XIV
Fonctions de la variable réelle LIMITES

Contenu

Dans tout ce chapitre, on considère une fonction définie sur un sous-ensemble quelconque D de $\mathbb{R}$:

$$f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}.$$

I LIMITES

I.1 Point adhérent

On étudiera la limite de f en un point a dit adhérent à D *i.e.* un point appartenant à D ou « au bord de D ». Dans la même idée, on dira qu'un point est intérieur à A s'il appartient à A sans être « au bord de A ».

Plus précisément,

Définition 1 (Point intérieur/adhérent à une partie de $\mathbb{R}$) : (Hors-Programme)
Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Point intérieur : Soit $x \in \mathbb{R}$.

On dit que x est *intérieur* à A si A contient un voisinage de x :

$$\exists \mathrm{V}_x \in \mathcal{V}(x), \mathrm{V}_x \subset \mathrm{A}.$$

On note $\mathring{\mathrm{A}}$ leur ensemble.

Point adhérent : Soit $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que x est *adhérent* à A si A rencontre tout voisinage de x :

$$\forall\, V_x \in \mathcal{V}(x),\ A \cap V_x \neq \varnothing.$$

On note $\overline{A}$ leur ensemble.

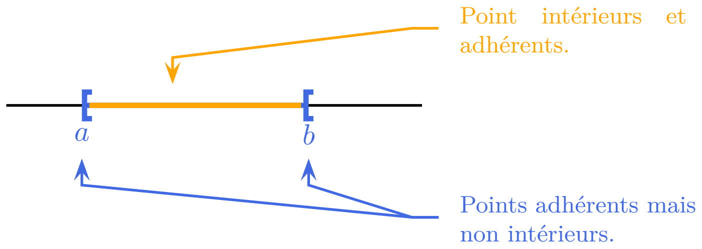


Figure XIV.1 – Points intérieurs et adhérents à un intervalle $[a\,;b[$.

Exemples 1 :

- 1 est adhérent à $[0\,;1[$ et $+\infty$ est adhérent à $\mathbb{R}_+^*$.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Alors $\overset{\circ}{\overbrace{[a\,;b[}} =]a\,;b[$ et $\overline{[a\,;b[} = [a\,;b]$.

  D'une manière générale, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $\overline{\mathrm{I}}$ est l'intervalle fermé correspondant dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ en incluant les bornes et $\overset{\circ}{\mathrm{I}}$ l'intervalle ouvert excluant les bornes.

I	$\overset{\circ}{\mathrm{I}}$	$\overline{\mathrm{I}}$
$]1\,;2] \cup [3\,;4]$	$]1\,;2[\cup]3\,;4[$	$[1\,;2] \cup [3\,;4]$
$]1\,;+\infty[$	$]1\,;+\infty[$	$[1\,;+\infty]$
$]-\infty\,;2[$	$]-\infty\,;2[$	$[-\infty\,;2]$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\overline{\mathbb{R}}$

- Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$. Alors,
  - a et b sont adhérents à $[a\,;b[$.
  - $\forall\, x \in \mathbb{R}$ tel que $a < x < b$ est à la fois intérieur et adhérent à $[a\,;b[$.

Proposition 1 (Caractérisation séquentielle) : Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
x est adhérent à A si, et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.

Corollaire 1.1 : Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

$$\sup(A) \in \overline{A} \qquad \text{et} \qquad \inf(A) \in \overline{A}.$$

En particulier, on pourra toujours trouver une suite d'éléments de A convergeant vers $\sup(A)$. De même pour $\inf(A)$.

I.2 Limite et premières conséquences

Définition 2 (Définition topologique des limites) : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $b \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que f admet une *limite* b lorsque x tend vers a si, et seulement si

$$\forall\ \mathrm{V}_b \in \mathcal{V}(b),\ \exists\, \mathrm{U}_a \in \mathcal{V}(a)\ /\ \forall\, x \in \mathrm{U}_a \cap \mathrm{D}\ \Longrightarrow\ f(x) \in \mathrm{V}_b.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Remarque : Les inégalités sont indifféremment strictes ou larges pour définir des voisinages ouverts ou fermés excepté $\varepsilon > 0$. Le programme demande d'utiliser des inégalités larges ce que j'essaierai.

On retrouve alors tous les cas déjà connus :

Proposition 2 (Limites en $+\infty$) : Soient D tel que $+\infty \in \overline{\mathrm{D}}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \geqslant \alpha \implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha(\mathrm{A}) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \geqslant \alpha \implies f(x) \geqslant \mathrm{A}.$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall\, \mathrm{B} \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha(\mathrm{B}) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \geqslant \alpha \implies f(x) \leqslant \mathrm{B}.$

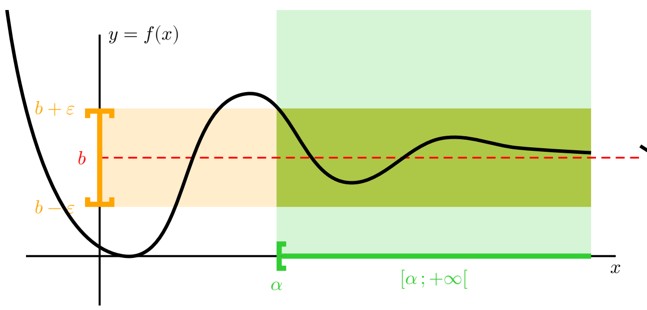


Figure XIV.2 – Limite finie en l'infini.

