XV

Fonctions de la variable réelle CONTINUITÉ

Contenu

Dans tout ce chapitre, la lettre D qui nous servira d'ensemble de définition désignera cependant, sauf mention contraire, une partie quelconque de $\mathbb{R}$.

On notera par ailleurs $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Continuité

I.1 Fonction continue

Définition 1 (Fonction continue) : Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{D}$.

- On dit que f *est continue* a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f *est continue sur* D si elle est continue en tout point de D.

  On note $\mathscr{C}^0(\mathrm{D}\,;\mathbb{R})$ leur ensemble.

- On dit que f *est continue à gauche en* a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = f(a)$.
- On dit que f *est continue à droite en* a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = f(a)$.

f est continue en a si, et seulement si

- $\forall\, \mathrm{V}_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a)),\ \exists\, \mathrm{V}_{a,\mathrm{V}_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) \,/\, f\Big(\mathrm{V}_{a,\mathrm{V}_{f(a)}} \cap \mathrm{D}\Big) \subset \mathrm{V}_{f(a)}$.

ou

- $\forall\, \mathrm{V}_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a)),\ \exists\, \mathrm{V}_{a,\mathrm{V}_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) \,/\, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \in \mathrm{V}_{a,\mathrm{V}_{f(a)}} \implies f(x) \in \mathrm{V}_{f(a)}$.

  ce qui revient à écrire :
- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \forall\, x \in \mathrm{D},\ |x-a| < \alpha \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \in \left]a-\alpha\,; a+\alpha\right[\implies f(x) \in \left]f(a)-\varepsilon\,; f(a)+\varepsilon\right[$.

Interprétation graphique : Une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est définie sur cet intervalle et si sa courbe représentative se trace d'un « trait continu », sans lever le crayon.

ATTENTION

Pour pouvoir parler de continuité en a, il est nécessaire que f soit définie en a. Cela revient en fait à exiger seulement que la limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.

Cela n'a donc pas de sens de chercher si la fonction inverse est continue en 0. S'il faut lever le crayon pour tracer la courbe de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$, c'est simplement parce qu'elle n'est pas définie en 0.

Remarques :

— La continuité d'une fonction est une propriété locale. Cela aura de grandes conséquences.

— Une fonction continue en a y est bornée dans un voisinage de a.

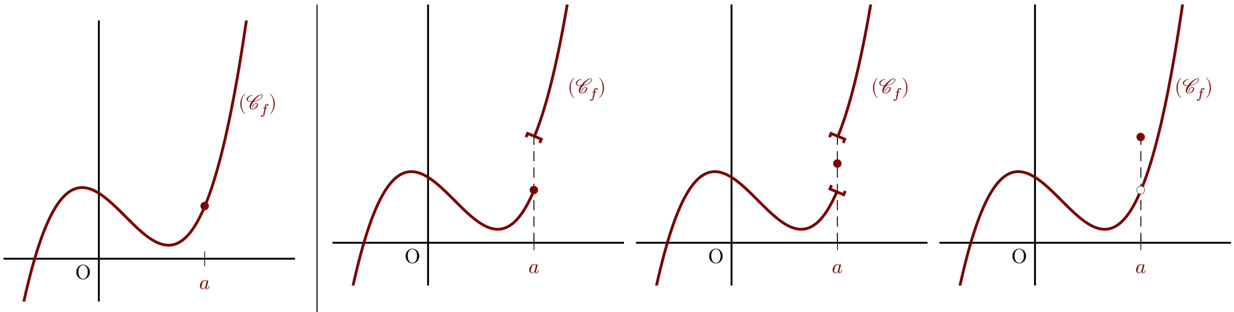
— f n'est pas continue en a si, et seulement si

$$\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \exists\, x_0(\alpha,\, \varepsilon) \in \mathrm{D},\ |x_0 - a| \leqslant \alpha \text{ et } |f(x_0) - f(a)| > \varepsilon. \tag{XV.1}$$

— f est continue à gauche en a si $f_{|\mathrm{D}\cap]-\infty;a[}$ est continue en a et continue à droite si $f_{|\mathrm{D}\cap]a;+\infty[}$ est continue en a.

