XV

Fonctions de la variable réelle CONTINUITÉ

Longtemps, les mathématiques se sont développées au service des autres sciences. La séparation des différentes sciences est d'ailleurs tardive, et nombreux ont été les mathématiciens à avoir également été des physiciens de renommée, comme Newton par exemple. Les mathématiques ont d'abord été vues comme un outil :

— au service de la mécanique et de l'ingéniérie (Archimède [1])

— au service de l'astronomie (géométrie grecque, Ptolémée [2], écoles indienne et arabe)

— au service de toute étude nécessitant d'être chiffrée pour obtenir des ordres de grandeurs.

Du dernier point découle l'importance du développement du calcul numérique (calcul approché, en opposition au calcul algébrique). C'est ce point de vue qui est à la base des procédés d'approximation (méthode de Newton de recherche d'un zéro, méthodes approchées de calcul d'intégrales), aboutissant notamment à la notion de convergence (qui donne la validité de l'approximation à l'infini).

Ainsi, l'utilisation de l'outil est souvent à la base de sa définition, et a souvent précédé sa théorisation : les mathématiques ont évolué de façon empirique.

Dans ce chapitre nous suivons le processus inverse et donnons les outils permettant une étude efficace des fonctions. On commencera par redéfinir de manière uniforme et cohérente la notion de continuité basée sur la notion de limite revue également dans le chapitre précédent.

Notre progression nous ramènera également sur un théorème fondamental de l'analyse réelle, le fameux *théorème des valeurs intermédiaires* que vous connaissez déjà bien mais dont la démonstration vous échappait encore fondamentalement.

[1]. Archimède de Syracuse, né à Syracuse vers **287** av. J.-C. et mort en cette même ville en **212** av. J.-C., est un grand scientifique grec de Sicile (Grande-Grèce) de l'Antiquité, physicien, mathématicien et ingénieur. Bien que peu de détails de sa vie soient connus, il est considéré comme l'un des principaux scientifiques de l'Antiquité classique. Parmi ses domaines d'étude en physique, on peut citer l'hydrostatique, la mécanique statique et l'explication du principe du levier. Il est crédité de la conception de plusieurs outils innovants, comme la vis d'Archimède.

Archimède est généralement considéré comme le plus grand mathématicien de l'Antiquité et l'un des plus grands de tous les temps1. Il a utilisé la méthode d'exhaustion pour calculer l'aire sous un arc de parabole avec la somme d'une série infinie, et a donné un encadrement de Pi d'une remarquable précision. Il a également introduit la spirale qui porte son nom, des formules pour les volumes des surfaces de révolution et un système ingénieux pour l'expression de très grands nombres.

Archimède est mort pendant le siège de Syracuse où il a été tué par un soldat romain qui a agi malgré les ordres demandant de ne pas lui nuire.

[2]. Claude Ptolémée, communément appelé Ptolémée (Ptolémaïs de Thébaïde (Haute-Égypte) vers **90** - Canope vers **168**) est un astronome et astrologue grec qui vécut à Alexandrie (Égypte). Il est également l'un des précurseurs de la géographie. Sa vie est mal connue. Son *cognomen Ptolemaeus* semble indiquer des origines gréco-égyptiennes, et son *nomen Claudius* une citoyenneté romaine.

Contenu

Les fonctions que l'on étudie en analyse sont généralement définies sur des intervalles ou des réunions d'intervalles comme $\mathbb{R}^*$ ou $[0\,;1[\cup[2\,;3]$, voire $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Dans tout ce chapitre, la lettre D qui nous servira d'ensemble de définition désignera cependant, sauf mention contraire, une partie quelconque de $\mathbb{R}$.

On notera par ailleurs $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Continuité

I.1 Fonction continue

Définition I (Fonction continue) : Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{D}$.

- On dit que f *est continue* a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f *est continue sur* D si elle est continue en tout point de D.

  On note $\mathscr{C}^0(\mathrm{D}\,;\mathbb{R})$ leur ensemble.
- On dit que f *est continue à gauche en* a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$.
- On dit que f *est continue à droite en* a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$.

f est continue en a si, et seulement si

- $\forall\, \mathrm{V}_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a)),\ \exists\, \mathrm{V}_{a,\mathrm{V}_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) \,/\, f\Big(\mathrm{V}_{a,\mathrm{V}_{f(a)}} \cap \mathrm{D}\Big) \subset \mathrm{V}_{f(a)}$.

ou

- $\forall\, \mathrm{V}_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a)),\ \exists\, \mathrm{V}_{a,\mathrm{V}_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) \,/\, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \in \mathrm{V}_{a,\mathrm{V}_{f(a)}} \implies f(x) \in \mathrm{V}_{f(a)}$.

  ce qui revient à écrire :
- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \forall\, x \in \mathrm{D},\ |x-a| \leqslant \alpha \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$.
- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \in [a-\alpha\,;a+\alpha] \implies f(x) \in [f(a)-\varepsilon\,;f(a)+\varepsilon]$.

Interprétation graphique : Une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est définie sur cet intervalle et si sa courbe représentative se trace d'un « trait continu », sans lever le crayon.

On a déjà vu que si f est définie en a et qu'elle admet une limite en a , alors sa limite est nécessairement $f(a)$. Demander que f soit continue en $a \in \mathrm{D}$ est donc équivalent à demander admette une limite en a (la définition y étant nécessaire).

ATTENTION

Pour pouvoir parler de continuité en a, il est nécessaire que f soit définie en a. Cela revient en fait à exiger seulement que la limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.

Cela n'a donc pas de sens de chercher si la fonction inverse est continue en 0. S'il faut lever le crayon pour tracer la courbe de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$, c'est simplement parce qu'elle n'est pas définie en 0.

Remarques :

— La continuité d'une fonction est une propriété locale. Cela aura de grandes conséquences.

— Une fonction continue en a y est bornée dans un voisinage de a.

— f n'est pas continue en a si, et seulement si

$$\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \exists\, x_0(\alpha,\,\varepsilon) \in \mathrm{D},\ |x_0 - a| \leqslant \alpha \text{ et } |f(x_0) - f(a)| > \varepsilon. \qquad \text{(XV.1)}$$

— f est continue à gauche en a si $f_{|\mathrm{D}\cap]-\infty;a[}$ est continue en a et continue à droite si $f_{|\mathrm{D}\cap]a;+\infty[}$ est continue en a.

Exemple 1 : La fonction valeur absolue $x \longmapsto |\cdot|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Preuve : Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que $|\cdot|$ est continue en a.

Soit $\varepsilon > 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\big||x| - |a|\big| \leqslant |x - a|$ d'après l'inégalité triangulaire généralisée.

Pour $\alpha = \varepsilon$, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x - a| \leqslant \alpha \implies \big||x| - |a|\big| \leqslant \varepsilon$ et la continuité en a quelconque de $\mathbb{R}$.

La fonction $x \longmapsto |\cdot|$ est donc continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

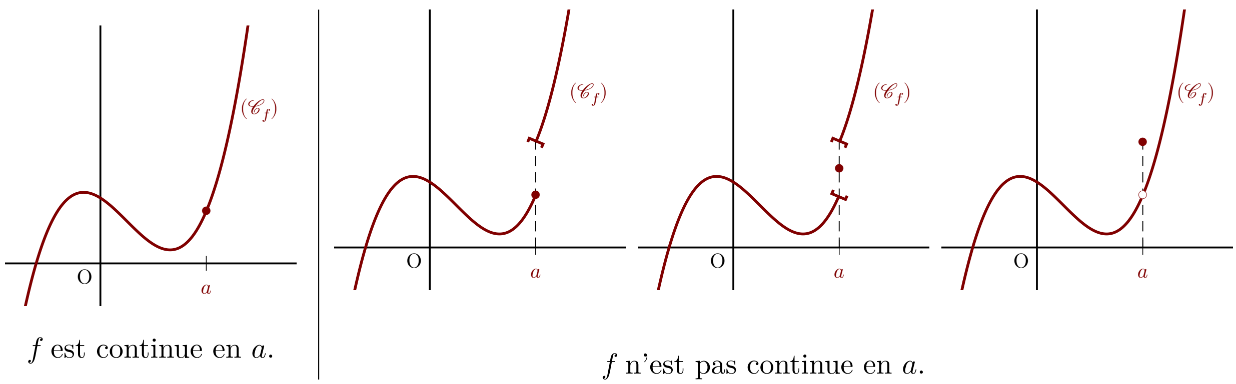


Figure XV.1 – Continuité et discontinuité en un point.