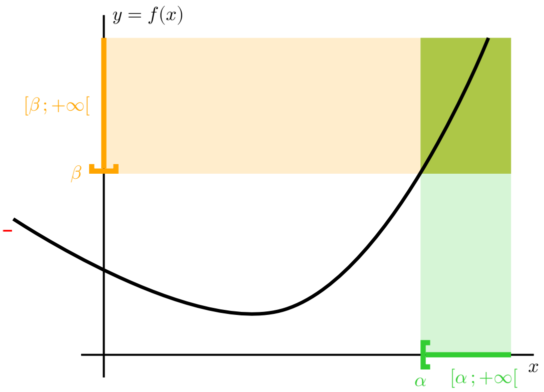


Figure XIV.3 – Limite infinie à l'infini.

Exercice 1 : À l'aide de la définition, montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

De manière analogue, en $-\infty$:

Proposition 3 (Limites en $-\infty$) : Soient D tel que $-\infty \in \overline{\mathrm{D}}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \beta(\varepsilon) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \leqslant \beta \implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists\, \beta(\mathrm{A}) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \leqslant \beta \implies f(x) \geqslant \mathrm{A}.$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall\, \mathrm{B} \in \mathbb{R},\ \exists\, \beta(\mathrm{B}) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \leqslant \beta \implies f(x) \leqslant \mathrm{B}.$

$f(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
x^n $n\neq 0$	$+\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair
$\dfrac{1}{x^n}$ $n\neq 0$	0	0
$\sqrt{x}$	$+\infty$	non défini
$\ln(x)$	$+\infty$	non défini
e^x	$+\infty$	0
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	0	non défini
$\sin(x)$ $\cos(x)$ $\tan(x)$	pas de limite	pas de limite
$\arctan(x)$	$\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{2}$
$\text{ch}(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\text{sh}(x)$	$+\infty$	$-\infty$

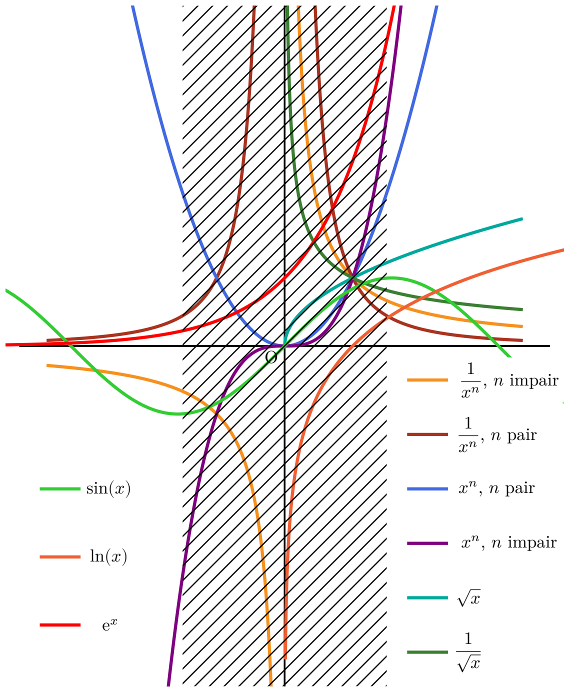


Figure XIV.4 – Limites des fonctions de référence en l'infini.

Remarque : Toutes les fonctions n'ont pas nécessairement une limite en l'infini. C'est le cas, notamment des fonctions circulaires cos, sin ou tan mais aussi de la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & x - \lfloor x \rfloor . \end{array}$$

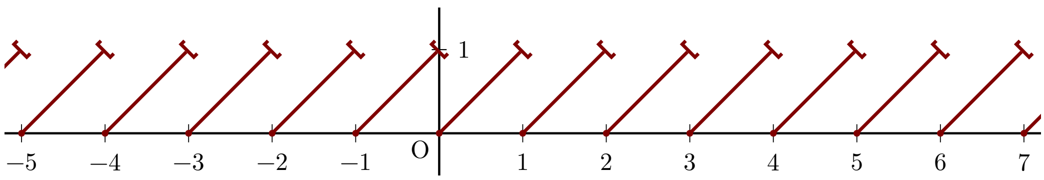


Figure XIV.5 – La fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ n'a pas de limite en $\pm\infty$.

Exercice 2 : Déterminer les limites (si elles existent) en $\pm\infty$ des fonctions suivantes :

$f_1 : x \longmapsto \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{5x^3 - x}$ $\qquad f_2 : x \longmapsto \cos(x) - x$ $\qquad f_3 : x \longmapsto x^2 e^{-x} - x$

Soient α, β, γ des réels strictement positifs.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{\ln^\gamma(x)} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\beta \left|\ln(x)\right|^\gamma = 0.$$

Figure XIV.6 – Croissances comparées.

Proposition 4 (Limite en un point fini) : Soient $a \in \overline{\mathrm{D}} \cap \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ |x-a| \leqslant \alpha \implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$
- $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ |x-a| \leqslant \alpha \implies f(x) \geqslant \mathrm{A}.$
- $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \iff \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ |x-a| \leqslant \alpha \implies f(x) \leqslant \mathrm{A}.$

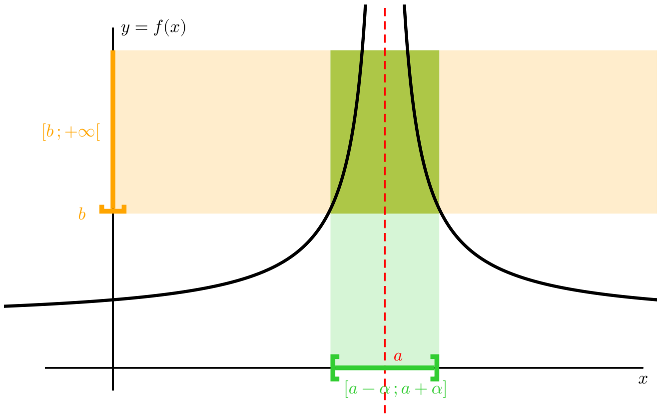


Figure XIV.7 – Limite infinie en un point fini

$f(x)$	$\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$	$\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)$
$\dfrac{1}{x^n}$ $_{n \neq 0}$	$+\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$+\infty$	non défini
$\ln(x)$	$-\infty$	non défini