Exemple 1 : La fonction valeur absolue $x \longmapsto |\cdot|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exemples 2 :



f est continue en a.

f n'est pas continue en a.

Figure XV.1 – Continuité et discontinuité en un point.

- Toute fonction constante sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : x \longmapsto x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \longmapsto \lfloor \cdot \rfloor$ est définie sur $\mathbb{R}$ mais discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$.

  Plus précisément, la fonction $x \longmapsto \lfloor \cdot \rfloor$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ mais n'est continue à gauche qu'en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

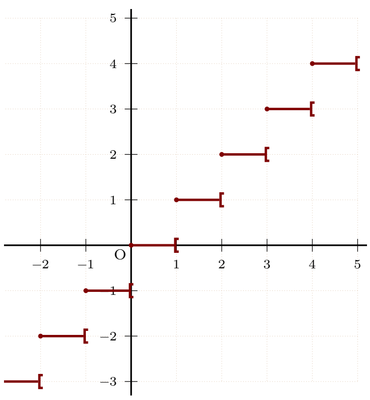


Figure XV.2 – $x \longmapsto \lfloor \cdot \rfloor$

Théorème I (Continuité à gauche et à droite) : Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction et $a \in \mathrm{D}$ un point au voisinage duquel f est définie à gauche et à droite.

f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a.

ATTENTION

Pour tout $x \in [0\,;1[$, $\lfloor x \rfloor = 0$ et la fonction $x \longmapsto 0$ est continue sur $[0\,;1[$, mais peut-on pour autant dire que la fonction $x \longmapsto \lfloor \cdot \rfloor$ est continue sur $[0\,;1[$?

Non ! Ces deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier et coïncident sur $[0\,;1[$, mais leur continuité en 0 dépend aussi de leur comportement au voisinage de 0 À GAUCHE *i.e.* à l'extérieur de $[0\,;1[$.

Alors que la restriction $x \longmapsto \lfloor \cdot \rfloor_{|[0;1[}$ est bien continue sur $[0\,;1[$ tout entier, la fonction $x \longmapsto \lfloor \cdot \rfloor$ ne l'est que sur $]0\,;1[$. En particulier, elle N'est PAS continue en 0.

Exercice 1 : Tracer le graphe de $f:\ \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

$$x \quad \begin{cases} ax+b & \text{si } x<0 \\ \sqrt{1+x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue en 0.

I.2 Stabilité algébrique

Proposition 2 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) : Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un ensemble D.

1. $|f|$ est continue sur D.
2. Toute combinaison linéaire $\lambda f + g$ de fonctions continues sur D est continue sur D.
3. Le produit $f \times g$ de deux fonctions continues sur D est continue sur D.
4. Si g ne s'annule pas sur D alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue sur D.
5. Si $f(\mathrm{D}) \subset \mathrm{E}$ et si g est continue sur E alors $g \circ f$ est continue sur D.

Remarques :

— On dit que $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre pour les opérations usuelles *i.e.* que $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires et produits.

— Si f et g sont continues sur I alors $\sup(f\,;g)$ et $\inf(f\,;g)$ le sont aussi.

Il suffit de remarquer que :

$$\sup(f\,;g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \quad \text{et} \quad \inf(f\,;g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}.$$

En particulier $f^+ = \sup(f\,;0)$ et $f^- = \inf(f\,;0)$ le sont.

Méthode 1 (Montrer qu'une fonction est continue) :
Avant de s'intéresser, si nécessaire, à des points locaux du domaine de définition D d'une fonction f, il suffira bien souvent de préciser la continuité de quelques fonctions usuelles sur un sous-ensemble D′ de D et d'invoquer les « théorèmes généraux » pour conclure à la continuité de f sur D′.
On étudiera alors la continuité et l'éventualité d'un prolongement en les points de $\mathrm{D} \setminus \mathrm{D}'$.