Exemples 2 :

- Toute fonction constante sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : x \longmapsto x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \longmapsto \lfloor\cdot\rfloor$ est définie sur $\mathbb{R}$ mais discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$.

  Plus précisément, la fonction $x \longmapsto \lfloor\cdot\rfloor$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ mais n'est continue à gauche qu'en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

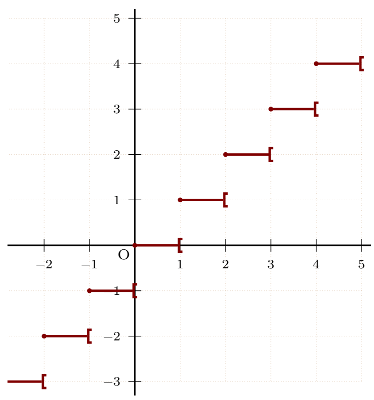


Figure XV.2 – $x \longmapsto \lfloor\cdot\rfloor$

Le résultat suivant est la version continue d'un résultat analogue sur les limites du chapitre précédent :

Théorème 1 (Continuité à gauche et à droite) : Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction et $a \in \mathrm{D}$ un point au voisinage duquel f est définie à gauche et à droite.

f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a.

ATTENTION

Pour tout $x \in [0\,;1[$, $\lfloor x \rfloor = 0$ et la fonction $x \longmapsto 0$ est continue sur $[0\,;1[$, mais peut-on pour autant dire que la fonction $x \longmapsto \lfloor \cdot \rfloor$ est continue sur $[0\,;1[$?

Non ! Ces deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier et coïncident sur $[0\,;1[$, mais leur continuité en 0 dépend aussi de leur comportement au voisinage de 0 À GAUCHE *i.e.* à l'extérieur de $[0\,;1[$.

Alors que la restriction $x \longmapsto \lfloor \cdot \rfloor_{|[0;1[}$ est bien continue sur $[0\,;1[$ tout entier, la fonction $x \longmapsto \lfloor \cdot \rfloor$ ne l'est que sur $]0\,;1[$. En particulier, elle N'est PAS continue en 0.

Exercice 1 : Tracer le graphe de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} ax+b & \text{si } x<0 \\ \sqrt{1+x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases} \end{array}$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue en 0.

I.2 Stabilité algébrique

Proposition 2 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) : Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un ensemble D.

1. $|f|$ est continue sur D.
2. Toute combinaison linéaire $\lambda f + g$ de fonctions continues sur D est continue sur D.
3. Le produit $f \times g$ de deux fonctions continues sur D est continue sur D.
4. Si g ne s'annule pas sur D alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue sur D.
5. Si $f(\mathrm{D}) \subset \mathrm{E}$ et si g est continue sur E alors $g \circ f$ est continue sur D.

Que ce soit en un point ou sur un intervalle, la somme et le produit de deux fonctions continues sont continus. Même chose pour l'inverse d'une fonction qui ne s'annule pas ainsi que pour la composée de deux fonctions composables. Ces résultats découlent immédiatement des résultats analogues que nous avons prouvés sur les limites de fonctions.

Remarques :

— On dit que $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre pour les opérations usuelles *i.e.* que $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires et produits.

— Si f et g sont continues sur I alors $\sup(f\,;g)$ et $\inf(f\,;g)$ le sont aussi.

Il suffit de remarquer que :

$$\sup(f\,;g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \quad \text{et} \quad \inf(f\,;g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}.$$

En particulier $f^+ = \sup(f\,;0)$ et $f^- = \inf(f\,;0)$ le sont.

Méthode I (Montrer qu'une fonction est continue) : Avant de s'intéresser, si nécessaire, à des points locaux du domaine de définition D d'une fonction f, il suffira bien souvent de préciser la continuité de quelques fonctions usuelles sur un sous-ensemble D' de D et d'invoquer les « théorèmes généraux » pour conclure à la continuité de f sur D'.
On étudiera alors la continuité et l'éventualité d'un prolongement en les points de $\mathrm{D} \setminus \mathrm{D}'$.

ATTENTION On prendra bien garde à préciser que les quotients ne s'annulent pas, que les expressions sous les racines sont positives, que celles dans les logarithmes strictement positives, celles dans les arcsin et arccos entre -1 et 1, ... et on précisera bien les domaines manipulés dans les composées.

Exemple 3 : La fonction $x \longmapsto \left(\ln\left(x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)\right)^2$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.
En effet,

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$) et la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ l'est sur $\mathbb{R}$, donc par composition $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}^*$. Par somme, $x \longmapsto x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \longmapsto x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x \longmapsto \ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition $x \longmapsto \ln\left(x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$).
- Enfin, la fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. Le résultat découle donc d'une dernière composition.

Exercice 2 : Montrer que la fonction $x \longmapsto \arcsin\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple 4 (Fonction k-lipschitzienne) : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est *k-lipschitzienne de rapport* $k > 0$ si pour tout $(x\,;y) \in \mathrm{I}^2$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|\,.$$

La fonction est dite *contractante* si $k < 1$.

Théorème 3 : Toute fonction lipschitzienne est continue sur son ensemble de définition.

Exercice 3 : Étudier la continuité des fonctions suivantes au point a :

1. $$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$
en $a = 0$.

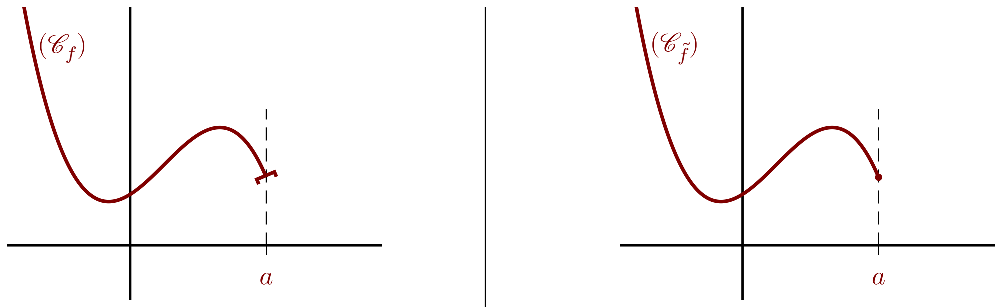
2. $$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x = 2 \end{cases} \end{array}$$
en $a = 2$.

I.3 Prolongement par continuité

Définition 2 : Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur D et $a \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{D}$ adhérent à D.
On dit que f est *prolongeable par continuité* en a s'il existe une fonction $\tilde{f} : \mathrm{D} \cup \{a\} \longmapsto \mathbb{R}$ continue en a telle que :

$$\tilde{f}_{|\mathrm{D}} = f.$$

La fonction $\tilde{f}$ est appelée *prolongement par continuité* de f en a.



f n'est pas définie en a. $\tilde{f}$ est définie, continue en a et prolonge f en a.

Figure XV.3 – Prolongement d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition.

ATTENTION Dans la définition, il doit être clair que a n'appartient pas à D *i.e.* f n'est pas définie en a.

