4}{1+x^\alpha\sin^2(x)}=\frac{x^{4-\beta}}{\frac{1}{x^\beta}+\frac{x^\alpha}{x^\beta}\sin^2(x)}.$$

Le numérateur tend $+\infty$ car $4-\beta>0$. $\dfrac{1}{x^\beta}$ tend vers 0 ainsi que $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta}\sin^2(x)$ (car $\beta>\alpha$ et $\sin^2(x)$ est bornée par 1). Donc le dénominateur tend vers 0 (par valeurs positives). La limite est donc de type $+\infty/0^+$ (qui n'est pas indéterminée !) et vaut donc $+\infty$.

Exercice 3 : Trouver pour $(a,b)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Correction : Supposons $a\geqslant b$. Alors

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(a^x\times\frac{1+(\frac{b}{a})^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=a\left(\frac{1+(\frac{b}{a})^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Or $0\leqslant\dfrac{b}{a}\leqslant 1$, donc $0\leqslant(\dfrac{b}{a})^x\leqslant 1$ pour tout $x\geqslant 1$.

Donc $(\dfrac{1}{2})^{\frac{1}{x}}\leqslant\left(\dfrac{1+(\frac{b}{a})^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant 1^{\frac{1}{x}}$.

Les deux termes extrêmes tendent vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$ donc le terme du milieu tend aussi vers 1.

Conclusion, si $a\geqslant b$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=a$.

Si $b\geqslant a$ alors cette limite vaudrait b.

Cela se résume dans le cas général où a,b sont quelconques par

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\max(a,b).$$

Exercice 4 : Déterminer la limite (si elle existe) des fonctions suivantes en 0. On distinguera éventuellement 0^- et 0^+.

$f_1 : x\longmapsto \dfrac{3x^2-1}{x^2}$

$f_2 : x\longmapsto \dfrac{2x-1}{\sqrt{x}}$

$f_3 : x\longmapsto \dfrac{x^2}{|x|}$

$f_4 : x\longmapsto \dfrac{\tan(x)}{x}$

$f_5 : x\longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

$f_6 : x\longmapsto \sqrt{1+\cos(x)}+\sqrt{1-\cos(x)}$

$f_7 : x\longmapsto \dfrac{\sin(5x)}{\sin(3x)}$

$f_8 : x\longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$

$f_9 : x\longmapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$

$f_{10} : x\longmapsto \dfrac{\frac{1}{1-x}-(1+x+\cdots+x^n)}{x^n}$

$f_{11} : x\longmapsto x^x$

$f_{12} : x\longmapsto \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$

$f_{13} : x\longmapsto \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$

$f_{14} : x\longmapsto \dfrac{x}{e^{\sin(x)}-1}$

$f_{15} : x\longmapsto \dfrac{5^x-2^x}{x}$

Exercice 5 : En utilisant $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ déterminer les limites suivantes (montrer en même temps qu'elles existent) :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\sin(\sqrt{x})\ln(x)$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)}{x}$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sin\left(xe^{-x}\right)\mathrm{e}^x$.

Exercice 6 : Déterminer les limites suivantes si elles existent. Dans le cas contraire, on déterminera les limites par valeurs supérieures et inférieures.

Dans tous les cas, préciser l'équation d'une éventuelle asymptote à la courbe représentative de f.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \arctan\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x^2-2x}$

Exercice 7 : Pour les fonctions suivantes, étudier les asymptotes éventuelles ainsi que la position relative de leur courbe représentative.

$f_1 : x \longmapsto 3-\dfrac{1}{x+2}$

$f_2 : x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ où $c\neq 0$.

$f_3 : x \longmapsto \dfrac{-x^3+2x^2-x+3}{x^2+1}$.

$f_4 : x \longmapsto \dfrac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$.

$f_5 : x \longmapsto \dfrac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^4-1}$

$f_6 : x \longmapsto \dfrac{2x-2}{x^2+x-2}$

$f_7 : x \longmapsto \dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}$

$f_8 : x \longmapsto \sqrt{x^2-3x+1}$

$f_9 : x \longmapsto \sqrt{x^2-x+1}$

$f_{10} : x \longmapsto 2x-\sqrt{x^2+1}$

$f_{11} : x \longmapsto 2x+2+\sqrt{x^2-6x+1}$

Exercice 8 : Montrer que les courbes des fonctions $x\longmapsto \dfrac{e^x}{2}$, $x\longmapsto \mathrm{ch}(x)$ et $x\longmapsto \mathrm{sh}(x)$ sont asymptotes en $+\infty$.

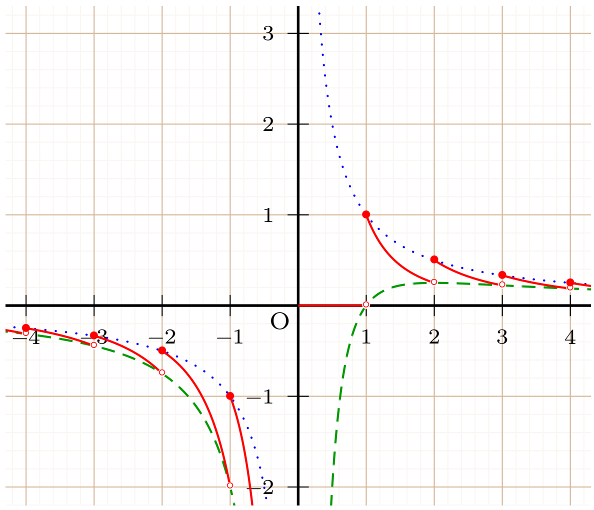
Exercice 9 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=\frac{\lfloor x\rfloor}{x^2}$$

représentée dans le repère ci-contre avec deux autres courbes d'équations

$$y=\frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad y=\frac{x-1}{x^2}.$$



1. Démontrer que, pour tout réel $x\neq 0$;
$$\frac{x-1}{x^2} < f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$
2. En déduire la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.