ATTENTION On prendra bien garde à préciser que les quotients ne s'annulent pas, que les expressions sous les racines sont positives, que celles dans les logarithmes strictement positives, celles dans les arcsin et arccos entre -1 et 1, ... et on précisera bien les domaines manipulés dans les composées.

Exemple 3 : La fonction $x \longmapsto \left(\ln\left(x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)\right)^2$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.
En effet,

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$) et la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ l'est sur $\mathbb{R}$, donc par composition $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

- La fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}^*$. Par somme, $x \longmapsto x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \longmapsto x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x \longmapsto \ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition $x \longmapsto \ln\left(x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$).
- Enfin, la fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. Le résultat découle donc d'une dernière composition.

Exercice 2 : Montrer que la fonction $x \longmapsto \arcsin\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple 4 (Fonction k-lipschitzienne) : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est *k-lipschitzienne de rapport $k > 0$* si pour tout $(x\,;y) \in \mathrm{I}^2$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|\,.$$

La fonction est dite *contractante* si $k < 1$.

Les fonctions lipschitziennes sont continues sur leur ensemble de définition.

Exercice 3 : Étudier la continuité des fonctions suivantes au point a :

1. $$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$
   en $a = 0$.

2. $$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si} \quad x = 2 \end{cases} \end{array}$$
   en $a = 2$.

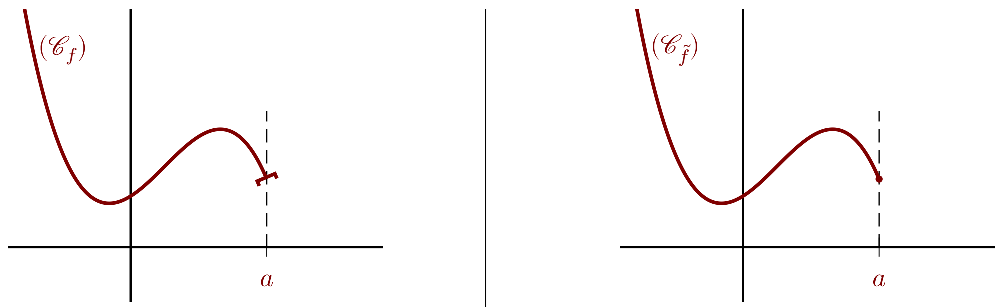
I.3 Prolongement par continuité

Définition 2 : Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur D et $a \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{D}$ adhérent à D.

On dit que f est *prolongeable par continuité* en a s'il existe une fonction $\tilde{f} : \mathrm{D} \cup \{a\} \longmapsto \mathbb{R}$ continue en a telle que :

$$\tilde{f}_{|\mathrm{D}} = f.$$

La fonction $\tilde{f}$ est appelée *prolongement par continuité* de f en a.



f n'est pas définie en a. $\tilde{f}$ est définie, continue en a et prolonge f en a.

Figure XV.3 – Prolongement d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition.

ATTENTION Dans la définition, il doit être clair que a n'appartient pas à D *i.e.* f n'est pas définie en a.

Les fonctions f et $\tilde{f}$ sont distinctes en toute rigueur car elles n'ont pas le même ensemble de définition, mais on choisit généralement de noter encore f le prolongement $\tilde{f}$ par souci de simplicité sans autre forme de procès.

Théorème 3 : Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur D et $a \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{D}$ adhérent à D.

f est prolongeable par continuité en a si, et seulement si f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en a.

Dans ce cas, l'unique prolongement par continuité de f en a est donné par :

$$\tilde{f} : \begin{array}{rcl} \mathrm{D} \cup \{a\} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in \mathrm{D} \\ \ell & \text{si} \quad x = a. \end{cases} \end{array}$$

Exemples 5 :

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \ln x$ admet un prolongement par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
- Les fonction f et g définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ admettent un prolongement par continuité en 0 en posant $f(0) = g(0) = 1$.
- Pour tout $\alpha > 0$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$ admet un prolongement par continuité en 0 en posant $0^\alpha = 0$.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

1. Montrer que f peut se prolonger en une fonction continue en 0.
2. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x) + 1$.