Les fonctions f et $\tilde{f}$ sont distinctes en toute rigueur car elles n'ont pas le même ensemble de définition, mais on choisit généralement de noter encore f le prolongement $\tilde{f}$ par souci de simplicité sans autre forme de procès.

Théorème 4 : Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur D et $a \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{D}$ adhérent à D.

f est prolongeable par continuité en a si, et seulement si f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en a.

Dans ce cas, l'unique prolongement par continuité de f en a est donné par :

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathrm{D} \cup \{a\} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in \mathrm{D} \\ \ell & \text{si} \quad x = a. \end{cases} \end{array}$$

Preuve :
($\Longrightarrow$) : *Supposons que f soit prolongeable par continuité en a.*

Alors il existe une fonction continue $\tilde{f}$ telle que $\forall x \in \mathrm{D},\ \tilde{f}(x) = f(x)$

Comme $\tilde{f}$ est continue en a, on a $\lim\limits_{x \to a} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(a)$.

D'où,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathrm{D} \cup \{a\}, \quad |x - a| \leqslant \eta \implies |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| \leqslant \varepsilon.$$

En particulier,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall\, x \in \mathrm{D}, \quad |x-a| \leqslant \eta \implies |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| \leqslant \varepsilon$$

Et comme $\forall\, x \in \mathrm{D}$, $\tilde{f}(x) = f(x)$, on a :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall\, x \in \mathrm{D}, \quad |x-a| \leqslant \eta \implies |f(x) - \tilde{f}(a)| \leqslant \varepsilon$$

La fonction f admet bien en a une limite finie (qui vaut $\tilde{f}(a)$).

($\Longleftarrow$) : Supposons que f admette une limite finie ℓ en a, et posons :

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathrm{D} \cup \{a\} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \left\{ \begin{array}{ccc} f(x) & \text{si} & x \in \mathrm{D} \\ \ell & \text{si} & x = a. \end{array} \right. \end{array}$$

Par construction, $\tilde{f}_{|\mathrm{D}} = f$, donc $\tilde{f}$ est bien un prolongement de f. Montrons qu'il est continue en a :

Comme f admet une limite ℓ finie en a, cela se traduit par :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists \eta > 0, \forall\, x \in \mathrm{D}, \quad |x-a| \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

D'où,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists \eta > 0, \forall\, x \in \mathrm{D}, \quad |x-a| \leqslant \eta \implies |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| \leqslant \varepsilon$$

Par ailleurs, si $x = a$, on a $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| = 0$. On peut donc étendre la propriété précédente à tout x de $\mathrm{D} \cup \{a\}$:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists \eta > 0, \forall\, x \in \mathrm{I} \cup \{a\}, \quad |x-a| \leqslant \eta \implies |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| \leqslant \varepsilon$$

En d'autres mots, $\lim\limits_{x \to a} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(a)$ i.e. la fonction $\tilde{f}$ est continue en a.

On a bien trouvé un prolongement par continuité $\tilde{f}$ de f en a.

Exemples 5 :

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \ln x$ admet un prolongement par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
- Les fonction f et g définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ admettent un prolongement par continuité en 0 en posant $f(0) = g(0) = 1$.
- Pour tout $\alpha > 0$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$ admet un prolongement par continuité en 0 en posant $0^\alpha = 0$.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

1. Montrer que f peut se prolonger en une fonction continue en 0.
2. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x) + 1$.

   En déduire que f peut se prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1 La fonction f est clairement continue sur $]-1\,;1[\setminus\{0\}$. De plus, pour tout $x \in [0\,;1[$, $f(x) = \sqrt{x}$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

Pour tout $x \in [-1\,;0[$, $f(x) = -1 + \sqrt{x+1}$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$.

La fonction f admet donc des limites à droite et à gauche en 0 qui coïncident donc elle peut se prolonger en une fonction continue sur $]-1\,;1[$ en posant $f(0) = 0$.

2 $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$, donc $f(x+1) = f(x) + 1$ et, par récurrence,

$$\forall\, p \in \mathbb{Z},\ f(x+p) = f(x) + p.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leqslant x < p+1 \iff x - p \in [0\,;1[$.

Comme $f(x) = f(x-p+p) = f(x-p)+p$, d'après les théorèmes sur les sommes de fonctions continues, f est continue sur $\mathbb{R}$.

I.4 Continuité et suites

Proposition 5 (Caractérisation séquentielle de la continuité) : Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction et $a \in \mathrm{D}$.

f est continue en a si, et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D, qui tend vers a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$.

En résumé, pour une fonction continue $\boxed{f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \dots\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(\dots).}$

Preuve :

Sens direct : Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

D'après la continuité de f en a, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$|x-a| \leqslant \alpha \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a.

Il existe donc un entier $n_0(\alpha)$ tel que $n \geqslant n_0 \implies |u_n - a| \leqslant \alpha$.

Conclusion, pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - a| \leqslant \alpha \implies |f(u_n) - f(a)| \leqslant \varepsilon$.

La suite $\left(f(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Sens réciproque : Montrons sa contraposée i.e. si montrons que si f n'est pas continue en a alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a et telle que $\left(f(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(a)$.

On suppose donc que f n'est pas continue en a :

$$\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \exists\, x_0(\alpha, \varepsilon) \in \mathrm{I},\ |x_0 - a| \leqslant \alpha \text{ et } |f(x_0) - f(a)| > \varepsilon.$$

Pour $\alpha = \dfrac{1}{n}$, $\exists\, a_n(\alpha, \varepsilon) \in \mathrm{D}$, tel que :

$$|a_n - a| \leqslant \frac{1}{n} \text{ et } |f(a_n) - f(a)| > \varepsilon.$$

Par construction, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a et pourtant $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers $f(a)$ car à une distance de a strictement supérieure à 0.

En pratique, ce théorème est plus souvent utilisé dans deux contextes bien précis :

— celui des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$:

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ET si f continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$.

— celui des fonctions discontinues :

Par la contraposée pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point a, il suffit de trouver deux suites qui convergent vers a mais telles que leur image converge soit pas soit vers deux limites différentes comme à l' exercice (5) .

Exercice 5 : Étudier la continuité en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

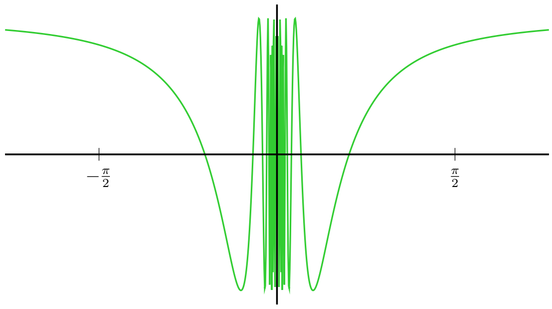


Figure XV.4 – $x \longmapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'est pas continue en 0.

Correction : Considérons les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ et $v_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi}$.

Elles convergent toutes les deux vers 0.

Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = 1$ et $f(v_n) = -1$.

La fonction f ne peut donc pas admettre de limite en 0.

Exemple 6 (Fonction continue sur $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$) :
Cet exemple a pour but de montrer que la notion de continuité en un point peut se révéler complexe.

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \text{ est rationnel sous sa forme irréductible}^{[3]}, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel.} \end{cases}$$

Montrons que f, ainsi construite, est continue en tout point irrationnel et discontinue ailleurs.

- Si x_0 est rationnel alors $f(x_0) = \dfrac{1}{q} \neq 0$ et, par densité de $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$, x_0 est limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'irrationnels.

  Comme $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = 0$, la fonction f ne peut être continue en x_0.
- Si x_0 est irrationnel, soit $\varepsilon > 0$. Il existe q entier positif tel que $\dfrac{1}{q}$ soit inférieur à ε.

