Fichiers Fonctions-Continuite a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Sur quel sous ensemble D de $\mathbb{R}$, la fonction de la variable réelle f donnée par

$$f(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$$

est-elle définie ? Calculer les limites de f aux bornes de D.

Exercice 2 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue, telle que pour chaque $x \in \mathrm{I}$, $f(x)^2 = 1$.

Montrer que $f \equiv 1$ ou $f \equiv -1$.

Correction : Comme $f(x)^2 = 1$ alors $f(x) = \pm 1$.

Attention ! Cela ne veut pas dire que la fonction est constante égale à 1 ou -1.

Supposons, par exemple, qu'il existe x tel que $f(x) = +1$.

Montrons que f est constante égale à $+1$.

S'il existe $y \neq x$ tel que $f(y) = -1$ alors f est positive en x, négative en y et continue sur I.

Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe z entre x et y tel que $f(z) = 0$, ce qui contredit $f(z)^2 = 1$.

Donc f est constante égale à $+1$.

Exercice 3 : Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux applications continues telles que $(f(0)-g(0))(f(1)-g(1)) \leqslant 0$.

Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$, $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 4 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue, non constante, telle que $f(a) = f(b)$.

On note $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $\mathrm{M} = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Montrer que tout $\alpha \in]m, \mathrm{M}[$ admet au moins deux antécédents par f dans $[a,b]$.

Exercice 5 : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.

Montrer que f est bornée et que f atteint ses bornes.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 :

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$, et pour tout couple de nombres réels (x,y) appartenant à $]-\infty, -a]$ ou à $[a, +\infty[$, on a :

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leqslant \frac{1}{a^2}|x-y|.$$

2. En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$|x - x_0| < \alpha \implies \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \epsilon.$$

3. En déduire que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Exercice 2 :

1. Pour tout n entier naturel et tout couple de réels (x, y), établir la formule :

$$x^n - y^n = (x-y).\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

2. Déduire de la question précédente que pour tout entier n tout réel strictement positif a et tout couple de réels (x, y) tel que $|x| \leqslant a$ et $|y| \leqslant a$,

$$|x^n - y^n| \leqslant na^{n-1}|x-y|.$$

3. Déduire de ce qui précède que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$|x - x_0| < \alpha \;\Rightarrow\; |x^n - x_0^n| < \epsilon.$$

Conclure quant à la continuité de $x \longmapsto x^n$ en $x_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x}{2x + |x|}$.

Déterminer le domaine de définition de f.

f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Correction : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

- $\forall\, x > 0, f(x) = \dfrac{x}{2x+x} = \dfrac{1}{3}$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{3}$.
- $\forall\, x < 0, f(x) = \dfrac{x}{2x-x} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$.

Par conséquent, f n'admet pas de limite en 0. Elle n'est pas prolongeable par continuité.

Exercice 4 :

1. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue.

   Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$.
2. Soient $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$.

   Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = g(x)$ (on pourra s'intéresser aux points fixes de f).

Correction :

1. $f(x) - x$ change de signe entre 0 et 1.
2. *Sinon $f - g$ est de signe constant, par exemple positif.*

   Si a est le plus grand point fixe de f alors $g(a) > a$ et $g(a)$ est aussi point fixe de f, absurde.

Exercice 5 : Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$.

Montrer que la fonction $g(t) = f\left(t + \dfrac{b-a}{2}\right) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $\left[a\,;\dfrac{a+b}{2}\right]$.

Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure.

Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Correction :

1. $g(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)$ et $g\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

   Comme $f(a) = f(b)$ alors nous obtenons que $g(a) = -g\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

   Donc ou bien $g(a) \leqslant 0$ et $g\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant 0$ ou bien $g(a) \geqslant 0$ et $g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant 0$.

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule en c pour un c entre a et $\frac{a+b}{2}$.

2. Notons t le temps (en heure) et $d(t)$ la distance parcourue (en km) entre les instants 0 et t.

   Nous supposons que la fonction $t \mapsto d(t)$ est continue.

   Soit $f(t) = d(t) - 4t$. Alors $f(0) = 0$ et par hypothèse $f(1) = 0$.

   Appliquons la question précédente avec $a = 0$, $b = 1$:

   Il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$.

   Donc $d(c + \frac{1}{2}) - d(c) = 4(c + \frac{1}{2}) - 4c = 2$.

   Donc entre c et $c + \frac{1}{2}$, (soit 1/2 heure), la personne parcourt exactement 2 km.

Exercice 6 : Soit a, b deux réels tels que $a < b$.

On considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$.

Montrer que si $f([a, b])$ est fini, alors f est constante.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 :

1. Rappeler que pour tout nombre réels $\epsilon > 0$ il existe un entier n tel que :

$$\frac{1}{2n\pi} < \epsilon \qquad \textit{et} \qquad \frac{1}{(2n+1)\pi} < \epsilon.$$

2. Montrer que pour tout nombre réel l, et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in]-\epsilon, \epsilon[$ tel que :

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right) - l\right| > \frac{1}{2}.$$

3. En déduire que la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0.

4. Montrer que la fonction définie par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I.

1. Soit $a \in \mathrm{I}$. Montrer que :

$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\right) \Rightarrow \left(\lim_{x \to a} |f(x)| = |f(a)|\right).$$

2. On suppose que f et g sont continues sur I.

   Montrer que la fonction $\sup(f, g)$ définie $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ par est continue sur I.