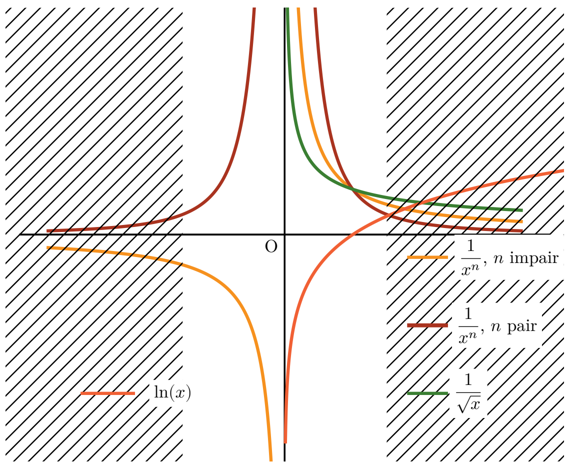


Figure XIV.8 – Limites des fonctions de référence en 0.

$$\left.\begin{array}{c}
\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \\
\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sh}\,(x)}{x} \\
\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{x}
\end{array}\right\} = 1.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Figure XIV.9 – Taux d'accroissement de fonctions dérivables.

Exercice 3 : Déterminer la limite (si elle existe) des fonctions suivantes en 0. On distinguera éventuellement 0^- et 0^+.

$f_1 : x \longmapsto x - \ln(x)$

$f_3 : x \longmapsto \dfrac{e^{5x} - e^{3x}}{x}$

$f_2 : x \longmapsto x\sqrt{1 + (\ln(x))^2}$

$f_4 : x \longmapsto xe^{\frac{1}{x}}$

Corollaire 4.1 (Limite et valeur absolue) : Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{K}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \implies \lim_{x \to a} |f(x)| = |\ell| .$$

Théorème 5 (Unicité de la limite, cas réel) : Soit $a \in \overline{\mathrm{D}}$ et f une fonction réelle.

Si elle existe, la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est unique.

Notation : En cas d'existence de la limite en a, le théorème (5) permet de justifier la notation, maintenant non ambigüe, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ de LA limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a.

ATTENTION

Certaines fonctions peuvent ne pas avoir de limite en un point.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

En 0, $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right) = \pm\infty$. Comme la limite de $\sin(x)$ en l'infini n'existe pas, celle de $f(x)$ en 0 n'existe pas non plus. Nous verrons dans un autre chapitre une manière efficace et rigoureuse de montrer ce point.

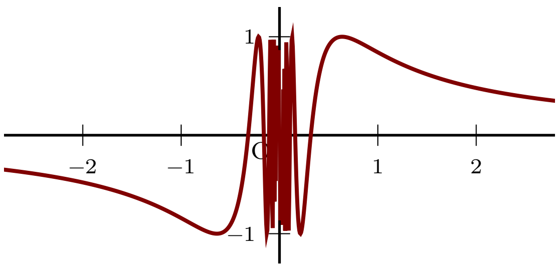


Figure XIV.10 – La fonction $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

I.3 Limites à droite et à gauche

Proposition 6 : Si f est définie en $a \in \mathrm{D}$ non adhérent à D et y admet une limite, alors cette limite est nécessairement égale à $f(a)$.

Une fonction ne peut donc pas avoir de limite infinie en un point où elle est définie.

ATTENTION La proposition (6) ne dit absolument pas que toute fonction définie en a est continue en a mais seulement qu'une condition nécessaire à l'être est que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe.

Définition 3 (Limites à droite et à gauche) : Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

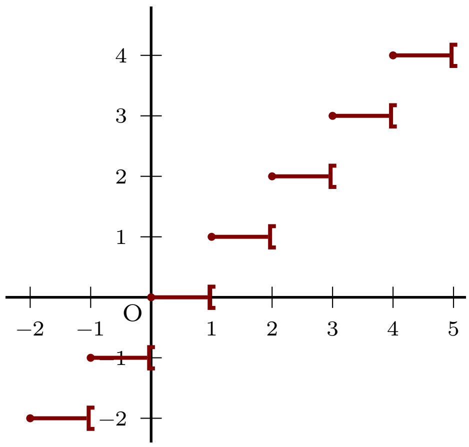
Limite à gauche : Si a est adhérent à $\mathrm{D}\cap]-\infty\,;a[$, on dit que f possède une *limite à gauche* en a si $f_{|\mathrm{D}\cap]-\infty;a[}$ possède une limite en a.

Cette limite est notée $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in]-\infty;a[}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ ou encore $f(a-0)$.

Limite à droite : Si a est adhérent à $\mathrm{D}\cap]a\,;+\infty[$, on dit que f possède une *limite à droite* en a si $f_{|\mathrm{D}\cap]a;+\infty[}$ possède une limite en a.

Cette limite est notée $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in]a;+\infty[}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $f(a+0)$.

Remarque : a n'appartient ni à $\mathrm{D}\cap]-\infty\,;a[$ ni à $\mathrm{D}\cap]a\,;+\infty[$. Il y est seulement adhérent.



$$\forall\, n\in\mathbb{Z},\quad \lim_{\substack{x\to n\\ x<n}} \lfloor x\rfloor = n-1$$

et

$$\lim_{\substack{x\to n\\ x>n}} \lfloor x\rfloor = n.$$

Figure XIV.11 – La fonction partie entière n'a pas de limites en tout point de $\mathbb{Z}$ mais seulement des limites à droite et à gauche.

