Mathématiques 3

Exercice I (9 points) :

(5) 1

2 (a) Soit $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}$.

En ajoutant $\frac{1}{2}$ aux membres des inéquations, on a $\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \leqslant x + \frac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + 1$ ou encore

$$\underbrace{\lfloor x \rfloor}_{\in \mathbb{Z}} \leqslant x + \frac{1}{2} < \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{\in \mathbb{Z}} + 1.$$

Comme $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ est l'unique entier p vérifiant $p \leqslant x + \frac{1}{2} < p + 1$, on en déduit :

$$\boxed{\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor .}$$

De même, on multipliant par 2, les membres des inéquations, on a :

$$\underbrace{2\lfloor x \rfloor}_{\in \mathbb{Z}} \leqslant 2x < \underbrace{2\lfloor x \rfloor}_{\in \mathbb{Z}} + 1.$$

Pour les mêmes raisons, on en déduit

$$\boxed{\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor .}$$

2 (b) Soit $\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Le raisonnement est identique :

— Tout d'abord, en ajoutant $\frac{1}{2}$, on a

$$\lfloor x \rfloor + 1 \leqslant x + \frac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + \frac{3}{2} \implies \underbrace{\lfloor x \rfloor + 1}_{\in \mathbb{Z}} \leqslant x + \frac{1}{2} < \underbrace{\lfloor x \rfloor + 1}_{\in \mathbb{Z}} + 1.$$

Par unicité de la partie entière, $\boxed{\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + 1.}$

— En multipliant par 2, $\underbrace{2\lfloor x \rfloor + 1}_{\in \mathbb{Z}} \leqslant 2x < \underbrace{2\lfloor x \rfloor + 1}_{\in \mathbb{Z}} + 1$ ce qui prouve que

$$\boxed{\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1.}$$

1 (c) Il suffit d'appliquer (a) et (b) dans les deux cas pour obtenir :

$$\boxed{\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 2\lfloor x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor .}$$

(4) 2

2 (a)

$$\begin{aligned} f\left(x+\frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k+1}{n}\right\rfloor - \lfloor nx+1\rfloor \\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\left\lfloor x+\frac{\ell}{n}\right\rfloor - \lfloor nx+1\rfloor \\ &= \sum_{\ell=1}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{\ell}{n}\right\rfloor + \lfloor x+1\rfloor - \lfloor nx+1\rfloor \\ &= \sum_{\ell=1}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{\ell}{n}\right\rfloor + \lfloor x\rfloor + 1 - \lfloor nx\rfloor - 1 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

La fonction $\boxed{f \text{ est bien } \frac{1}{n}\text{-périodique sur } \mathbb{R}.}$

2 (b) De plus, si x est dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{n}\right[$, alors on peut vérifier que f est nulle (toutes les parties entières intervenant dans sa définition le sont).

Par périodicité, $\boxed{f \text{ est identiquement nulle sur } \mathbb{R}.}$

Commentaires : *On aurait pu procéder de la même façon qu'à la question 1, en encadrant x entre $\lfloor x\rfloor + \frac{p}{n}$ et $\lfloor x\rfloor + \frac{p+1}{n}$. La démonstration proposée est plus directe.*

Exercice 2 (13 points) :

(3) 1

1 (a) Soit $z \in \mathbb{C}$: $f(z)$ existe si et seulement si $iz+1 \neq 0$, c'est-à-dire $z \neq -\frac{1}{i} = i$.

Le domaine de définition de f est donc $\boxed{\mathrm{D} = \mathbb{C}\setminus\{i\}.}$

2 (b) Étant donné $w \in \mathbb{C}$, essayons de résoudre l'équation $f(z) = w$, où z est l'inconnue recherchée dans D :

$$f(z) = w \iff \frac{iz}{iz+1} = w \iff iz = iwz + w \iff iz(1-w) = w \iff z(1-w) = -iw.$$

Distinguons deux cas :

