Mathématiques 3

Vendredi 12 juillet 2024

Durée : **3** heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le sujet est composé de **3** exercices indépendants.

Exercice 1 : Soit x un nombre réel.

1 (a) Si $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + \dfrac{1}{2}$ montrer que $\left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$ et $2\lfloor x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

(b) Si $\lfloor x \rfloor + \dfrac{1}{2} \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ trouver et montrer deux égalités similaires.

(c) En déduire que $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

2 Plus généralement, pour tout $n \geqslant 2$, on pose :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor\,.$$

(a) Montrer que f est $\dfrac{1}{n}$-périodique sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$ et tout x réel :

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor\,.$$

Exercice 2 : On pose, lorsque cela a un sens, $f(z) = \dfrac{iz}{iz+1}$ où z désigne un nombre complexe.

1 (a) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

(b) Montrer que f est une bijection de D sur un ensemble E que l'on précisera. Exprimer la bijection réciproque f^{-1}.

2 Soient A et B les points d'affixes respectifs $z_{\mathrm{A}} = 0$ et $z_{\mathrm{B}} = i$. Si $z \in \mathrm{D}$, on note M le point d'affixe z.

(a) Compléter le graphique donné en annexe avec les points A, B et l'ensemble $\mathbb{U}$ dont on pourra rappeler la définition.

(b) Montrer que $\forall\, z \in \mathrm{D},\ f(z) = \dfrac{z}{z-i}$ et donner une interprétation géométrique de $|f(z)|$ et $\arg(f(z))$ en fonction des points A, B et M.

(c) Déterminer et représenter en annexe l'ensemble Ω_1 des points M tels que $f(z) \in \mathbb{U}$.

(d) Déterminer et représenter en annexe l'ensemble Ω_2 des points M tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$.

(e) Déterminer et représenter en annexe l'ensemble Ω_3 des points M tels que $f(z) \in \mathbb{R}_+$.

3 Déterminer une primitive de l'application g définie par :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{C} \\ t & & f(t) = \dfrac{t}{t-i}. \end{array}$$

Problème 3 : On s'intéresse ici à la résolution sur $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$, de l'équation différentielle :

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = (1+x^2)\ln(x). \tag{E}$$

On notera (E_0) l'équation homogène associée : $\quad y'' - \dfrac{2x}{1+x^2}y' + \dfrac{2}{1+x^2}y = 0. \qquad (\mathrm{E}_0)$

I. Calculs préliminaires :

1 Montrer qu'il existe des réels $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad \frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}.$$

2 En déduire une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{2}{x(1+x^2)}$ sur I.

3 Vérifier que $\mathrm{G} : x \longmapsto \left(x - \dfrac{1}{3}x^3\right)\ln(x) - x + \dfrac{1}{9}x^3$ est une primitive sur I de la fonction $g : x \longmapsto g(x) = (1-x^2)\ln x$.

II. Résolution de (E_0) :

4 Montrer que $y_1 : x \longmapsto x$ est solution de (E_0).

5 Soit $y : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I. On définit la fonction z par :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ z(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Montrer que y est solution de (E_0) si, et seulement si z' est solution de l'équation différentielle :

$$xu' + \frac{2}{1+x^2}u = 0. \tag{E'}$$

6 Résoudre l'équation différentielle (E').

7 En déduire l'ensemble des solutions de (E_0).

III. Résolution de l'équation (E) :

8 On cherche une solution particulière de (E) sous la forme

$$y_p : x \longmapsto y_p(x) = \lambda(x)x + \mu(x)(x^2-1),$$

où λ et μ sont deux fonctions deux fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad x\lambda'(x) + (x^2-1)\mu'(x) = 0. \tag{Lag_1}$$

(a) Exprimer y_p' et y_p'' en fonction de λ et μ.

(b) Montrer que y_p est solution de (E) si, et seulement si

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (x^2+1)\ln x. \tag{Lag_2}$$

(c) Pour $x \in \mathrm{I}$, montrer que $\lambda'(x) = (1-x^2)\ln(x)$ et $\mu'(x) = x\ln(x)$.

(d) En déduire une expression des fonctions λ et μ puis d'une solution particulière de (E).

9 Donner l'ensemble des solutions de (E).

Nom : .... **Prénom :** ....

ANNEXE

Rappels : Le graphique devra comporter les points A et B, l'ensemble $\mathbb{U}$ ainsi que les ensembles Ω_1, Ω_2 et Ω_3.