Exercice 4 : Que dire des limites suivantes ?

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{|x|}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \lfloor x\rfloor$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \lfloor x^2\rfloor$

Ici la définition topologique atteint ses limites et on doit utiliser une définition métrique ou au moins partiellement :

Corollaire 6.1 : Soit $b\in\overline{\mathbb{R}}$.

- Dire que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$ revient à dire que :

$$\forall\, \mathrm{V}_b\in\mathcal{V}(b),\ \exists\,\alpha(\mathrm{V}_b)\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x\in\mathrm{D},\quad \underset{\text{ou } x\in[a-\alpha\,;a[}{a-\alpha\leqslant x<a} \implies f(x)\in\mathrm{V}_b.$$

- Dire que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b$ revient à dire que :

$$\forall\, \mathrm{V}_b\in\mathcal{V}(b),\ \exists\,\alpha(\mathrm{V}_b)\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x\in\mathrm{D},\quad \underset{\text{ou } x\in]a\,;a+\alpha]}{a<x\leqslant a+\alpha} \implies f(x)\in\mathrm{V}_b.$$

Les limites à gauche/à droite ne sont jamais que des limites au sens initial du chapitre mais appliquées à des restrictions. Cela justifie qu'elles auront les mêmes propriétés notamment leur unicité.

Théorème 7 (Limite et limites à gauche et à droite) : Soit $a \in \overline{\mathrm{D}}$.

La fonction f admet une limite en a notée $\lim_{x \to a} f(x)$ si, et seulement si

1. $\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = f(a)$ si f est définie en a.
2. $\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$ si f n'est pas définie en a.

En particulier, dans tous les cas, une condition nécessaire est que les quantités $f(a-0)$ et $f(a+0)$ existent et soient égales.

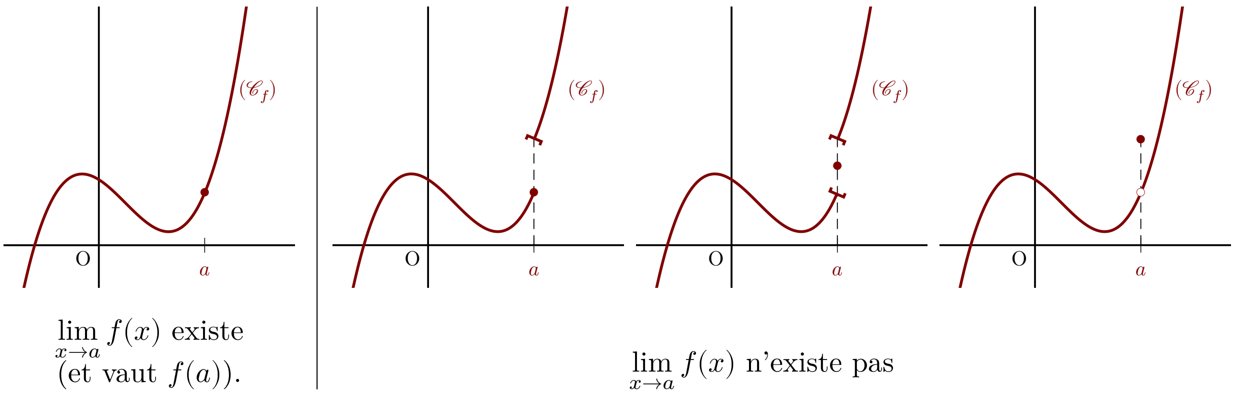


Figure XIV.12 – Caractérisation de la limite en fonction des ses limites à gauche et à droite.

Exemple 2 :

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ a pour limite $+\infty$ en 0 [1].
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 mais $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.
- Soit δ_0, la fonction qui, à tout réel associe 1 si $x = 0$ et 0 sinon.

  On a $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \delta_0 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \delta_0 = 0$ mais δ_0 n'a pas de limite en 0 car $\delta_0(0) = 1$.

Exemples 3 : Étudions les limites de $\dfrac{1}{2-x}$ et $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ dans un voisinage de 2 :

Comme $\lim_{x \to 2} 2 - x = 0$, on est ramené à l'étude de $\lim_{u \to 0} \dfrac{1}{u}$ qui dépend du signe de u :

1. On commence par dresser un tableau de signes de $x - 2$: [2]

[1]. Car la même limite infinie à droite et à gauche.

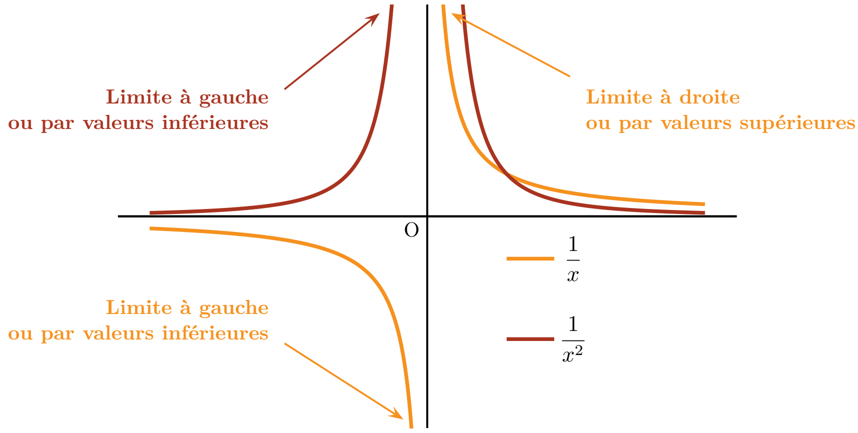


Figure XIV.13 – Limites à droite et à gauche d'une fonction

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	

Avec les conventions de notations :

$$\lim_{x\to 2^-} 2-x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2^+} 2-x = 0^-$$