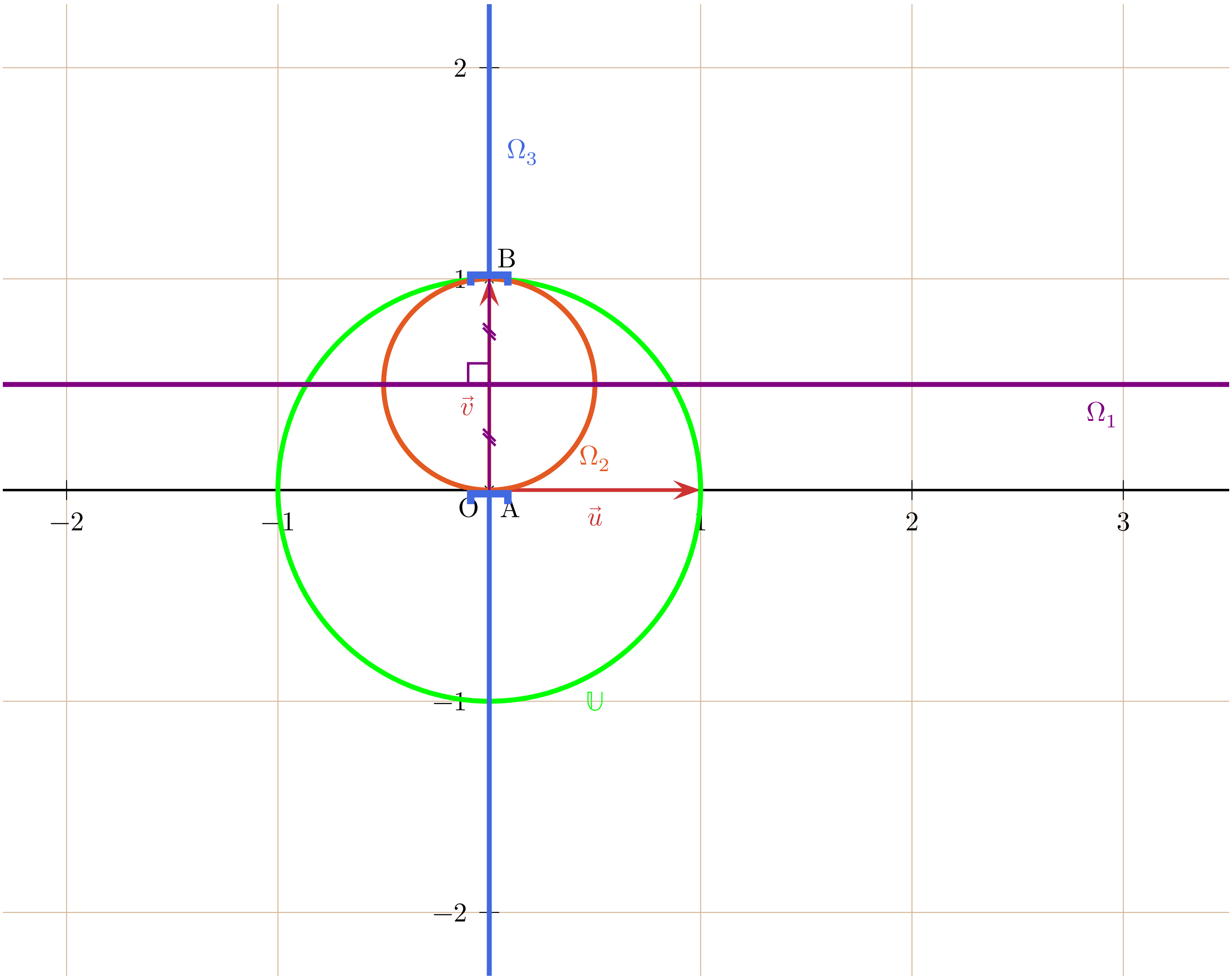
- Si $1-w = 0$ (c'est-à-dire $w = 1$) : on obtient $0 = -iw$ c'est-à-dire $w = 0$ ce qui est absurde. L'équation $f(z) = 1$ n'admet donc aucune solution.
- Si $1-w \neq 0$ (c'est-à-dire $w \neq 1$) : on obtient :

$$f(z) = w \iff z = -\frac{iw}{1-w} = \frac{iw}{w-1}.$$

Ceci montre que l'équation $f(z) = w$ admet une unique solution z donnée par $z = \frac{iw}{w-1}$, et ce pour n'importe quel w appartenant à l'ensemble $\mathrm{E} = \mathbb{C}\setminus\{1\}$. On vient donc de prouver que $\forall\, w \in \mathrm{E},\ \exists !\, z \in \mathrm{D},\ f(z) = w$; en d'autres termes $\boxed{\text{l'application } f \text{ est une bijection de } \mathrm{D} = \mathbb{C}\setminus\{i\} \text{ sur } \mathrm{E} = \mathbb{C}\setminus\{1\}.}$