   En déduire que f peut se prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

I.4 Continuité et suites

Proposition 4 (Caractérisation séquentielle de la continuité) : Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction et $a \in \mathrm{D}$.

f est continue en a si, et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D, qui tend vers a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$.

En résumé, pour une fonction continue $\boxed{f\left(\lim_{n\to+\infty} \dots\right) = \lim_{n\to+\infty} f(\dots).}$

En pratique, ce théorème est plus souvent utilisé dans deux contextes bien précis :

— celui des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$:

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ET si f continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$.

— celui des fonctions discontinues :

Par la contraposée pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point a, il suffit de trouver deux suites qui convergent vers a mais telles que leur image converge soit pas soit vers deux limites différentes comme à l' exercice (5) .

Exercice 5 : Étudier la continuité en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

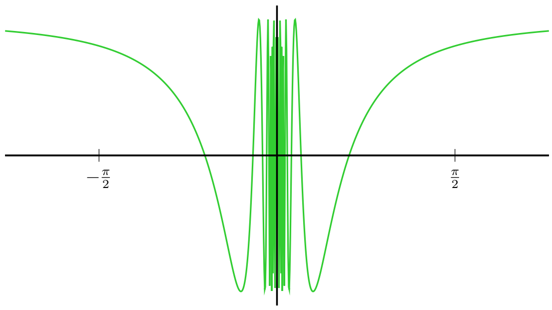


Figure XV.4 – $x \longmapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'est pas continue en 0.

Exemple 6 (Fonction continue sur $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$) :

Cet exemple a pour but de montrer que la notion de continuité en un point peut se révéler complexe.

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \text{ est rationnel sous sa forme irréductible}^{[1]}, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel.} \end{cases}$$

Montrons que f, ainsi construite, est continue en tout point irrationnel et discontinue ailleurs.

- Si x_0 est rationnel alors $f(x_0) = \dfrac{1}{q} \neq 0$ et, par densité de $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$, x_0 est limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'irrationnels.

  Comme $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = 0$, la fonction f ne peut être continue en x_0.
- Si x_0 est irrationnel, soit $\varepsilon > 0$. Il existe q entier positif tel que $\dfrac{1}{q}$ soit inférieur à ε.

  Posons alors $p = \lfloor x_0 q! \rfloor$, on a :

$$\frac{p}{q!} \leqslant x_0 < \frac{p+1}{q!} \quad i.e. \quad \mathrm{I} = \left]\frac{p}{q!}\,;\frac{p+1}{q!}\right[\in \mathcal{V}(x_0).$$

  Tout x de $\mathrm{I} = \left]\dfrac{p}{q!}\,;\dfrac{p+1}{q!}\right[$ vérifie :
  - si x est irrationnel alors $f(x) = 0$.
  - si $x = \dfrac{a}{b}$ est rationnel alors on a :

$$\frac{p}{q!} < \frac{a}{b} < \frac{p+1}{q!} \implies p < \frac{aq!}{b} < p+1$$

    Mais alors $\dfrac{aq!}{b}$, coincé strictement entre deux entiers, ne peut être entier.

    Si $|b| \leqslant q$ alors la fraction $\dfrac{aq!}{b}$ pourrait se simplifier par b et cela contredirait le fait que $\dfrac{aq!}{b} \notin \mathbb{Z}$.

    Conclusion, $|b| > q \implies |f(x)| = \dfrac{1}{|b|} < \dfrac{1}{q} < \varepsilon$.

  À ε donné strictement positif quelconque, on a donc trouvé un voisinage I de x_0 tel que l'image de tout x de ce voisinage appartienne au voisinage $]f(x_0) - \varepsilon\,; f(x_0) + \varepsilon[=] - \varepsilon\,; \varepsilon[$ de $f(x_0)$.

  C'est bien la définition de la continuité de f en x_0.

