Fonctions de la variable réelle – LIMITES

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 14

Sommaire I

La notion de limite est un concept central en analyse. Elle intervient dès que l'on étudie les suites ou les fonctions. Elle est indispensable pour définir la dérivée ou la continuité. Plus tard, la limite se mue en topologie et se fait plus générale, plus abstraite.

Dire qu'une quantité « admet une limite » est quelque chose de très intuitif. Tellement intuitif que les mathématiciens n'avaient pas ressenti pendant plusieurs siècles le besoin de définir précisément ce dont il s'agissait.

Ce n'est qu'au XIX$^{\text{ème}}$siècle que Weierstrass, à la suite de travaux d'Euler et des siens sur des fonctions continues nulle part dérivables, en donne une définition correcte.

Avant de passer à des considérations plus terre à terre, voici comment le célèbre mathématicien du XX$^{\text{ème}}$ siècle Ian Stewart [1] voit la définition : « f admet ℓ comme limite en a » :

« C'est un peu un jeu … Le joueur Epsilon indique quel écart maximum il accepte entre $f(x)$ et ℓ (c'est-à-dire qu'il impose $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est choisi par lui).

Le joueur Delta essaie de faire ce qu'il faut pour le satisfaire (c'est-à-dire qu'il essaie de trouver $\delta > 0$ tel que, si l'écart entre x et a est inférieur à δ, alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$).

Si, quel que soit le choix d'Epsilon, le joueur Delta a toujours une stratégie gagnante, alors $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a ».

[1]. Ian Stewart FRS, né en **1945** en Angleterre, est professeur de mathématiques à l'université de Warwick au Royaume-Uni. Il a publié plus de 140 publications scientifiques.

Dans tout ce chapitre, on considère une fonction définie sur un sous-ensemble quelconque D de $\mathbb{R}$:

$$f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}.$$

I. Limites

Définition 1 (Point intérieur/adhérent à une partie de $\mathbb{R}$) :

(Hors-Programme)

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Point intérieur : Soit $x \in \mathbb{R}$.

On dit que x est intérieur à A si A contient un voisinage de x :

$$\exists \, \mathrm{V}_x \in \mathcal{V}(x), \mathrm{V}_x \subset \mathrm{A}.$$

On note $\mathring{\mathrm{A}}$ leur ensemble.

Définition 1 (Point intérieur/adhérent à une partie de $\mathbb{R}$) :

(Hors-Programme)

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Point intérieur : Soit $x \in \mathbb{R}$.

On dit que x est intérieur à A si A contient un voisinage de x :

$$\exists\, V_x \in \mathcal{V}(x), V_x \subset A.$$

On note $\mathring{A}$ leur ensemble.

Point adhérent : Soit $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que x est adhérent à A si A rencontre tout voisinage de x :

$$\forall\ V_x \in \mathcal{V}(x),\ A \cap V_x \neq \varnothing.$$

On note $\overline{A}$ leur ensemble.

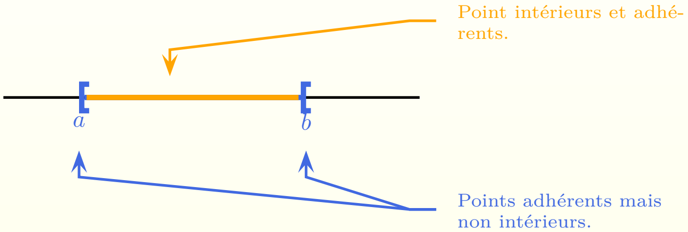


Figure 1 – Points intérieurs et adhérents à un intervalle $[a\,;b[$.

I. Limites

1. Point adhérent

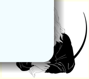
Exemples 1 :

- 1 est adhérent à $[0\,;1[$ et $+\infty$ est adhérent à $\mathbb{R}_+^*$.

Exemples 1 :

- 1 est adhérent à $[0\,;1[$ et $+\infty$ est adhérent à $\mathbb{R}_+^*$.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Alors $\overset{\circ}{\overbrace{[a\,;b[}} =]a\,;b[$ et $\overline{[a\,;b[} = [a\,;b]$.
  D'une manière générale, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $\overline{\mathrm{I}}$ est l'intervalle fermé correspondant dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en incluant les bornes et $\overset{\circ}{\mathrm{I}}$ l'intervalle ouvert excluant les bornes.

I	$\overset{\circ}{\mathrm{I}}$	$\overline{\mathrm{I}}$
$]1\,;2] \cup [3\,;4]$	$]1\,;2[\cup]3\,;4[$	$[1\,;2] \cup [3\,;4]$
$]1\,;+\infty[$	$]1\,;+\infty[$	$[1\,;+\infty]$
$]-\infty\,;2[$	$]-\infty\,;2[$	$[-\infty\,;2]$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\overline{\mathbb{R}}$



Exemples 1 :

- Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$. Alors,
  - a et b sont adhérents à $[a\,;b[$.
  - $\forall\, x \in \mathbb{R}$ tel que $a < x < b$ est à la fois intérieur et adhérent à $[a\,;b[$.

Il existe une caractérisation des points adhérents fort pratique.

Proposition 1 (Caractérisation séquentielle) :

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

x est adhérent à A si, et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.