Correction :

1. On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ $|x-y| \geqslant ||x|-|y||$ (c'est la deuxième formulation de l'inégalité triangulaire).

   Donc pour tout $x \in \mathrm{I}$: $||f(x)|-|f(a)|| \leqslant |f(x)-f(a)|$.

   L'implication annoncée résulte alors immédiatement de la définition de l'assertion $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

2. Si f, g sont continues alors $\alpha f + \beta g$ est continue sur I, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Donc les fonctions $f+g$ et $f-g$ sont continues sur I.

   L'implication de 1. prouve alors que $|f-g|$ est continue sur I, et finalement on peut conclure :

   La fonction $\sup(f,g) = \dfrac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ est continue sur I.

Exercice 3 : Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, admettant une limite réelle quand x tend vers $+\infty$.

Montrer que f est constante.

Correction : Soit T une période strictement positive de f. On note ℓ la limite de f en $+\infty$.

Soit x un réel. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(x+n\mathrm{T})$ et quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x+n\mathrm{T}) = \ell.$$

Ainsi, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ell$ et donc, f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$.

Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

Correction : Notons ℓ la limite de f en $+\infty$:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists \mathrm{A} \in \mathbb{R} \quad x > \mathrm{A} \Rightarrow \ell - \epsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \epsilon.$$

Fixons $\epsilon = +1$, nous obtenons un A correspondant tel que pour $x > \mathrm{A}$, $\ell - 1 \leqslant f(x) \leqslant \ell + 1$.

Nous venons de montrer que f est bornée « à l'infini ».

La fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, \mathrm{A}]$, donc f est bornée sur cet intervalle : il existe m, M tels que pour tout $x \in [0, \mathrm{A}]$, $m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}$.

En prenant $\mathrm{M}' = \max(\mathrm{M}, \ell+1)$, et $m' = \min(m, \ell-1)$ nous avons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m' \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}'$.

Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.

La fonction n'atteint pas nécessairement ses bornes : regardez $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

Exercice 5 : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \mathrm{Inf}\{|y-x|,\ y \in \mathrm{A}\}$.

Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Correction : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $z \in \mathrm{A}$. $|x-z| \leqslant |x-y| + |y-z|$.

Or, $\forall\, z \in \mathrm{A},\ |x-z| \geqslant d(x, \mathrm{A})$ et donc $d(x,\mathrm{A}) - |x-y|$ est un minorant de $\{|y-z|,\ z \in \mathrm{A}\}$.

Par suite, $d(x,\mathrm{A}) - |x-y| \leqslant d(y,\mathrm{A})$.

On a montré que :

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ d(x,\mathrm{A}) - d(y,\mathrm{A}) \leqslant |y-x|.$$

En échangeant les rôles de x et y, on a aussi montré que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ d(y,\mathrm{A}) - d(x,\mathrm{A}) \leqslant |y-x|$.

Finalement, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(y) - f(x)| \leqslant |y-x|$.

Ainsi, f est donc 1-Lipschitzienne et en particulier continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 : Montrer que la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ est discontinue en chacun de ses points.

Correction : Soit χ la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$.

Soit x_0 un réel. On note que

$$x_0 \in \mathbb{Q} \iff \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ x_0 + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q} \iff \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ x_0 + \frac{\pi}{n} \notin \mathbb{Q}.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \chi(x_0 + \dfrac{1}{n})$ existe, $\lim\limits_{n\to+\infty} \chi(x_0 + \dfrac{\pi}{n})$ existe avec

$$\lim_{n\to+\infty} \chi(x_0 + \frac{1}{n}) \neq \lim_{n\to+\infty} \chi(x_0 + \frac{\pi}{n}),$$

bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_0 + \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} x_0 + \dfrac{\pi}{n} = x_0$.

Ainsi, pour tout réel $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ n'a pas de limite en x_0 et est donc discontinue en x_0.

Exercice 7 : Étudier en tout point la continuité de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \end{array}$.

Correction :

1. f est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ comme somme, et composée de fonctions continues.
2. Soit $p \in \mathbb{Z}$.

   - $\lim\limits_{x\to p^-} \mathrm{e}(x) = p-1$ donc $\lim\limits_{x\to p^-} f(x) = (p-1) + \sqrt{p-(p-1)} = p$;
   - $\lim\limits_{x\to p^+} \mathrm{e}(x) = p$ donc $\lim\limits_{x\to p^+} f(x) = p + \sqrt{p-p} = p$.
   - $f(p) = p$.

   Par conséquent, f admet une limite en p : f est continue en p.

Bilan : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

Exercice 8 : Étudier en tout point la continuité de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \lfloor x \rfloor^2 - x\lfloor x \rfloor + x^2 \end{array}$.

Correction :

1. f est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ comme somme, et composée de fonctions continues.
2. Soit $p \in \mathbb{Z}$.

   - $\lim\limits_{x\to p^-} \mathrm{e}(x) = p-1$ donc $\lim\limits_{x\to p^-} f(x) = (p-1)^2 - p(p-1) + p^2 = p^2 - p + 1$;
   - $\lim\limits_{x\to p^+} \mathrm{e}(x) = p$ donc $\lim\limits_{x\to p^+} f(x) = p^2$.
   - $f(p) = p^2$.

   Par conséquent, f est continue en $p \iff p^2 - p + 1 = p^2 \iff p = 1$.

Bilan : $\boxed{f \text{ est continue sur } (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \cup \{1\}}$.