[1]. En particulier, $q \in \mathbb{N}^*$ est strictement positif.

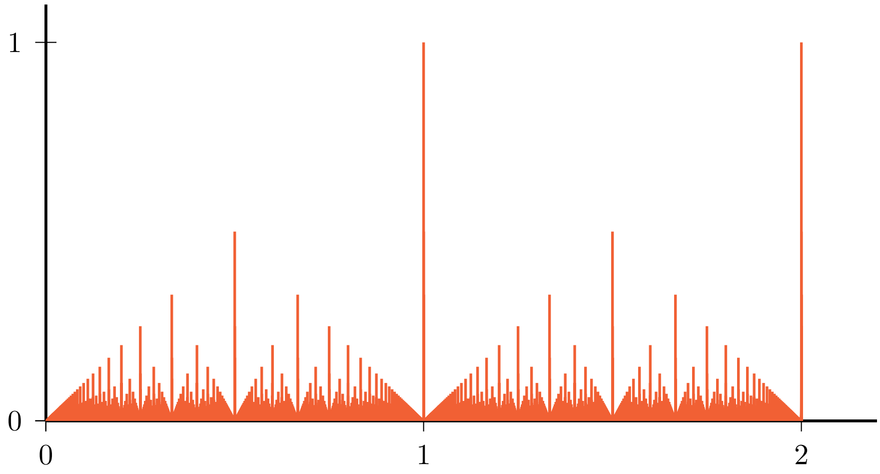


Figure XV.5 – Graphe de la fonction f, dite de Thomae, continue sur $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$.

II Théorèmes de continuité globale

ATTENTION

Les théorèmes de ce paragraphe ne concernent que les fonctions à valeurs réelles.

La continuité globale désigne la continuité sur un intervalle par opposition à la continuité locale en un point.

II.1 Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences

Théorème 5 (dit de Bolzano) : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors f s'annule au moins une fois sur $[a\,;b]$ *i.e.* $\exists c \in [a\,;b]\,,\ f(c) = 0$.

Exercice 6 : Montrer que l'équation $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$ admet au moins trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

En donner un encadrement à 10^{-1} de chacune d'elles.

Corollaire 5.1 : Tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.

Théorème 6 (Théorème des valeurs intermédiaires) :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Plus précisément, soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$ et $f \in \mathscr{C}^0\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right)$.

Tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède un antécédent par f dans $[a\,;b]$.

Pour tout réel k entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = k$.

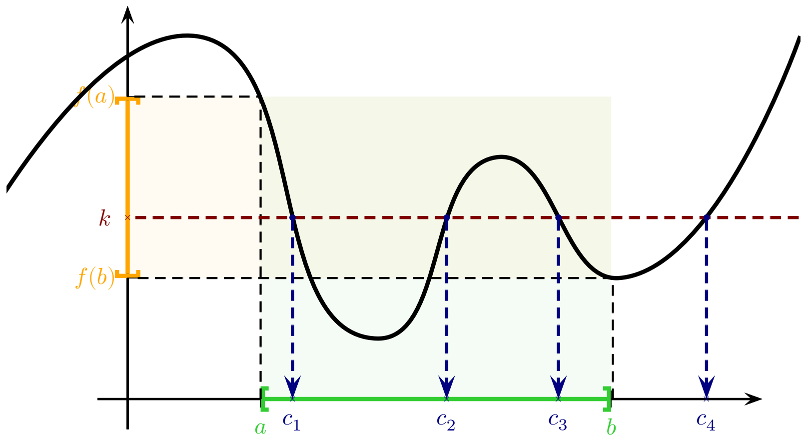


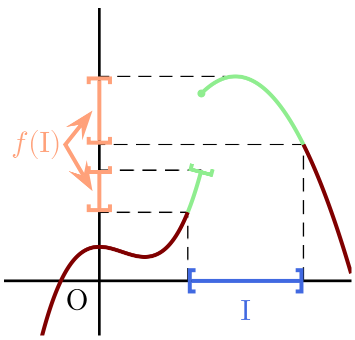
Figure XV.6 – Une fonction continue sur un intervalle de ℝ prend toutes les valeurs de celui-ci.