D'après la résolution de l'équation, on a obtenu : $\boxed{\forall\, w \in \mathrm{E},\ f^{-1}(w) = \frac{iw}{w-1}.}$

(8) 2



1 (a) On se rappellera que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ soit le cercle unité.

2 (b) En divisant tout par $i \neq 0$, on obtient : $\forall\, z \in \mathrm{D},\ f(z) = \dfrac{iz}{iz+1} = \dfrac{z}{z+\frac{1}{i}} = \dfrac{z}{z-i}$.

Donc, $\boxed{\forall\, z \in \mathrm{D},\ f(z) = \dfrac{z}{z-i}.}$

De plus, $f(z) = \dfrac{z}{z-i} = \dfrac{z-z_{\mathrm{A}}}{z-z_{\mathrm{B}}}$. On rappelle que si M est distinct des points A et B, alors :

$$\boxed{\left|\frac{z-z_{\mathrm{A}}}{z-z_{\mathrm{B}}}\right| = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}} \text{ et } \arg\left(\frac{z-z_{\mathrm{A}}}{z-z_{\mathrm{B}}}\right) \equiv (\overrightarrow{\mathrm{MB}}; \overrightarrow{\mathrm{MA}})\ [2\pi].}$$

1,5 (c) On a $f(z) \in \mathbb{U} \iff |f(z)| = 1 \iff \left|\dfrac{z-z_{\mathrm{A}}}{z-z_{\mathrm{B}}}\right| = 1 \iff \dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = 1 \iff \mathrm{MA} = \mathrm{MB}$

$\iff$ $\boxed{\text{M appartient à la médiatrice du segment [AB].}}$

1,5 (d) Notons déjà que par hypothèse, $\mathrm{M} \neq \mathrm{B}$ car $z \neq i$.

Distinguons deux cas :

— Si $\mathrm{M} = \mathrm{A}$ (c'est-à-dire $z = 0$), alors on a $f(z) = 0 \in i\mathbb{R}$.

— Si $\mathrm{M} \neq \mathrm{A}$ (c'est-à-dire $z \neq 0$), on a $f(z) \neq 0$ donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(z) \in i\mathbb{R} &\iff \arg\left(f(z)\right) \equiv \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ &\iff (\overrightarrow{\mathrm{MB}};\overrightarrow{\mathrm{MA}}) \equiv \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ &\iff \text{M appartient au cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.} \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{f(z) \in i\mathbb{R} \iff \text{M appartient au cercle de diamètre [AB] privé du point B.}}$

2 (e) Comme précédemment, on a $\mathrm{M} \neq \mathrm{B}$ et distinguons alors deux cas :

— Si $\mathrm{M} = \mathrm{A}$ (c'est-à-dire $z = 0$), alors on a $f(z) = 0 \in \mathbb{R}_+$.
— Si $\mathrm{M} \neq \mathrm{A}$ (c'est-à-dire $z \neq 0$), alors $f(z) \neq 0$ donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(z) \in \mathbb{R}_+ &\iff \arg\left(f(z)\right) \equiv 0\ [2\pi] \\ &\iff (\overrightarrow{\mathrm{MB}};\overrightarrow{\mathrm{MA}}) \equiv 0\ [2\pi] \\ &\iff \text{les vecteurs } \overrightarrow{\mathrm{MB}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{MA}} \text{ sont colinéaires de même sens} \\ &\iff \text{M appartient à la droite (AB) privée du segment [AB].} \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{f(z) \in \mathbb{R}_+ \iff \text{M appartient à la droite (AB) privée de l'intervalle]AB].}}$

2 **3** Soit $t \in \mathbb{R}$, il est clair mais à préciser que g est correctement définie.