[2] On conclut :

$$\left.\begin{array}{rcl} \displaystyle\lim_{x\to 2^-} 2-x & = & 0^+ \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} & = & +\infty \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{les composées de limites}]{\text{D'après les théorèmes sur}} \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2-x} = +\infty,$$

et

$$\left.\begin{array}{rcl} \displaystyle\lim_{x\to 2^+} 2-x & = & 0^- \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} & = & -\infty \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{les composées de limites}]{\text{D'après les théorèmes sur}} \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{2-x} = -\infty.$$

Ici, malgré la difficulté apparente, $\lim_{x\to 2^-} (2-x)^2 = \lim_{x\to 2^+} (2-x)^2 = \lim_{x\to 2} (2-x)^2 = 0^+$.

D'où :

$$\left.\begin{array}{rcl} \displaystyle\lim_{x\to 2} (2-x)^2 & = & 0^+ \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} & = & +\infty \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{les composées de limites}]{\text{D'après les théorèmes sur}} \lim_{x\to 2} \frac{1}{(2-x)^2} = +\infty.$$

En conclusion, on remarquera bien que si $\frac{1}{2-x}$ n'a pas de limite en 2, $\frac{1}{(2-x)^2}$ en a bien une qui est $+\infty$.

Exemples 4 :

- La fonction partie entière à des limites à droite et à gauche distinctes pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et n'admet donc pas de limite en ces points.
- La fonction $f : x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$ n'est pas définie en 0 mais y admet une limite :

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} f(x) = 1.$$

- La fonction sinus cardinal $g : x \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est définie en 0 et y admet une limite :

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1.$$

[2]. Au moins dans sa tête !

- La fonction $x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est définie en 0, admet une limite à droite et une limite à gauche en 0 mais n'admet pas de limite en 0.

Exercice 5 : Déterminer les limites suivantes si elles existent. Dans le cas contraire, on déterminera les limites par valeurs supérieures et inférieures.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

I.4 Asymptote

Le comportement à l'infini, dit *comportement asymptotique*, peut aussi aider à cerner l'allure de la courbe.

On définit pour cela la notion de droite asymptote[3] : il s'agit d'une droite qui approche d'aussi près que l'on veut une portion de la courbe lorsque l'on s'éloigne vers l'infini dans l'une des deux directions. Plus précisément :

Définition 4 (Asymptote) : On dit qu'une fonction f admet :

1. une *asymptote verticale* au voisinage de a d'équation $x = a$ lorsque $\displaystyle\lim_{x\to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.
2. une *asymptote horizontale* au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = b$ lorsque $\displaystyle\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = b$.
3. plus généralement, une droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = ax + b$, dite *asymptote oblique*, au voisinage de $\pm\infty$ lorsque $\displaystyle\lim_{x\to \pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$.

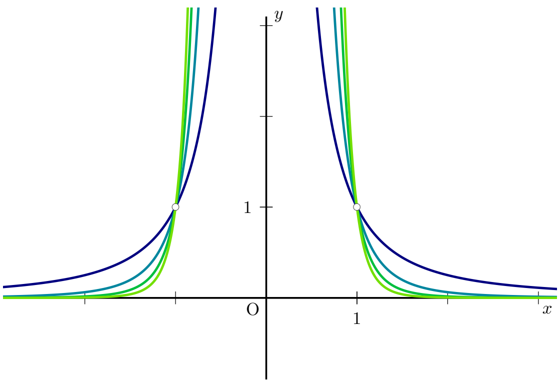
On remarquera que l'existence de la limite n'est pas nécessaire pour que la courbe admette une asymptote verticale comme c'est le cas pour $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour n impair.

Méthode 1 (Déterminer une droite asymptote (non verticale)) :
Tant qu'on ne dispose pas de méthode plus sophistiquée, le principe est le suivant (pour une asymptote en $+\infty$) :

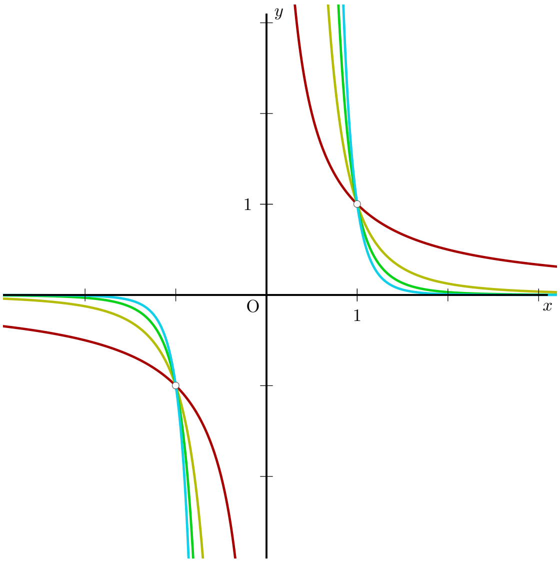
1. Étudier la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$:
   - Si cette limite n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.
   - Si cette limite est finie, de valeur a, on dit que la droite $y = ax$ est direction asymptotique de la courbe en $+\infty$.
2. On étudie la limite de $f(x) - ax$:
   - Si elle n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.

[3]. De l'étymologie grecque construit à l'aide du préfixe privatif « a » et de « symptôsis » (rencontre) : la droite qui ne se rencontre pas.

Remarque : L'utilisation du terme asymptote ne se limite pas aux droites. On parlera bientôt de courbes asymptotes.