Posons alors $p = \lfloor x_0 q! \rfloor$, on a :

$$\frac{p}{q!} \leqslant x_0 < \frac{p+1}{q!} \quad i.e. \quad \mathrm{I} = \left] \frac{p}{q!} \,;\, \frac{p+1}{q!} \right[\in \mathcal{V}(x_0).$$

Tout x de $\mathrm{I} = \left] \frac{p}{q!} \,;\, \frac{p+1}{q!} \right[$ vérifie :

- si x est irrationnel alors $f(x) = 0$.
- si $x = \frac{a}{b}$ est rationnel alors on a :

$$\frac{p}{q!} < \frac{a}{b} < \frac{p+1}{q!} \implies p < \frac{aq!}{b} < p+1$$

Mais alors $\frac{aq!}{b}$, coincé strictement entre deux entiers, ne peut être entier.

Si $|b| \leqslant q$ alors la fraction $\frac{aq!}{b}$ pourrait se simplifier par b et cela contredirait le fait que $\frac{aq!}{b} \notin \mathbb{Z}$.

Conclusion, $|b| > q \implies |f(x)| = \frac{1}{|b|} < \frac{1}{q} < \varepsilon$.

À ε donné strictement positif quelconque, on a donc trouvé un voisinage I de x_0 tel que l'image de tout x de ce voisinage appartienne au voisinage $]f(x_0) - \varepsilon \,;\, f(x_0) + \varepsilon[=] - \varepsilon \,;\, \varepsilon[$ de $f(x_0)$.

C'est bien la définition de la continuité de f en x_0.

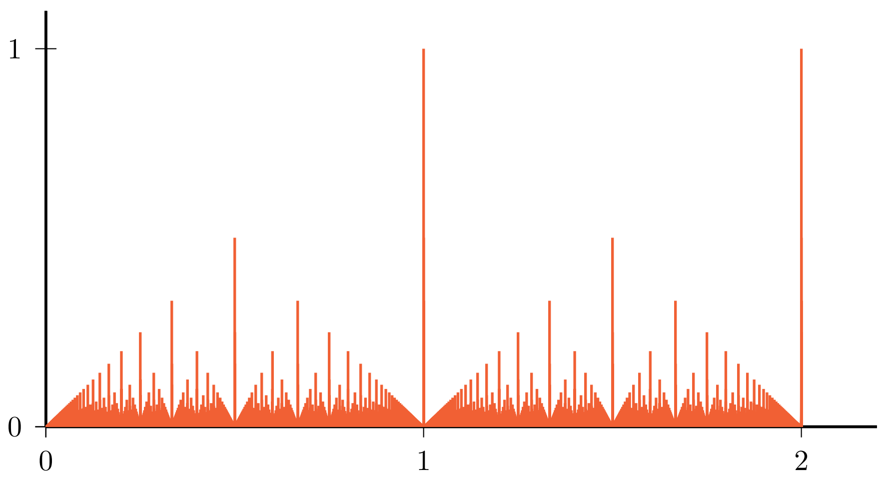


Figure XV.5 – Graphe de la fonction f, dite de Thomae, continue sur $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$.

II Théorèmes de continuité globale

ATTENTION

Les théorèmes de ce paragraphe ne concernent que les fonctions à valeurs réelles.

La continuité globale désigne la continuité sur un intervalle par opposition à la continuité locale en un point.

⌊3⌋. En particulier, $q \in \mathbb{N}^*$ est strictement positif.

II.1 Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences

Théorème 6 (dit de Bolzano) : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.
Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors f s'annule au moins une fois sur $[a\,;b]$ *i.e.* $\exists\, c \in [a\,;b]\,,\ f(c) = 0$.

La condition $f(a)f(b) \leqslant 0$ est équivalente à dire que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés.

Un peu d'histoire : *Ce théorème n'a eu de démonstration que fort tard.*

Il nécessite en effet une conception claire de la continuité, qui n'est apparue qu'au XIX$^{\text{ème}}$.

En 1817, Bolzano (1781-1848) rejette les justifications usuelles basées sur des considérations liées à la géométrie, au mouvement, à l'espace, dans un domaine qu'il considère purement analytique.

La première définition de la continuité, encore intuitive, a été publiée par Cauchy en 1821.

Preuve : Sans perte de généralité, on peut supposer, par exemple, que $f(a) \leqslant 0$. Soit $\mathrm{A} = \{x \in [a\,;b] \;/\; f(x) \leqslant 0\}$.

A contient a, donc est non vide, et est majoré par b. Il admet donc une borne supérieure $c \leqslant b$.

Montrons que c convient :

- Si $f(c) < 0$ alors, comme f est continue, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage $]c-\varepsilon\,;c+\varepsilon[$ de c sur lequel f est à valeurs strictement négative. En particulier, $f\left(c + \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant 0$ puis $c + \dfrac{\varepsilon}{2} \in \mathrm{A}$, ce qui contredit le fait que c soit la borne supérieure de A.
- Si $f(c) > 0$, alors f est strictement positive sur un voisinage $]c-\varepsilon\,;c+\varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$.

  Or, par définition de la borne supérieure, $c - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A i.e. $\exists\, y \in\,]c-\varepsilon\,;c[$ tel que $f(y) \leqslant 0$ ce qui contredit l'hypothèse précédente.

La seule hypothèse restante est alors $f(c) = 0$, ce que l'on souhaitait.

Exercice 6 : Montrer que l'équation $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$ admet au moins trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

En donner un encadrement à 10^{-1} de chacune d'elles.

Correction : Posons $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$. La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}$.

1. Comme $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = -1 < 0$, d'après le théorème (6), il existe $x_2 \in [0\,;1]$ tel que $f(x_2) = 0$.
2. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $0 \in f(]-\infty\,;0])$, d'après le théorème (6), il existe $x_1 \in]-\infty\,;0]$ tel que $f(x_1) = 0$.
3. De même sur $[1\,;+\infty[$ et le théorème (6), donne $x_3 \in [1\,;+\infty[$ tel que $f(x_3) = 0$.

Comme $x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3$, on a bien trouvé trois racines distinctes de l'équation.

Enfin, par dichotomie, on trouve $x_1 \simeq -2,6$, $x_2 \simeq 0,3$ et $x_3 \simeq 1,3$

Corollaire 6.1 : Tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.

Théorème 7 (Théorème des valeurs intermédiaires) :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Plus précisément, soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$ et $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,;\mathbb{R})$.
Tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède un antécédent par f dans $[a\,;b]$.

Pour tout réel k entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = k$.

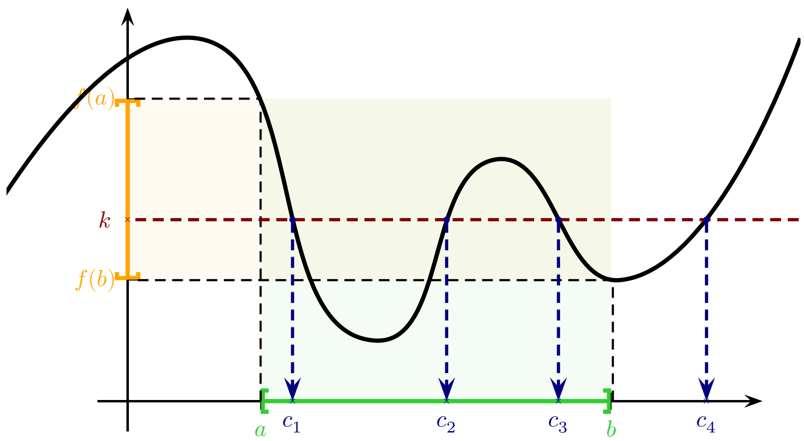


Figure XV.6 – Une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ prend toutes les valeurs de celui-ci.

Preuve : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Sans perte de généralité, on peut supposer f non constante i.e. $f(\mathrm{I})$ non réduit à un point qui serait bien un intervalle de toute façon.

Soient a, b deux réels distincts de I, supposons $a < b$, soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Posons $g : t \longmapsto f(t) - k$, alors g est continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ et $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes contraires.