Réécrivons $g(t)$ sous forme algébrique :

$$g(t) = \frac{t}{t-i} = \frac{t(t+i)}{t^2+(-1)^2} = \frac{t^2}{t^2+1} + i\frac{t}{t^2+1}.$$

Ici aussi, comme $t \in \mathbb{R}$, il est clair mais à préciser que g est continue donc admet bien une primitive.

En utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ \int^x g(t)\,\mathrm{d}t &= \int^x \frac{t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + i\int^x \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int^x \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \frac{i}{2}\int^x \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int^x \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t + \frac{i}{2}\ln(x^2+1) + \text{cste} \\ &= \boxed{x - \arctan(x) + \tfrac{i}{2}\ln(x^2+1) + \text{cste.}} \end{aligned}$$

Problème 3 (20 points) :

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}\,y' + \frac{2}{1+x^2}\,y = (1+x^2)\ln(x). \qquad \text{(E)}$$

[5] **I. Calculs préliminaires :**

2 **1** D'après la méthode standard de décomposition en éléments simples, on multiplie l'expression par x avant d'évaluer en 0. On trouve alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x} + \frac{cx+d}{1+x^2}.$$

La méthode est identique pour l'élément de deuxième espèce : on multiplie par $1+x^2$ avant d'évaluer en i et d'égaliser parties réelle et imaginaire :

$$\frac{2}{\mathrm{i}} = \mathrm{i}\,c + d \iff -2\,\mathrm{i} = \mathrm{i}\,c + d \iff c = -2 \quad \text{et} \quad d = 0.$$

On trouve finalement :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{1+x^2}.}$$

2 [2] Sur I, le dénominateur ne s'annule pas donc $f : x \longmapsto \dfrac{2}{x(1+x^2)}$ y est continue. Une primitive sur I est donc

$$\boxed{\mathrm{F} : x \longmapsto 2\ln(x) - \ln(1+x^2) = \ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right).}$$

Commentaires : *Point de points sans préciser la continuité !*

1 [3] Sur I, $x > 0$ donc G est une somme de fonctions dérivables. Elle l'est également. Il suffit de dériver pour conclure.

Commentaires : *Sur une question aussi facile, ce n'est pas sur la dérivée que sont les points mais sur la dérivabilité.*

[6] II. Résolution de (E_0)

1 [4] La fonction y_1 est deux fois dérivable sur I et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad y_1''(x) - \frac{2x}{1+x^2}\, y_1'(x) + \frac{2}{1+x^2}\, y_1(x) = 0 - \frac{2x}{1+x^2} \times 1 + \frac{2x}{1+x^2} = 0.$$

Donc, $\boxed{y_1 \text{ est solution de } (\mathrm{E}_0).}$

Commentaires : *Dérivabilité avant la dérivée !*

2 [5] Comme $x \neq 0$ sur I, z, quotient de fonctions deux fois dérivables et de dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$ y est également deux fois dérivable et on a :

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathrm{I}, \quad y(x) &= xz(x) \\ y'(x) &= z(x) + xz'(x) \\ y''(x) &= 2z'(x) + xz''(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } y \text{ est solution de } (\mathrm{E}_0) &\iff y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = 0 \\ &\iff 2z'(x) + xz''(x) - \frac{2x}{1+x^2}\big(z(x) + xz'(x)\big) + \frac{2}{1+x^2}xz(x) = 0 \\ &\iff xz''(x) + 2\,\frac{1 + \cancel{x^2} - \cancel{x^2}}{1+x^2}\,z'(x) = 0 \\ &\iff x(z')'(x) + \frac{2}{1+x^2}z'(x) = 0 \\ &\iff z' \text{ est solution de } xu'(x) + \frac{2}{1+x^2}\,u = 0. \qquad (\mathrm{E'}) \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{y \text{ est solution de } (\mathrm{E}_0) \text{ si, et seulement si } z' \text{ est solution de } (\mathrm{E'}).}$

2 [6] Comme $x \neq 0$, la solution générale de (E') est $x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, où A est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{2}{x(1+x^2)}$, fonction continue sur I.