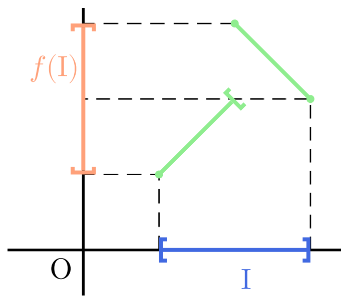
ATTENTION

Si I est un INTERVALLE et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, cette version nouvelle du TVI affirme que $f(\mathrm{I})$ est également un INTERVALLE, mais pas que I et $f(\mathrm{I})$ sont de même nature.

Il se peut que I soit ouvert et $f(\mathrm{I})$ un segment, ou bien que I soit semi-ouvert et $f(\mathrm{I})$ ouvert, ...

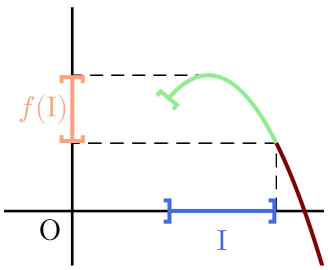
Comme le montrera le théorème (7), ce sera, par contre, bien le cas lorsque l'intervalle est un segment *i.e.* un intervalle de la forme $[a\,;b]$.

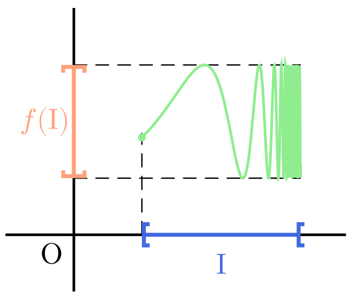




I est un intervalle, $f(\mathrm{I})$ n'est pas un intervalle. I et $f(\mathrm{I})$ sont des intervalles (des segments).

f n'est pas continue sur I.





I est ouvert, $f(\mathrm{I})$ est fermé. I est semi-ouvert, $f(\mathrm{I})$ est fermé.

f est continue sur I.

Figure XV.7 – Image d'un intervalle par une fonction

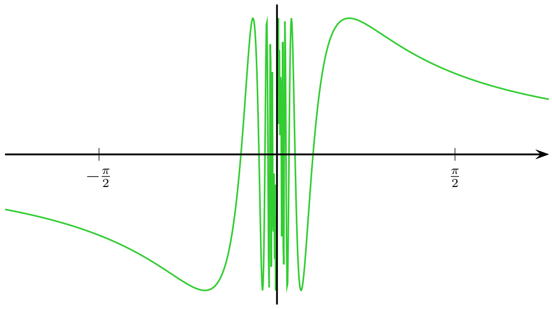


Figure XV.8 – $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ne peut être prolongeable par continuité en 0 mais vérifie la propriété du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 7 : Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

Démontrer que f a un point fixe, et un seul lorsqu'elle décroît.

Exercice 8 : Un marcheur parcourt douze kilomètres en une heure.

Démontrer qu'il existe une demi-heure pendant laquelle il parcourt exactement six kilomètres.

II.2 Image d'un segment

Rappel I (Segment) : Soient $a < b$ des réels. On appelle *segment* l'ensemble noté $[a\,;b]$ défini par :

$$[a\,;b] = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leqslant x \leqslant b\right\}.$$

En particulier, les segments de $\mathbb{R}$ sont des fermés bornés de $\mathbb{R}$.

Théorème 7 (Théorème des bornes atteintes [2]) : Toute fonction continue sur un SEGMENT y est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists\, c, d \in [a\,;b] \quad \text{tels que} \quad f(c) = \min_{x\in[a;b]} f(x) \quad \text{et} \quad f(d) = \max_{x\in[a;b]} f(x).$$

Moralité : Même si nous avons vu que la continuité ne préservait pas la nature des intervalles en général, une chose est sûre, un segment est toujours transformé en un segment.