D'après le théorème (6), il existe donc $c \in [a\,;b]$ tel que $g(c) = 0$ i.e. $f(c) = k$.

Conclusion, tout élément entre deux images de I par f possède un antécédent dans I. Cela ne suffit pas encore pour faire de $f(\mathrm{I})$ un intervalle.

Soient $u < v$ deux éléments de $f(\mathrm{I})$. (Montrons que $[u\,;v] \subset f(\mathrm{I})$.)

Il existe alors a, $b \in \mathrm{I}$ (distincts car f est supposée non constante) tels que $f(a) = u$ et $f(b) = v$.

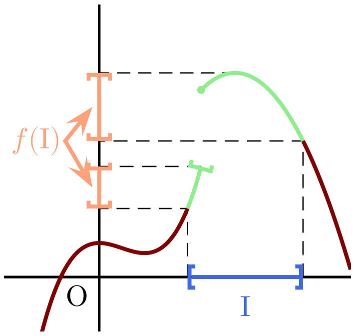
Pour tout $k \in [u\,;v]$ il existe donc $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = k$ i.e. $k \in f(\mathrm{I})$, ce qui prouve que $f(\mathrm{I})$ est un intervalle.

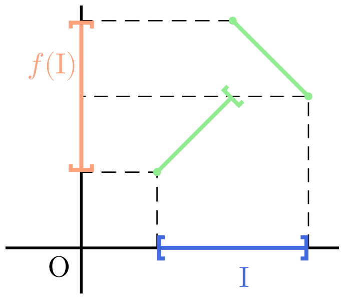
ATTENTION

Si I est un INTERVALLE et f : I $\longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, cette version nouvelle du TVI affirme que $f(\mathrm{I})$ est également un INTERVALLE, mais pas que I et $f(\mathrm{I})$ sont de même nature.

Il se peut que I soit ouvert et $f(\mathrm{I})$ un segment, ou bien que I soit semi-ouvert et $f(\mathrm{I})$ ouvert, ...

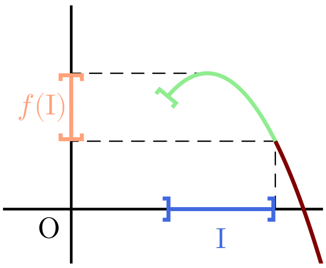
Comme le montrera le théorème (8), ce sera, par contre, bien le cas lorsque l'intervalle est un segment *i.e.* un intervalle de la forme $[a\,;b]$.

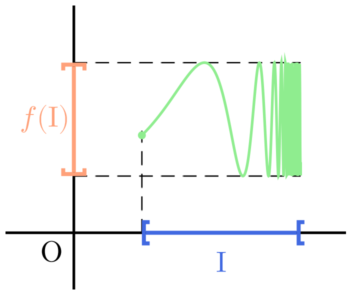




I est un intervalle, $f(\mathrm{I})$ n'est pas un intervalle. I et $f(\mathrm{I})$ sont des intervalles (des segments).

f n'est pas continue sur I.





I est ouvert, $f(\mathrm{I})$ est fermé. I est semi-ouvert, $f(\mathrm{I})$ est fermé.

f est continue sur I.

Figure XV.7 – Image d'un intervalle par une fonction

Une réflexion : *La propriété des valeurs intermédiaires correspond à une notion intuitive : il est possible de dessiner le graphe de la fonction « d'un seul trait » (c'est-à-dire sans soulever le crayon).*

Cette remarque amène à se demander s'il n'y a pas équivalence entre la propriété des valeurs intermédiaires et la continuité ?

La réponse est malheureusement négative.

Un contre-exemple nous est donné par la fonction de l'exercice précédent $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : \quad \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$
$$x \qquad \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas continue en 0 mais elle satisfait bien la propriété des valeurs intermédiaires pour chaque couple de points dans $\mathbb{R}$.

Plus généralement, le théorème de Darboux affirme que toute fonction $[a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ qui admet une primitive satisfait la propriété des valeurs intermédiaires.

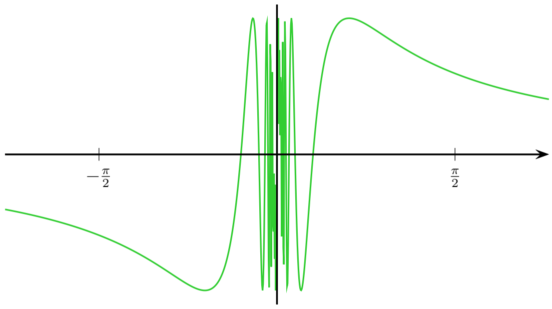


Figure XV.8 – $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ne peut être prolongeable par continuité en 0 mais vérifie la propriété du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 7 : Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

Démontrer que f a un point fixe, et un seul lorsqu'elle décroît.

Correction : Soit $\varphi : [0\,;1] \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = f(x) - x$.

Un point fixe de f est une valeur d'annulation de φ.

Or, φ est continue, $\varphi(0) = f(0) \geqslant 0$ et $\varphi(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, φ s'annule.

Si f est décroissante alors φ est strictement [4] décroissante donc injective et ne peut donc s'annuler qu'au plus une fois.

Remarque : On peut généraliser ce résultat au cas où $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$.

En effet, on raisonne par l'absurde pour l'existence : puisque φ est continue, si elle ne s'annule pas elle est strictement positive ou négative.

- Si $\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi(x) > 0$ alors $f(x) > x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui est absurde puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \inf\limits_{\mathbb{R}}(f)$.
- Si $\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi(x) < 0$ alors $f(x) < x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ ce qui est absurde puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \sup\limits_{\mathbb{R}}(f)$.

L'unicité est identique.

Exercice 8 : Un marcheur parcourt douze kilomètres en une heure.

Démontrer qu'il existe une demi-heure pendant laquelle il parcourt exactement six kilomètres.

Correction : Il faut formaliser le problème : notons $\mathrm{L}(t)$ la longueur du chemin que le marcheur a parcouru au temps t. Il est naturelle de supposer que le marcheur ne fait pas de bond instantané, donc que L est continue sur $[0\,;1]$.

On a $\mathrm{L}(0) = 0$ et $\mathrm{L}(1) = 12$. La distance qu'il parcourt en $\frac{1}{2}$h à partir d'un temps t est $d(t) = \mathrm{L}\left(t + \frac{1}{2}\right) - \mathrm{L}(t)$. D'après les théorèmes généraux, d est également continue sur $[0\,;1]$.

On a $d\left(\frac{1}{2}\right) = 12 - \mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $d(0) = \mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\right)$.

De deux choses l'une : soit $d(0) = \mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\right) < 6$ alors $d\left(\frac{1}{2}\right) = 12 - \mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\right) > 6$. Comme d est continue, on peut conclure avec le TVI qu'il existe $t_0 \in \left]0\,;\frac{1}{2}\right[$ tel que $d(t) = 6$.

[4]. En effet, s'il existait $x < y$ tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$ alors on aurait

$$f(x) - x = f(y) - y \iff 0 < f(x) - f(y) = x - y < 0,$$

ce qui est impossible.

Si $d(0) = \mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant 6$, on fait le même raisonnement.

II.2 Image d'un segment

Rappel I (Segment) : Soient $a < b$ des réels. On appelle *segment* l'ensemble noté $[a\,;b]$ défini par :

$$[a\,;b] = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leqslant x \leqslant b\right\}.$$

En particulier, les segments de $\mathbb{R}$ sont des fermés bornés de $\mathbb{R}$.

Théorème 8 (Théorème des bornes atteintes [5]) : Toute fonction continue sur un SEGMENT y est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists\, c, d \in [a\,;b] \quad \text{tels que} \quad f(c) = \min_{x\in[a;b]} f(x) \quad \text{et} \quad f(d) = \max_{x\in[a;b]} f(x).$$

Moralité : Même si nous avons vu que la continuité ne préservait pas la nature des intervalles en général, une chose est sûre, un segment est toujours transformé en un segment.