D'après (1), la solution générale de (E') est donc :

$$x \longmapsto \lambda \,\mathrm{e}^{-\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)} = \lambda\,\frac{1+x^2}{x^2} = \lambda\left(1+\frac{1}{x^2}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1 7 z' est donc de la forme $x \longmapsto \lambda\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ *i.e.* z est de la forme

$$\boxed{z : x \longmapsto \lambda\left(x-\frac{1}{x}\right)+\mu, \quad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

Enfin, $y = xz$ est de la forme :

$$\boxed{y : x \longmapsto \lambda(x^2-1)+\mu x, \quad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

[9] **III. Résolution de** (E)

(8) 8

2 a y_p est deux fois dérivable sur I comme produit et somme de fonctions qui le sont et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad y_p'(x) = \cancel{x\lambda'(x)} + \lambda(x) + \underbrace{\cancel{\mu'(x)(x^2-1)}}_{=-x\lambda'(x)} + 2x\mu(x).$$

Donc, $\boxed{\begin{array}{l}\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad y_p'(x) = \lambda(x)+2x\mu(x) \\ \qquad \text{et,} \quad y_p''(x) = \lambda'(x)+2\mu(x)+2x\mu'(x).\end{array}}$

2 b y_p est solution de (E) si, et seulement si , pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(x^2+1)\ln(x) = y_p'' - \frac{2x}{1+x^2}\,y_p' + \frac{2}{1+x^2}\,y_p$$
$$(x^2+1)\ln(x) = \lambda' + 2\mu + 2x\mu' - \frac{2x}{1+x^2}(\lambda+2x\mu) + \frac{2}{1+x^2}(\lambda x + \mu(x^2-1))$$
$$(x^2+1)\ln(x) = \lambda' + 2x\mu' + \underbrace{\lambda\,\frac{\overbrace{-2x+2x}^{=0}}{1+x^2} + \mu\,\frac{\overbrace{2+2x^2-4x^2+2x^2-2}^{=0}}{1+x^2}}_{=0}$$
$$(x^2+1)\ln(x) = \lambda' + 2x\mu'.$$

Donc, $\boxed{y_p \text{ est solution de (E) si, et seulement si } \lambda' + 2x\mu = (x^2+1)\ln(x).}$

2 c Soit $x \in \mathrm{I}$, le couple $(\lambda'(x)\,;\mu'(x))$ est donc solution du système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x\lambda'(x) & + & (x^2-1)\mu'(x) & = & 0 \\ \lambda'(x) & + & 2x\mu'(x) & = & (1+x^2)\ln x \end{array}\right. \quad \text{de déterminant } 1+x^2 \neq 0.$$

On trouve alors $\lambda'(x) = (1-x^2)\ln(x)$ et $\mu'(x) = x\ln(x)$.

2 d D'après (3), on a déjà :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathrm{I}, \qquad \lambda(x) = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln(x) - x + \frac{x^3}{9}}.$$

Déterminons une primitive de μ' sur I : Les fonctions $t \longmapsto \dfrac{t^2}{2}$ et $t \longmapsto \ln(t)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, on peut intégrer par parties et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad \int^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]^x - \int^x \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + \mathrm{C}. \quad (\mathrm{C} \in \mathbb{R})$$

On considère la primitive pour laquelle $\mathrm{C} = 0$ et on trouve :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathrm{I}, \qquad \mu(x) = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}.}$$

Une solution particulière de (E) sur I est donc :

$$\begin{aligned} y_p : x \longmapsto y_p(x) &= \lambda(x)x + \mu(x)(x^2-1) \\ &= \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right)\ln(x) - x^2 + \frac{x^4}{9} + \left(\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right)(x^2-1) \\ &= \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)\ln(x) - \frac{x^2}{4}\left(3 + \frac{5}{9}x^2\right). \end{aligned}$$

1 **9** D'après ce qui précède, la solution générale de (E) sur I est de la forme :

$$\boxed{y : x \longmapsto \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)\ln(x) - \frac{x^2}{4}\left(3 + \frac{5}{9}x^2\right) + \lambda(x^2-1) + \mu x,\ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.}$$