Nom : .... **Prénom :** ....

Limites et Matrices

1 Compléter

Définition 1 (Point intérieur/adhérent à une partie de $\mathbb{R}$) : Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Point intérieur : Soit $x \in \mathbb{R}$.

On dit que x est *intérieur* à A si .... :

....

On note .... leur ensemble.

Proposition 3 (Limites en $-\infty$) : Soient D tel que $-\infty \in \overline{\mathrm{D}}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \iff$ ....
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff$ ....

Proposition 4 (Limite en un point fini) : Soient $a \in \overline{\mathrm{D}} \cap \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \iff \forall$ ....
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \iff$ ....

Théorème 7 : Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

b Si $\ell < \mathrm{M}$ alors, ...

Définition 3 (Limites à droite et à gauche) : Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

Limite à droite : Si a est adhérent à $\mathrm{D} \cap]a\,; +\infty[$, on dit que f possède une *limite à droite* en a si .... possède une limite en a.

Cette limite est notée ...., ..., ... ou ....

Théorème 9 (Limite et limites à gauche et à droite) : Soit $a \in \overline{\mathrm{D}}$.

La fonction f admet une limite en a notée $\lim_{x \to a} f(x)$ si, et seulement si

(b) .... si f n'est pas définie en a.

Proposition 15 (Limite et ordre) : Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et deux fonctions f et g définies sur tout voisinage $\mathcal{V}_a$ de a.

Si, $\begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a,\ g(x) < f(x), \\ \text{...............} \\ \text{...............} \end{cases}$ alors ....

Théorème 16 : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, trois fonctions f, g et h définies sur un voisinage ouvert $\mathcal{V}_a$ de a et ℓ un réel.

Théorème de majoration :

Si $\begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a,\ \text{.................} \\ \text{..........................} \end{cases}$ alors ....

2 Que dire de $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\lfloor x \rfloor}$?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer AB et AC. Que constate-t-on ?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(b) La matrice A peut-elle être inversible ? (justifier)

....

....

....

....

....

4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$.

En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Nom : .... **Prénom :** ....

Limites et Matrices

1 Compléter

Définition 1 (Point intérieur/adhérent à une partie de $\mathbb{R}$) : Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Point adhérent : Soit $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que x est *adhérent* à A si .... :

....

On note .... leur ensemble.

Proposition 2 (Limites en $+\infty$) : Soient D tel que $+\infty \in \overline{\mathrm{D}}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \iff$ ....
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff$ ....

Proposition 4 (Limite en un point fini) : Soient $a \in \overline{\mathrm{D}} \cap \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \iff$ ....
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ....

Théorème 7 : Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

(a) Si $m < \ell$ alors, ...

Définition 3 (Limites à droite et à gauche) : Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

Limite à gauche : Si a est adhérent à $\mathrm{D} \cap]-\infty\,; a[$, on dit que f possède une *limite à gauche* en a si .... possède une limite en a.

Cette limite est notée ...., ..., ... ou encore ....

Théorème 9 (Limite et limites à gauche et à droite) : Soit $a \in \overline{\mathbb{D}}$.

La fonction f admet une limite en a notée $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ si, et seulement si

ⓐ .... si f est définie en a.

Proposition 15 (Limite et ordre) : Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et deux fonctions f et g définies sur tout voisinage $\mathcal{V}_a$ de a.

$$\text{Si, } \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a,\ g(x) < f(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \quad \text{alors} \quad \ldots\ldots\ldots$$

Théorème 16 : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, trois fonctions f, g et h définies sur un voisinage ouvert $\mathcal{V}_a$ de a et ℓ un réel.

Théorème d'encadrement :

$$\text{Si } \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \quad \text{alors} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2 Que dire de $\lim\limits_{x \to 0} \lfloor x^2 \rfloor$?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer AB et AC. Que constate-t-on ?

(b) La matrice A peut-elle être inversible ? (justifier)

4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$.

En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.