En effet, si nous savions déjà que l'image de $[a\,;b]$ était un intervalle, nous savons désormais que les bornes sont atteintes *i.e.*

$$f(\,[a\,;b]\,) = [m\,;\mathrm{M}] \quad \text{où} \quad m = \min_{x\in[a;b]} f(x) = f(c) \quad \text{et} \quad \mathrm{M} = \max_{x\in[a;b]} f(x) = f(d).$$

ou, de manière équivalente :

L'image d'un SEGMENT par une fonction CONTINUE est un SEGMENT.

ATTENTION Sur un intervalle borné qui n'est pas un segment, une fonction continue n'a aucune raison d'être bornée. Pensez à la fonction tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Preuve : (Hors-Programme)

Soient un segment $[a\,;b]$ et f une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

D'après le théorème (7), $f(\,[a\,;b]\,)$ est un intervalle. Montrons que f possède un maximum [6].

Posons $s = \sup f(\,[a\,;b]\,) \in \overline{\mathbb{R}}$. Le but de la démonstration est de ramener s dans $\mathbb{R}$.

Comme s est adhérent à $f(\,[a\,;b]\,)$, elle est la limite d'une suite d'éléments de $f(\,[a\,;b]\,)$. Nous pouvons donc nous donner une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a\,;b]$ pour laquelle : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = s$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était convergente, disons de limite $x \in [a\,;b]$, on pourrait aussitôt affirmer que $f(x) = s$ par continuité, ce qui montrerait que $s \in \mathbb{R}$ i.e. f est majorée ou encore mieux, $s = \max f(\,[a\,;b]\,)$.

Le problème, c'est que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a aucune raison d'être convergente. Elle est cependant bornée donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle possède une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, disons de limite $x \in [a\,;b]$.

[5]. La démonstration de ce théorème est admise en PTSI.

Or, par continuité de f, on a alors $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(u_{\varphi(n)}) = s$.

On conclut alors, comme dit précédemment, $s \in \mathbb{R}$, donc f est majorée mais aussi $s = \max f(\,[a\,;b]\,)$.

En particulier, $f(\,[a\,;b]\,) = \Big[\min f(\,[a\,;b]\,)\,;\max f(\,[a\,;b]\,)\Big]$.

Remarques : Il est très important de remarquer où jouent les hypothèses :

- La fermeture du segment est nécessaire pour « retenir » la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou de sa suite extraite.
- Le caractère borné permet d'utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass.
- La continuité de f permet de passer à la limite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou sa suite extraite.
- Enfin, le caractère réel permet de considérer la borne supérieure de $f(\,[a\,;b]\,)$.

Qu'une seule de ces hypothèses disparaissent et c'en est fini de la démonstration !

Exemples 7 : Le fait que $[a\,;b]$ soit un intervalle fermé borné est très important. Voici quelques exemples :

1. $x \longmapsto x$ définie sur $[0\,;+\infty[$ n'est pas majorée.
2. $x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$ définie sur $[0\,;+\infty[$ est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.
3. $x \longmapsto 1-x$ définie sur $]0\,;1]$ est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.
4. $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $]0\,;1]$ n'est pas majorée.

Exercice 9 : Montrer qu'une fonction continue et strictement positive sur un segment y est minorée par un réel strictement positif.

Correction : Si f est continue sur un segment $[a\,;b]$ alors, d'après le théorème (8) elle admet un minimum en un certain réel x_m de $[a\,;b]$, donc pour tout x de $[a\,;b]$, on a $f(x) \geqslant f(x_m)$.

Or, f est strictement positive sur $[a\,;b]$.

Donc $f(x_m) > 0$.

Corollaire 8.1 : Toute fonction continue périodique définie sur $\mathbb{R}$ tout entier est bornée.

Preuve : Soit $\mathrm{T} > 0$ et $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ une fonction continue T-périodique.

D'après le théorème précédent, f est donc bornée sur $[0\,;\mathrm{T}]$, disons par $\mathrm{K} \geqslant 0$ i.e. $\forall x \in [0\,;\mathrm{T}]$, $|f(x)| \leqslant \mathrm{K}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On commence par se ramener dans l'intervalle $[0\,;\mathrm{T}]$ par translation :

$$\frac{x}{\mathrm{T}} - 1 < \left\lfloor \frac{x}{\mathrm{T}} \right\rfloor \leqslant \frac{x}{\mathrm{T}} \iff 0 \leqslant x - \left\lfloor \frac{x}{\mathrm{T}} \right\rfloor \mathrm{T} < \mathrm{T} \iff x - \left\lfloor \frac{x}{\mathrm{T}} \right\rfloor \mathrm{T} \in [0\,;\mathrm{T}].$$

D'où $|f(x)| = \left| f\left(\underbrace{x - \underbrace{\left\lfloor \frac{x}{\mathrm{T}} \right\rfloor \mathrm{T}}_{\in \mathrm{T}\mathbb{Z}}}_{\in[0;\mathrm{T}]} \right) \right| \leqslant \mathrm{K}$ et f est bornée sur tout $\mathbb{R}$.

[6]. Pour montrer que f y admet un minimum, il suffira de remplacer f par $-f$.

III Continuité des fonctions monotones

III.1 Lien entre monotonie et continuité

Tout d'abord une conséquence direct du théorème (8) et de celui de la limite monotone.

Théorème 9 (TVI appliqué aux fonctions strictement monotones) : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Toute fonction continue et strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I est bijective de I sur $f(\mathrm{I})$ qui est un intervalle *i.e.* quels que soient $a < b$ deux réels de I, tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un unique antécédent par f dans $[a\,;b]$.

De plus, pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, suivant le sens de monotonie de f,

- si $\mathrm{I} = [a\,;b]$ alors $f(\mathrm{I}) = [f(a)\,;f(b)]$ ou $f(\mathrm{I}) = [f(b)\,;f(a)]$,
- si $\mathrm{I} = [a\,;b[$ alors $f(\mathrm{I}) = \left[f(a)\,;\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$ ou $f(\mathrm{I}) = \left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,;f(a)\right]$,
- si $\mathrm{I} =]a\,;b]$ alors $f(\mathrm{I}) = \left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,;f(b)\right]$ ou $f(\mathrm{I}) = \left[f(b)\,;\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$,
- si $\mathrm{I} =]a\,;b[$ alors $f(\mathrm{I}) = \left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,;\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$ ou $f(\mathrm{I}) = \left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,;\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$ respectivement.

En particulier, l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone est un intervalle de même nature.

Preuve : Montrons, par exemple, le cas où f est strictement croissante sur $\mathrm{I} = [a\,;b[$.

On sait déjà que f est bijective de $[a\,;b[$ sur son image $f([a\,;b[)$. Montrons que $f([a\,;b[) = \left[f(a)\,;\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$.

Comme f est continue, on sait aussi, d'après le TVI, $f([a\,;b[)$ est un intervalle.

Comme $f(a) \in f([a\,;b[)$ et comme $f(a)$ minore $f([a\,;b[)$ par croissance de f, on en déduit que $f(a) = \min f([a\,;b[)$.

De plus, d'après le théorème de la limite monotone, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \sup f([a\,;b[)$, donc $f([a\,;b[)$ est l'un des intervalles $\left[f(a)\,;\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right]$ ou $\left[f(a)\,;\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$.

Peut-on avoir $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) \in f([a\,;b[)$?

Il existerait dans ce cas un réel $x \in [a\,;b[$ pour lequel $f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$, et aussitôt f serait constante égale à $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ sur $[x\,;b[$, ce qui contredirait la STRICTE croissance de f.