$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour $n = 2,\ 4,\ 6,\ 8.$



$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour $n = 1,\ 3,\ 5,\ 7.$

Figure XIV.14 – Les courbes des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ admettent l'axe des ordonnées comme asymptote verticale et l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

- Si cette limite est finie, de valeur b, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

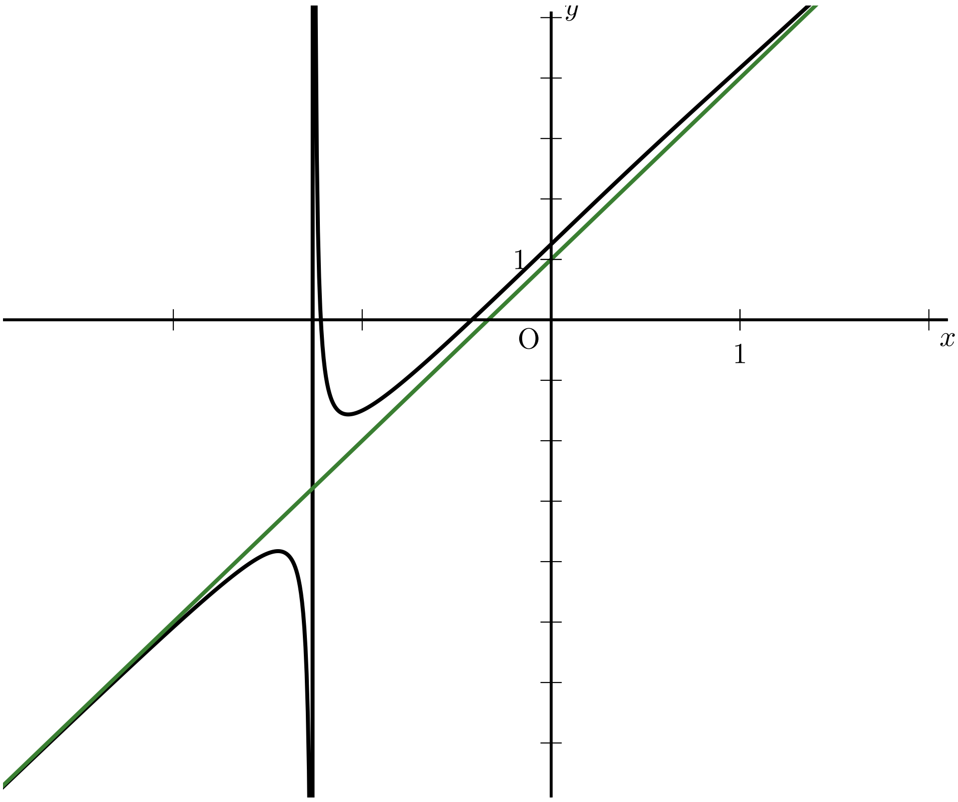


Figure XIV.15 – La droite d'équation $y = 3x+1$ est asymptote à la courbe de $f : x \longmapsto 3x+1+\dfrac{1}{2(x^3+2)}$.

Nous verrons plus tard comment on peut obtenir a sans former le quotient, à l'aide d'équivalents, ou même comment obtenir simultanément a et b à l'aide d'un « développement limité ».

Exercice 6 : Étudier les asymptotes éventuelles des courbes de :

$f_1 : x \longmapsto \dfrac{4x^2-2}{2x+1}$ $\qquad$ $f_2 : x \longmapsto \sqrt{x^2+3x+1}$

Exercice 7 : Montrer que la courbe de $x \mapsto \cos(x) - x$ n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.

Remarque : Dire que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ est équivalent de dire que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - b = 0$. Cette dernière expression représente, au signe près, la distance entre la courbe et son asymptote : à l'infini, la courbe représentative se rapproche infiniment de son asymptote.

Méthode 2 (Position relative d'une courbe et de son asymptote) :
Soit f une fonction et $y = ax+b$ l'équation de son asymptote horizontale ou oblique $(\mathscr{D})$.

Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de $(\mathscr{D})$ en $+\infty$, il suffit d'étudier le signe de $f(x) - (ax+b)$ sur un voisinage $]\alpha\,;+\infty[$ de celui-ci.

x	α	δ	$+\infty$
Signe de $f(x)-(ax+b)$	$+$	0	$-$
Position de $\mathscr{C}_f$ et $(\mathscr{D})$	$\mathscr{C}_f$ au dessus de $(\mathscr{D})$		$\mathscr{C}_f$ au dessous de $(\mathscr{D})$

II STABILITÉ ALGÉBRIQUE

ATTENTION Dans les paragraphes qui suivent, on considèrera un réel $a \in \overline{\mathbb{R}}$, deux fonctions f et g à valeurs réelles définies dans un voisinage de a et on considèrera les limites en ce point.

II.1 Limite d'une somme

Proposition 8 (Somme) : Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme Indéter.

ATTENTION

Cas de la forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$:

— On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \ell) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, mais $\lim\limits_{x \to +\infty} ((x + \ell) - x) = \ell$.

— On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$, mais $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 2x) = \lim\limits_{x \to +\infty} = -\infty$.

— On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \cos(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x = +\infty$, mais $(x + \cos(x) - x) = \cos(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Exemple 5 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 2 + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ a pour limite 2 en $+\infty$.

En effet $\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{\sqrt{x}} & = & 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 2 & = & 2 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{les sommes de limites}]{\text{D'après les théorèmes sur}} \lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \dfrac{4}{\sqrt{x}} = 2.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2 + 0 = 2$ d'après les théorèmes sur les limites de sommes.