En effet, si nous savions déjà que l'image de $[a\,;b]$ était un intervalle, nous savons désormais que les bornes sont atteintes *i.e.*

$$f(\,[a\,;b]\,) = [m\,;\mathrm{M}] \quad \text{où} \quad m = \min_{x\in[a;b]} f(x) = f(c) \quad \text{et} \quad \mathrm{M} = \max_{x\in[a;b]} f(x) = f(d).$$

ou, de manière équivalente :

L'image d'un SEGMENT par une fonction CONTINUE est un SEGMENT.

ATTENTION Sur un intervalle borné qui n'est pas un segment, une fonction continue n'a aucune raison d'être bornée. Pensez à la fonction tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

[2]. La démonstration de ce théorème est admise en PTSI.

Exemples 7 : Le fait que $[a\,;b]$ soit un intervalle fermé borné est très important. Voici quelques exemples :

1. $x \longmapsto x$ définie sur $[0\,;+\infty[$ n'est pas majorée.
2. $x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$ définie sur $[0\,;+\infty[$ est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.
3. $x \longmapsto 1-x$ définie sur $]0\,;1]$ est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.
4. $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $]0\,;1]$ n'est pas majorée.

Exercice 9 : Montrer qu'une fonction continue et strictement positive sur un segment y est minorée par un réel strictement positif.

Corollaire 7.1 : Toute fonction continue périodique définie sur $\mathbb{R}$ tout entier est bornée.

III Continuité des fonctions monotones

III.1 Lien entre monotonie et continuité

Théorème 8 (TVI appliqué aux fonctions strictement monotones) : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Toute fonction continue et strictement croissante sur I est bijective de I sur $f(\mathrm{I})$ *i.e.* quels que soient $a<b$ deux réels de I, tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un unique antécédent par f dans $[a\,;b]$.

De plus, $f(\mathrm{I})$ est un intervalle et, pour $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$, suivant le sens de monotonie de f,

- si $\mathrm{I}=[a\,;b]$ alors $f(\mathrm{I})=[f(a)\,;f(b)]$ ou $f(\mathrm{I})=[f(b)\,;f(a)]$,
- si $\mathrm{I}=[a\,;b[$ alors $f(\mathrm{I})=\left[f(a)\,;\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$ ou $f(\mathrm{I})=\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\,;f(a)\right]$,
- si $\mathrm{I}=]a\,;b]$ alors $f(\mathrm{I})=\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\,;f(b)\right]$ ou $f(\mathrm{I})=\left[f(b)\,;\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$,
- si $\mathrm{I}=]a\,;b[$ alors $f(\mathrm{I})=\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\,;\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$ ou $f(\mathrm{I})=\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\,;\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$ respectivement.

En particulier, l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone est un intervalle de même nature.

ATTENTION Lorsque la monotonie n'est pas stricte, il se peut que les limites aux bornes exclues soit tout de même atteintes.

Théorème 9 (Monotonie + intervalle entraîne continuité) : Soit $f:\mathrm{I}\longmapsto\mathbb{R}$ une fonction **monotone** sur un **intervalle** I.

La fonction f est continue sur I si, et seulement si $f(\mathrm{I})$ est un intervalle.

III.2 Continuité et bijectivité

Théorème 10 (Théorème de la Bijection) : Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$, une fonction continue sur I.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est strictement monotone sur I.
(ii) f est injective sur I, donc bijective de I sur $f(\mathrm{I})$.

Dans ces conditions, f^{-1} est continue et strictement monotone de même sens de variation que f sur $f(\mathrm{I})$.

Remarque : Étant donné que les graphes de f et f^{-1} sont symétriques. Si le graphe de f peut être tracé sans lever le crayon, comment le graphe de f^{-1} ne le pourrait-il pas ?

Définition 3 (Homéomorphisme) : On appelle *homéomorphisme* toute bijection continue entre deux espaces topologiques dont la bijection réciproque est continue.

Le théorème (10) affirme donc que toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I est un homéomorphisme.

