Limites et Matrices

1 Compléter

Définition 1 (Point intérieur/adhérent à une partie de $\mathbb{R}$) : Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Point intérieur : Soit $x \in \mathbb{R}$.

On dit que x est *intérieur* à A si A contient un voisinage de x :

$$\exists\, V_x \in \mathcal{V}(x), V_x \subset A.$$

On note $\overset{\circ}{A}$ leur ensemble.

Proposition 3 (Limites en $-\infty$) : Soient D tel que $-\infty \in \overline{D}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, \beta(\varepsilon) \in \mathbb{R}, \forall\, x \in D,\ x \leqslant \beta \implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \iff \forall\, B \in \mathbb{R}, \exists\, \beta(B) \in \mathbb{R}, \forall\, x \in D,\ x \leqslant \beta \implies f(x) \leqslant B.$

Proposition 4 (Limite en un point fini) : Soient $a \in \overline{D} \cap \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, x \in D,\ |x-a| \leqslant \alpha \implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \iff \forall\, A \in \mathbb{R}, \exists\, \alpha(A) \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, x \in D,\ |x-a| \leqslant \alpha \implies f(x) \leqslant A.$

Théorème 7 : Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $f : D \longmapsto \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

(b) Si $\ell < M$ alors, il existe un voisinage de a sur lequel $f(x) < M$.

Définition 3 (Limites à droite et à gauche) : Soient $f : D \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

Limite à droite : Si a est adhérent à $D \cap]a\,;+\infty[$, on dit que f possède une *limite à droite* en a si $f_{|D\cap]a;+\infty[}$ possède une limite en a.

Cette limite est notée $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in]a;+\infty[}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)$ ou $f(a+0)$.

Théorème 9 (Limite et limites à gauche et à droite) : Soit $a \in \overline{D}$.

La fonction f admet une limite en a notée $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ si, et seulement si

(b) $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)$ si f n'est pas définie en a.

Proposition 15 (Limite et ordre) : Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et deux fonctions f et g définies sur tout voisinage $\mathcal{V}_a$ de a.

$$\text{Si, } \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a,\ g(x) < f(x), \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell' \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \end{cases} \quad \text{alors} \quad \ell' \leqslant \ell.$$

Théorème 16 : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, trois fonctions f, g et h définies sur un voisinage ouvert $\mathcal{V}_a$ de a et ℓ un réel.

Théorème de majoration :

$$\text{Si } \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a, \quad g(x) \leqslant f(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

2 Que dire de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\lfloor x \rfloor}$?

Pour $x \in [0\,;1[$, $\lfloor x \rfloor = 0$ donc $x \longmapsto \dfrac{x^2}{\lfloor x \rfloor}$ n'y est pas définie et ni $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{x^2}{\lfloor x \rfloor}$, ni $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\lfloor x \rfloor}$ n'existent.

Cependant, pour $x \in [-1\,;0[$, on a

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x < 0 \implies \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{\lfloor x \rfloor} < \frac{1}{x-1} \underset{x^2>0}{\implies} x \leqslant \frac{x^2}{\lfloor x \rfloor} < \frac{x^2}{x-1}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} x = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x-1} = 0$, d'après le théorème d'encadrement la limite à gauche existe et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{x^2}{\lfloor x \rfloor} = 0$.

3 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer AB et AC. Que constate-t-on ?

On trouve : $\boxed{AB = AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.}$

(b) La matrice A peut-elle être inversible ? (justifier)

Supposons A inversible. On multiplie à gauche par A^{-1} dans l'égalité $AB = AC$ et on obtient $B = C$.

Or ce n'est pas le cas, on en déduit donc que $\boxed{\text{A n'est pas inversible.}}$

4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$.

En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Un calcul rapide donne $A^3 - A = 4I_3$. Or

$$\begin{aligned} & A^3 - A = 4I_3 \\ \iff & (A^2 - I_3)A = 4I_3 \\ \iff & \frac{1}{4}(A^2 - I_3)A = I_3 \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\text{A est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{4}\left(A^2 - I_3\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.}$

Limites et Matrices

1 Compléter

Définition 1 (Point intérieur/adhérent à une partie de $\mathbb{R}$) : Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Point adhérent : Soit $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que x est *adhérent* à A si A rencontre tout voisinage de x :

$$\forall\ \mathrm{V}_x \in \mathcal{V}(x),\ \mathrm{A} \cap \mathrm{V}_x \neq \varnothing.$$

On note $\overline{\mathrm{A}}$ leur ensemble.

Proposition 2 (Limites en $+\infty$) : Soient D tel que $+\infty \in \overline{\mathrm{D}}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \geqslant \alpha \implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha(\mathrm{A}) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \geqslant \alpha \implies f(x) \geqslant \mathrm{A}.$

Proposition 4 (Limite en un point fini) : Soient $a \in \overline{\mathrm{D}} \cap \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ |x - a| \leqslant \alpha \implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ |x - a| \leqslant \alpha \implies f(x) \geqslant \mathrm{A}.$

Théorème 7 : Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

(a) Si $m < \ell$ alors, il existe un voisinage de a sur lequel $m < f(x)$.

Définition 3 (Limites à droite et à gauche) : Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

Limite à gauche : Si a est adhérent à $\mathrm{D} \cap]-\infty\,; a[$, on dit que f possède une *limite à gauche* en a si $f_{|\mathrm{D} \cap]-\infty;a[}$ possède une limite en a.

Cette limite est notée $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in]-\infty;a[}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ ou encore $f(a-0)$.

Théorème 9 (Limite et limites à gauche et à droite) : Soit $a \in \overline{\mathrm{D}}$.

La fonction f admet une limite en a notée $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ si, et seulement si

(a) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$ si f est définie en a.

Proposition 15 (Limite et ordre) : Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et deux fonctions f et g définies sur tout voisinage $\mathcal{V}_a$ de a.

$$\text{Si, } \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a,\ g(x) < f(x), \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell' \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \end{cases} \quad \text{alors} \quad \ell' \leqslant \ell.$$

Théorème 16 : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, trois fonctions f, g et h définies sur un voisinage ouvert $\mathcal{V}_a$ de a et ℓ un réel.

Théorème d'encadrement :

$$\text{Si } \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a, \quad g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$

2 Que dire de $\lim\limits_{x\to 0} \lfloor x^2 \rfloor$?

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0^+$.

Or, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \lfloor x \rfloor = 0$.

D'après les théorèmes sur les composées de limites, la limite existe et $\lim\limits_{x\to 0} \lfloor x^2 \rfloor = 0$.

3 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer AB et AC. Que constate-t-on ?

On trouve : $\boxed{AB = AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.}$

(b) La matrice A peut-elle être inversible ? (justifier)

Supposons A *inversible. On multiplie à gauche par* A^{-1} *dans l'égalité* $AB = AC$ *et on obtient* $B = C$.

Or ce n'est pas le cas, on en déduit donc que $\boxed{\text{A n'est pas inversible.}}$

4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$.

En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Un calcul rapide donne $A^3 - A = 4I_3$. Or

$$\begin{aligned} & A^3 - A = 4I_3 \\ \iff & (A^2 - I_3)A = 4I_3 \\ \iff & \frac{1}{4}(A^2 - I_3)A = I_3 \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{4}\left(A^2 - I_3\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$.