Conclusion, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) \notin f([a\,;b[)$ et $f([a\,;b[) = \left[f(a)\,;\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$.

Les autres cas se traitent de la même façon et on a évidemment un énoncé analogue lorsque f est strictement décroissante.

ATTENTION Lorsque la monotonie n'est pas stricte, il se peut que les limites aux bornes exclues soit tout de même atteintes.

Théorème 10 (Monotonie + intervalle entraîne continuité) : Soit $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction **monotone** sur un **intervalle** I.

La fonction f est continue sur I si, et seulement si $f(\mathrm{I})$ est un intervalle.

Preuve : Le sens direct est une conséquence du théorème (7) des valeurs intermédiaires.

Montrons la contraposée de la réciproque. Supposons f non continue sur I et montrons que $f(\mathrm{I})$ n'est pas un intervalle.

Comme f n'est pas continue sur I, il existe $x_0 \in \mathrm{I}$ où f n'est pas continue. Supposons que $x_0 \in \mathring{\mathrm{I}}$ i.e. que x_0 n'est pas une borne de I.

Sans perte de généralités, on peut supposer f croissante. On a donc $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) < f(x_0)$ ou $f(x_0) < \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

Remarque : Si x_0 est la borne supérieure de I seule la première inégalité peut être vraie et seulement la seconde si x_0 est la borne inférieure de I. On peut donc supposer que $x_0 \in \mathring{\mathrm{I}}$ sans perdre en généralité.

Supposons, par exemple, que $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) < f(x_0)$. En particulier, x_0 n'est pas la borne inférieure de I.

1. $\left] \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \,;\, f(x_0) \right[\cap f(\mathrm{I})$ est nécessairement vide.

   En effet, si $x \in \mathrm{I}$ est tel que $x < x_0$, alors $f(x) \leqslant \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ et si $x \geqslant x_0$, alors $f(x) \geqslant f(x_0)$.

   Donc, dans tous les cas, $x \in \mathrm{I} \implies f(x) \notin \left] \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \,;\, f(x_0) \right[$.

   On a bien montré que $\left] \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \,;\, f(x_0) \right[\cap f(\mathrm{I}) = \varnothing$.

2. Montrons enfin que $f(\mathrm{I})$ n'est pas un intervalle.

   Soit $x_1 \in \mathrm{I}$ avec $x_1 < x_0$ (ce qui est possible car x_0 n'est pas la borne inférieure de I). On a :

   $$f(x_1) < \lim_{x \to x_0^-} f(x) < f(x_0).$$

   Si $f(\mathrm{I})$ était un intervalle, alors on aurait :

   $$]f(x_1)\,;\, f(x_0[\subset f(\mathrm{I}) \quad \text{et donc} \quad \left] \lim_{x \to x_0^-} f(x) \,;\, f(x_0) \right[\subset f(\mathrm{I}).$$

   Ce qui n'est pas possible : $f(\mathrm{I})$ n'est donc pas un intervalle ce qui termine la démonstration.

Remarques :

— Ce théorème énonce une réciproque du théorème théorème (7) des valeurs intermédiaires, mais elle n'est valable que pour les fonctions monotones.

— Ce résultat d'apparence anodine est à employer prudemment. La continuité, même vue globalement, est une notion locale et le fait que l'ensemble-image soit un intervalle ne garantit aucunement que la fonction est continue sur son intervalle de définition.

À titre d'exemple, on pourra considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

L'ensemble-image $f(\mathbb{R})$ est un intervalle puisqu'égal à $\mathbb{R}$. Pourtant, la fonction f n'est pas continue en 0, donc n'est pas continue sur son intervalle de définition.

III.2 Continuité et bijectivité

Nous avons déjà rencontré ce théorème dans le premier chapitre d'analyse en version light. Nous sommes enfin prêts pour la version intégrale avec démonstration.

Théorème 11 (Théorème de la bijection) : Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$, une fonction continue sur I.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est strictement monotone sur I.
(ii) f est injective sur I, donc bijective de I sur $f(\mathrm{I})$.

Dans ces conditions, f^{-1} est continue et strictement monotone de même sens de variation que f sur $f(\mathrm{I})$.

Remarque : Étant donné que les graphes de f et f^{-1} sont symétriques. Si le graphe de f peut être tracé sans lever le crayon, comment le graphe de f^{-1} ne le pourrait-il pas ?

Preuve :

1 Montrons tout d'abord l'équivalence (i) $\iff$ (ii) :

- Nous savons déjà que (i) $\implies$ (ii) sans hypothèse de continuité. En effet, f est évidemment surjective sur $f(\mathrm{I})$.

  Ainsi, tout élément de $f(\mathrm{I})$ est l'image d'un unique élément de I i.e. f est bijective.
- Pour montrer l'implication réciproque (ii) $\implies$ (i), supposons le contraire i.e. f n'est pas monotone :
  - ◇ f n'est pas strictement croissante i.e. il existe deux éléments de I tels que $x < y$ et $f(x) \leqslant f(y)$,
    ET
  - ◇ f n'est pas strictement décroissante i.e. il existe deux éléments de I tels que $x' < y'$ et $f(x') \geqslant f(y')$.

  Comme f est injective, les inégalités ne peuvent qu'être strictes.

  On pose alors $\forall\, t \in [0\,;1]$, $g(t) = f(x + t(x - x')) - f(y + t(y - y'))$ et on a :

  a. g est définie et continue sur $[0\,;1]$.
  b. $g(0) = f(x) - f(y) < 0$.
  c. $g(1) = f(x') - f(y') > 0$.

  D'après le théorème (7) des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0\,;1[$ tel que :

$$g(c) = 0 \iff f(x + c(x' - x)) = f(y + c(y' - y))$$

Or, f est injective,

$$\begin{aligned}&\iff x + c(x'-x) = y + c(y'-y)\\ &\iff \underbrace{(1-c)}_{>0}\underbrace{(x-y)}_{<0} = \underbrace{c}_{>0}\underbrace{(y'-x')}_{>0}.\end{aligned}$$

Ceci est impossible donc f est strictement monotone.

2 Sous ces conditions montrons que f^{-1} est strictement monotone et supposons, par exemple, que f est strictement croissante.

Soit $x = f(a)$ et $y = f(b)$ élément de $f(\mathrm{I})$ tels que $x < y$.

Comme f est croissante, on ne peut qu'avoir $a \leqslant b$ et même $a < b$ par injectivité et $x \neq y$ sinon, f croissante, entraînerait le contraire de $x < y$.

Donc f^{-1} est strictement croissante dans ce cas, strictement monotone dans tous les cas et de même monotonie que f.

3 Montrons enfin que f^{-1} est continue. C'est une promenade de santé maintenant que le théorème (10) a été démontré.

En effet, f^{-1} est donc une fonction (strictement) monotone entre $f(\mathrm{I})$ et I qui sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. Elle est donc continue.

Remarques :

— La continuité de f n'est pas nécessaire pour démontrer la continuité de f^{-1}.
En effet, on pourrait faire appel au lemme suivant :

> **Lemme 1 :** Toute surjection monotone d'une partie de $\mathbb{R}$ sur un intervalle est continue.

Preuve : Soient X une partie de $\mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $g : \mathrm{X} \longmapsto \mathrm{I}$ une surjection croissante (si g est décroissante, considérer $-g$) et non constante (car ce cas est immédiat).

Posons $x_0 \in \mathrm{X}$, $y = g(x_0)$ et montrons que g est continue en x_0.