II.2 Limite d'un produit

Proposition 9 (Produit) : Soient ℓ, $\ell' \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si g a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $f \times g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞ [4]	Forme Indéter.	∞ [4]

ATTENTION

Cas de la forme indéterminée $0 \times (\infty)$:

— On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\pi}{x - 2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} x - 2 = 0$, mais $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\pi}{x - 2} \times (x - 2) = \pi$.

— On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, mais $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} \times x^2 = -\infty$.

— On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, mais $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} \times x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

[4]. Appliquer la règle des signes d'un produit.

II.3 Limite d'un quotient

Proposition 10 (Inverse) : Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	$\ell \neq 0$	0	∞
alors $\dfrac{1}{f}$ a pour limite	$\dfrac{1}{\ell}$	∞ [5]	0

Proposition 11 (Quotient) : Soient ℓ, $\ell' \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞
Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0	0	∞	ℓ' [6]
alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞ [7]	Forme Indéter.	0	∞ [7]

Exercice 8 : Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{1 - x^4}$.

2. $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2 - \sqrt{4 - \frac{1}{x}}}$.

II.4 Limite d'une composée

Proposition 12 (Limite d'une fonction Composée) : Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathrm{E}$ et $g : \mathrm{E} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à E et $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x\to b} g(x) = c, \text{ alors } \lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = c.$$

Cette dernière propriété nous permet alors de justifier la recherche d'une limite par changement de variable *i.e.* on ne s'intéresse plus à la limite de $(gof)(x)$ quand $x \to a$, mais de $g(\mathrm{X})$ quand $\mathrm{X} \to b$.

Exemple 6 : On cherche la limite de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln^2(x) + 2\ln(x)}{\ln^2(x) + 1}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(x) + 2\ln(x)}{\ln^2(x) + 1} \underset{\boxed{\substack{\mathrm{X}=\ln(x) \\ \lim_{x\to 0} \mathrm{X} = -\infty}}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{\mathrm{X}\to-\infty} \frac{\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X}}{\mathrm{X}^2 + 1} = 1.$$

Exercice 9 : Déterminer les limites suivantes si elles existent. Dans le cas contraire, on déterminera les limites par valeurs supérieures et inférieures.

Dans tous les cas, préciser l'équation d'une éventuelle asymptote à la courbe représentative de f.

[5]. Appliquer la règle des signes d'un quotient.
[6]. y compris $\ell' = 0$.
[7]. Appliquer la règle des signes d'un quotient.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+6x-7}$ 2. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1+x}{1-x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. 3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{2-x}{x}}$

En posant $g \equiv |...|$ dans la proposition (12) , on retrouve le corollaire (4.1) :

Corollaire 12.1 (Limite et valeur absolue) : Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{K}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \implies \lim_{x\to a} |f(x)| = |\ell|\,.$$

Corollaire 12.2 (Limite d'une suite explicite) : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[\mathrm{A}\,;+\infty[$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = f(n)$ pour tout entier naturel $n \geqslant \mathrm{A}$.

Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\text{Si } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Exemple 7 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{\dfrac{3n+2}{n+1}}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+2}{n+1} = 3$ et $\displaystyle\lim_{x\to 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$, on a aisément $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.

Corollaire 12.3 (Limite d'une suite quelconque) : Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont tous les termes appartiennent à I.

Pour réels a et b de $\overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\text{Si } \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = a \\ \text{et} \\ \displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = b \end{array}\right. \quad \text{alors} \quad \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = b.$$

Cet énoncé est la base d'un théorème fort des suites récurrentes définies par $u_{n+1} = f(u_n)$. En effet, si $u_n \longrightarrow \ell$, alors $u_{n+1} \longrightarrow \ell$.

Le corollaire précédent permet donc d'écrire :

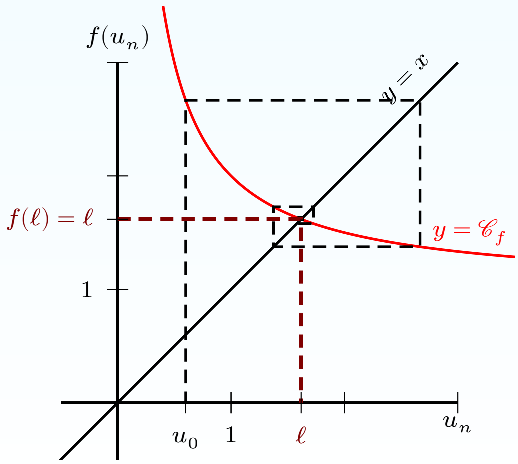
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n).$$

Exemple 8 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite définie par récurrence par une fonction dont est tracée la courbe représentative ci-contre.

Les termes de la suite semblent converger vers le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$, un « point fixe » de f.

On verra dans quel contexte ceci est vrai.



En pratique, le corollaire (12.3) permet souvent de démontrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point a :

Méthode 3 (Montrer qu'une fonction n'a pas de limite) :
Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Pour montrer que f n'a pas de limite en a, il suffit de trouver 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$.

Exemple 9 ($\cos$ n'a pas de limite en $\pm\infty$) : Considérons les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n = 2\pi n$ et $v_n = \dfrac{\pi}{2} + u_n$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(u_n) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(v_n)$.

La fonction cos ne peut donc avoir de limites en $+\infty$.

Exercice 10 : Soit f une fonction périodique.

Démontrer que si f admet une limite ℓ en $+\infty$, f est constante.

III Propriétés de la limite

III.1 La limite contrôle la fonction

Proposition 13 : Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, D un voisinage de a et $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$.

Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

Théorème 14 : Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

1. Si $m < \ell$ alors, il existe un voisinage de a sur lequel $m < f(x)$.

2 Si $\ell < \mathrm{M}$ alors, il existe un voisinage de a sur lequel $f(x) < \mathrm{M}$.

Un cas particulier TRÈS important est le cas où $\ell > 0$ ou $\ell \neq 0$, le théorème (14) nous assure de l'existence d'un voisinage de a sur lequel $f(x) > 0$ ou $f(x) \neq 0$ *i.e.* il existe un voisinage de a sur lequel, f prend des valeurs du même signe que sa limite.