ATTENTION

— Il existe des injections non strictement monotones.
— Il existe des fonctions bijectives mais non monotones. Elles ne sont alors pas continues
— Il existe des fonctions bijectives et continues, dont la bijection réciproque n'est pas continue.

On vient de voir que ce n'est jamais le cas lorsque f est monotone sur un intervalle I.

Exemple 8 : En début d'année, l'existence des fonctions arcsin, arccos et arctan a découlé du TVI strictement monotone et leur continuité du théorème de continuité d'une réciproque.

La preuve de continuité de f^{-1} peut être adaptée à la recherche des limites aux bornes d'une réciproque.

Corollaire 10.1 : Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ continue et strictement monotone.

Alors f^{-1} admet des limites aux bornes de $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ données par :

$$\lim_{y \to \sup(\mathrm{J})} f^{-1}(y) = \begin{cases} \sup(\mathrm{I}) & \text{si } f \text{ croissante} \\ \inf(\mathrm{I}) & \text{si } f \text{ décroissante} \end{cases}$$

On a un résultat analogue pour la limite de f^{-1} en $\inf(\mathrm{J})$.

On retrouve la continuité de exp, arctan, arccos, arcsin sur leur intervalle de définition respectif avec leurs limites au bornes.

Par exemple, $\arctan(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \sup\left(\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\right) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 10 :

1. Montrer que $f: \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \dfrac{x}{1-x^2} \end{array}$ est bijective.

2. Exprimer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

IV FONCTIONS À VALEURS COMPLEXES

Rappel 2 (Limite) : La fonction f admet pour limite $\ell \in \mathbb{C}$ quand x tend vers $a \in \mathrm{I}$ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \,/\, |x-a| \leqslant \alpha \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

C'est exactement la même définition que pour une fonction réelle, la seule toute petite différence étant que la valeur absolue en fin de définition s'est transformée en module.

— Les notions de limite à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, sont maintenues pour les fonctions à valeurs complexes.
— La caractérisation séquentielle de la limite est également maintenue, de même que les résultats sur les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse, à ceci près que les symboles $\pm\infty$ sont bannis.
— Les grands théorèmes d'existence de limite – théorèmes d'encadrement, minoration, majoration et théorème de la limite monotone – n'ont pas de sens dans le cas complexe car ils utilisent de façon essentielle la *relation d'ordre* $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 11 (Continuité) : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

f est continue sur I si, et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

Comme pour les fonctions à valeurs réelles, les combinaisons linéaires, produits, quotients (de dénominateur non nul) et composées de fonctions continues sont des fonctions continues.

Exemples 9 : Les fonctions $t \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{i}\,t}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Compte tenu de la définition, on retrouve des propriétés analogues au cas réel, **à une exception près**.

À retenir 1 : Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1. On retrouve les mêmes théorèmes généraux, en particulier $\mathscr{C}^0(\mathrm{D}\,;\mathbb{R})$ est une $\mathbb{C}$-algèbre.
2. Si f est continue sur D, alors les fonctions $\overline{f}$ et $|f|$ aussi.
3. Si $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{C}$ est continue sur le segment $[a\,;b]$, alors f est bornée et atteint ses bornes *i.e.* il existe t_o, $t_1 \in [a\,;b]$ tels que :

$$|f(t_0)| = \max_{t\in[a;b]} |f(t)| \qquad \text{et} \qquad |f(t_1)| = \min_{t\in[a;b]} |f(t)|.$$

ATTENTION

Le théorème des valeurs intermédiaires n'est plus vrai.

La notion de comparaison entre $f(a)$ et $f(b)$ ne peut être adaptée.

Par exemple, la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$ est continue sur $[0\,;2\pi]$, 0 est compris entre $f(\pi)=-1$ et $f(0)=1$, mais $0 \notin f([0\,;2\pi])$ car f ne s'annule pas.

Remarque : Ici $f(\,[0\,;2\pi]\,)$ n'est pas un intervalle, mais un cercle !