- Si $y \in \mathring{\mathrm{I}}$, on considère $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $[y-\varepsilon\,;y+\varepsilon] \subset \mathrm{I}$ alors, en posant $x_- = g^{-1}(y-\varepsilon)$ et $x_+ = g^{-1}(y+\varepsilon)$, on obtient :
$$x_- < x_0 < x_+ \quad \text{et} \quad g\left([x_-\,;x_+] \cap \mathrm{X}\right) \subset [y-\varepsilon\,;y+\varepsilon].$$
- Si $y = \sup(\mathrm{I})$, on trouve de même, pour tout $\varepsilon > 0$, un $x_- < x$ tel que $g\left([x_-\,;+\infty[\cap \mathrm{X}\right) \subset [y-\varepsilon\,;y]$.
- Si $y = \inf(\mathrm{I})$, on trouve de même, pour tout $\varepsilon > 0$, un $x_+ > x$ tel que $g\left(]-\infty\,;x_+] \cap \mathrm{X}\right) \subset [y\,;y+\varepsilon]$.

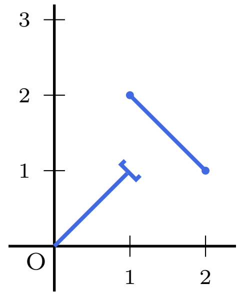
Dans les trois cas, on a démontré que g est continue en x.

En particulier, toute bijection monotone entre intervalles réels est continue. C'est le cas de f^{-1}.

— Dans la même idée, la continuité de f n'est pas nécessaire pour montrer « *(i)* f strictement monotone $\implies$ *(ii)* f est injective ».

Une fonction strictement monotone est toujours injective, qu'elle soit continue ou non. Par contre il est essentiel de supposer que f est continue sur un intervalle pour démontrer la réciproque : si on enlève la contrainte de la continuité de la fonction, on peut trouver des fonctions injectives et non monotones comme, par exemple, la fonction f définie sur $[0\,;2]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0\,;1[\\ 3-x & \text{si } x \in [1\,;2] \end{cases}$$



Définition 3 (Homéomorphisme) : On appelle *homéomorphisme* toute bijection continue entre deux espaces topologiques dont la bijection réciproque est continue.

Le théorème (11) affirme donc que toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I est un homéomorphisme.

ATTENTION

- Il existe des injections non strictement monotones.
- Il existe des fonctions bijectives mais non monotones. Elles ne sont alors pas continues
- Il existe des fonctions bijectives et continues, dont la bijection réciproque n'est pas continue.

  On vient de voir que ce n'est jamais le cas lorsque f est monotone sur un intervalle I.

Exemple 8 : En début d'année, l'existence des fonctions arcsin, arccos et arctan a découlé du TVI strictement monotone et leur continuité du théorème de continuité d'une réciproque.

La preuve de continuité de f^{-1} peut être adaptée à la recherche des limites aux bornes d'une réciproque.

Corollaire III.1 : Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ continue et strictement monotone.
Alors f^{-1} admet des limites aux bornes de $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ données par :

$$\lim_{y\to\sup(\mathrm{J})} f^{-1}(y) = \begin{cases} \sup(\mathrm{I}) & \text{si } f \text{ croissante} \\ \inf(\mathrm{I}) & \text{si } f \text{ décroissante} \end{cases}$$

On a un résultat analogue pour la limite de f^{-1} en $\inf(\mathrm{J})$.

Preuve : Le TVI strictement monotone montre que f est bijective de I sur $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$.
Supposons, par exemple, que f et f^{-1} sont strictement croissantes. D'après le théorème de la limite monotone, la limite $\lim\limits_{y\to\sup(\mathrm{J})} f^{-1}(y)$ existe. Notons-la L.
Or, $\lim\limits_{x\to\sup(\mathrm{I})} f(x) = \sup(\mathrm{J})$.
D'après les théorèmes sur les limites de composée et la continuité de f^{-1}, on en déduit donc :

$$\lim_{x\to\sup(\mathrm{I})} f^{-1}\big(f(x)\big) = \lim_{y\to\sup(\mathrm{J})} f^{-1}(y) = \mathrm{L}.$$

Or, $\lim\limits_{x \to \sup(\mathrm{I})} f^{-1}\big(f(x)\big) = \lim\limits_{x \to \sup(\mathrm{I})} x = \sup(\mathrm{I})$.

Conclusion, $\mathrm{L} = \sup(\mathrm{I})$.

On retrouve la continuité de exp, arctan, arccos, arcsin sur leur intervalle de définition respectif avec leurs limites au bornes.

Par exemple, $\arctan(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \sup\left(\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\right) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 10 :

1. Montrer que $f: \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \dfrac{x}{1-x^2} \end{array}$ est bijective.
2. Exprimer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

IV Fonctions à valeurs complexes

On rappelle qu'il n'est question ici que de fonctions $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$, où $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

Les fonctions dont la variable est elle-même complexe sont l'objet de tout un pan de l'analyse, appelée *analyse complexe*, utilisant des méthodes très différentes de celles étudiées dans ce chapitre et pas du tout à votre programme.

Rappel 2 (Limite) : La fonction f admet pour limite $\ell \in \mathbb{C}$ quand x tend vers $a \in \mathrm{I}$ si :

$$\forall\,\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\,\alpha \in \mathbb{R}_+^* \,/\, |x-a| \leqslant \alpha \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

C'est exactement la même définition que pour une fonction réelle, la seule toute petite différence étant que la valeur absolue en fin de définition s'est transformée en module.

— Les notions de limite à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, sont maintenues pour les fonctions à valeurs complexes.

— La caractérisation séquentielle de la limite est également maintenue, de même que les résultats sur les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse, à ceci près que les symboles $\pm\infty$ sont bannis.

En effet, on ne peut définir de limites infinies dans $\mathbb{C}$ de façon simple : si on calque la définition réelle, le module de f tendra vers $+\infty$ mais ça ne dit rien sur f elle-même dans la mesure où, dans $\mathbb{C}$, on peut se rapprocher de l'infini dans toutes les directions et, en particulier, parler de $+\infty$ et de $-\infty$ n'a évidemment aucun sens.

— Les grands théorèmes d'existence de limite – théorèmes d'encadrement, minoration, majoration et théorème de la limite monotone – n'ont pas de sens dans le cas complexe car ils utilisent de façon essentielle la *relation d'ordre* $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 12 (Continuité) : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

f est continue sur I si, et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

Comme pour les fonctions à valeurs réelles, les combinaisons linéaires, produits, quotients (de dénominateur non nul) et composées de fonctions continues sont des fonctions continues.

Exemples 9 : Les fonctions $t \longmapsto e^{it}$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{1+it}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Compte tenu de la définition, on retrouve des propriétés analogues au cas réel, **à une exception près**.

À retenir ! : Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1. On retrouve les mêmes théorèmes généraux, en particulier $\mathscr{C}^0(\mathrm{D}\,;\mathbb{R})$ est une $\mathbb{C}$-algèbre.
2. Si f est continue sur D, alors les fonctions $\overline{f}$ et $|f|$ aussi.
3. Si $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{C}$ est continue sur le segment $[a\,;b]$, alors f est bornée et atteint ses bornes *i.e.* il existe t_o, $t_1 \in [a\,;b]$ tels que :

$$|f(t_0)| = \max_{t\in[a;b]} |f(t)| \qquad \text{et} \qquad |f(t_1)| = \min_{t\in[a;b]} |f(t)|.$$

Preuve :

3. *En effet : la fonction $|f|$ est continue sur $[a\,;b]$ et à valeurs réelles. Elle répond donc aux exigences du théorème (8) des bornes atteintes.*

ATTENTION

Le théorème des valeurs intermédiaires n'est plus vrai.

La notion de comparaison entre $f(a)$ et $f(b)$ ne peut être adaptée.

Par exemple, la fonction $t \longmapsto e^{it}$ est continue sur $[0\,;2\pi]$, 0 est compris entre $f(\pi) = -1$ et $f(0) = 1$, mais $0 \notin f([0\,;2\pi])$ car f ne s'annule pas.

Remarque : Ici $f(\,[0\,;2\pi]\,)$ n'est pas un intervalle, mais un cercle !

Index