III.2 Limite et relation d'ordre

Proposition 15 (Limite et ordre) : Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et deux fonctions f et g définies sur tout voisinage $\mathcal{V}_a$ de a.

$$\text{Si,} \quad \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a,\ g(x) \leqslant f(x), \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell' \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \end{cases} \quad \text{alors} \quad \ell' \leqslant \ell.$$

On parle souvent de conservation des inégalités **larges** par passage à la limite.

Remarques : La proposition (15) n'est pas vraie avec des inégalités strictes : Si $g(x) < f(x)$ alors on ne peut pas en déduire $\ell < \ell'$ mais seulement $\ell \leqslant \ell'$:

Prenez, par exemple $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ qui tendent toutes deux vers 0 alors qu'il est clair que $-\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$.

Théorème 16 : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, trois fonctions f, g et h définies sur un voisinage ouvert $\mathcal{V}_a$ de a et ℓ un réel.

Théorème d'encadrement :

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a, \quad g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$

Théorème de majoration :

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a, \quad g(x) \leqslant f(x) \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

Théorème de minoration :

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a, \quad f(x) \leqslant g(x) \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Exercice 11 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$.
2. $\lim_{x\to+\infty} x+\cos(x)$.
3. $\lim_{x\to 0} x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$.
4. $\lim_{x\to\pm\infty} x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$.

III.3 La monotonie contrôle la limite

Théorème 17 (Théorème de la limite monotone) : Soient $a,\ b \in \overline{\mathbb{R}}$ $(a < b)$ et $f :]a\,;b[\longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b, et $\lim_{x\to b} f(x) = \sup_{]a;b[}(f) < +\infty$.
- Si f n'est pas majorée, alors $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$.

Remarque : Lorsque f est décroissante, on a les résultats correspondants :
— Si f est décroissante et minorée, alors $\lim_{x\to b} f(x) = \inf_{]a;b[}(f) > -\infty$.
— Si f est décroissante et non minorée, alors $\lim_{x\to b} f(x) = -\infty$.

III.4 Limites à gauche et à droite

Proposition 18 : Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ $(a < b)$ et $f :]a\,;b[\longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante et $x_0 \in]a\,;b[$.

Alors, f admet une limite à gauche et une limite à droite finies en x_0 et

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

On retiendra le théorème et la proposition précédents sous la forme ci-dessous :

Corollaire 18.1 : Toute fonction monotone possède une limite à gauche et une limite à droite en tout point en lequel cela a un sens.

Afin de bien le comprendre, précisons cet énoncé dans un cas particulier d'une fonction $f : [a\,;b[\longmapsto \mathbb{R}$ croissante avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a\,;+\infty]$.

À retenir 1 : Le théorème de la limite monotone affirme que :

1. la limite $\lim_{x\to a^+} f(x)$ EXISTE et elle est forcément FINIE car $f(a) \leqslant \lim_{x\to a^+} f(x)$ par passage à la limite,
2. pour tout $c \in]a\,;b[$, les limites $\lim_{x\to c^-} f(x)$ et $\lim_{x\to c^+} f(x)$ EXISTENT et elles sont forcément FINIES car $\lim_{x\to c^-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim_{x\to c^+} f(x)$,
3. la limite $\lim_{x\to b} f(x)$ EXISTE et elle est soit finie, soit égale à $+\infty$.

IV Extension aux fonctions complexes

Définition/Théorème 5 (Limite d'une fonction complexe en un point) : Soit $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$.

On dit que f admet ℓ pour limite en a si :

$$\forall\, \mathrm{V}_\ell \in \mathscr{V}_{\mathbb{C}}(\ell), \quad \exists\, \mathrm{V}_a \in \mathscr{V}_{\mathbb{R}}(a), \quad \forall\, x \in \mathrm{D} \cap \mathrm{V}_a, \quad f(x) \in \mathrm{V}_\ell,$$

i.e.

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0, \quad \forall\, x \in \mathrm{D}, \quad |x-a| < \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

ou encore

$$\lim_{x \to a} |f(x) - \ell| = 0.$$

Le théorème d'unicité de la limite est encore valable, ce qui autorise la notation $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Théorème 19 (Parties réelle et imaginaire) : Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to a} \mathrm{Re}\,(f)(x) = \mathrm{Re}\,(\ell) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \mathrm{Im}\,(f)(x) = \mathrm{Im}\,(\ell).$$

Définition 6 (Fonction bornée) : Soit $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction.

On dit que f est bornée s'il existe un réel $\mathrm{K} \geqslant 0$ tel que $\forall\, x \in \mathrm{D}, \quad |f(x)| \leqslant \mathrm{K}$.

Globalement, on dit que f est bornée sur D si, et seulement si $|f|$ l'est.

En particulier,

Corollaire 19.1 : Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Si $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ admet une limite finie en $a \in \overline{\mathrm{D}}$ alors f est bornée sur un voisinage de a.

ATTENTION

Pas de $\pm\infty$ dans $\mathbb{C}$ ni de théorèmes basés sur la relation d'ordre.

Les notions de limite à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, sont maintenues pour les fonctions complexes, de même que les résultats sur les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse, à ceci près que les symboles $\pm\infty$ sont bannis.

Les grands théorèmes d'existence de limite - théorèmes d'encadrement/minoration/-majoration et théorème de la limite monotone - n'ont pas de sens dans le cas complexe car ils utilisent de façon essentielle la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$.