Il existe une caractérisation des points adhérents fort pratique.

Proposition I (Caractérisation séquentielle) :

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

x est adhérent à A si, et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.

Corollaire I.1 :

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

$$\sup(\mathrm{A}) \in \overline{\mathrm{A}} \qquad \text{et} \qquad \inf(\mathrm{A}) \in \overline{\mathrm{A}}.$$

Il existe une caractérisation des points adhérents fort pratique.

Proposition I (Caractérisation séquentielle) :

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

x est adhérent à A si, et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.

Corollaire I.1 :

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

$$\sup(\mathrm{A}) \in \overline{\mathrm{A}} \qquad \text{et} \qquad \inf(\mathrm{A}) \in \overline{\mathrm{A}}.$$

En particulier, on pourra toujours trouver une suite d'éléments de A convergeant vers $\sup(\mathrm{A})$. De même pour $\inf(\mathrm{A})$.

Définition 2 (Définition topologique des limites) :

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f admet une limite b lorsque x tend vers a si, et seulement si

$$\forall\ \mathrm{V}_b \in \mathcal{V}(b),\ \exists\, \mathrm{U}_a \in \mathcal{V}(a)\ /\ \forall\, x \in \mathrm{U}_a \cap \mathrm{D} \implies f(x) \in \mathrm{V}_b.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Définition 2 (Définition topologique des limites) :

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f admet une limite b lorsque x tend vers a si, et seulement si

$$\forall \ \mathrm{V}_b \in \mathcal{V}(b), \exists \, \mathrm{U}_a \in \mathcal{V}(a) \, / \, \forall \, x \in \mathrm{U}_a \cap \mathrm{D} \implies f(x) \in \mathrm{V}_b.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

On pourra également mélanger les points de vue. Ainsi, la définition (2) s'écrira aussi de manière équivalente :

- $\forall \, \mathrm{V} \in \mathcal{V}(b), \exists \, \alpha(\mathrm{V}) \in \mathbb{R}_+^*, \forall \, x \in \mathrm{D}, \, |x - a| < \alpha \implies f(x) \in \mathrm{V}.$
- $\forall \, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \, \mathrm{U} \in \mathcal{V}(a), \forall \, x \in \mathrm{D}, \, x \in \mathrm{U} \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$

Définition 2 (Définition topologique des limites) :

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f admet une limite b lorsque x tend vers a si, et seulement si

$$\forall\, \mathrm{V}_b \in \mathcal{V}(b),\, \exists\, \mathrm{U}_a \in \mathcal{V}(a) \,/\, \forall\, x \in \mathrm{U}_a \cap \mathrm{D} \implies f(x) \in \mathrm{V}_b.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

On pourra également mélanger les points de vue. Ainsi, la définition (2) s'écrira aussi de manière équivalente :

- $\forall\, \mathrm{V} \in \mathcal{V}(b),\, \exists\, \alpha(\mathrm{V}) \in \mathbb{R}_+^*,\, \forall\, x \in \mathrm{D},\, |x-a| < \alpha \implies f(x) \in \mathrm{V}.$
- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\, \exists\, \mathrm{U} \in \mathcal{V}(a),\, \forall\, x \in \mathrm{D},\, x \in \mathrm{U} \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$

Remarque : Les inégalités sont indifféremment strictes ou larges pour définir des voisinages ouverts ou fermés excepté $\varepsilon > 0$.

Le programme demande d'utiliser des inégalités larges ce que j'essaierai.

Proposition 2 (Limites en $+\infty$) :

Soient D tel que $+\infty \in \overline{\mathrm{D}}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \geqslant \alpha \implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$

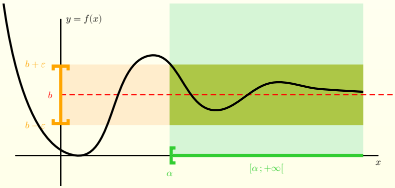


Figure 2 – Limite finie en l'infini.

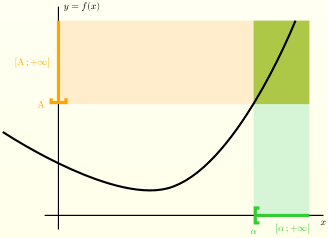


Figure 3 – Limite infinie à l'infini.

Proposition 2 (Limites en $+\infty$) :

Soient D tel que $+\infty \in \overline{\mathrm{D}}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \geqslant \alpha \implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, \alpha(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \geqslant \alpha \implies f(x) \geqslant \mathrm{A}.$

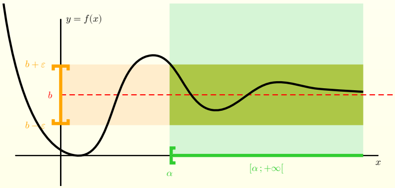


Figure 2 – Limite finie en l'infini.

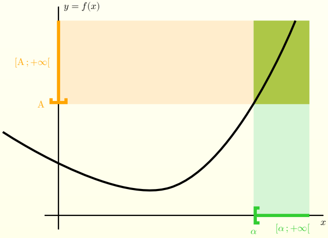


Figure 3 – Limite infinie à l'infini.

Proposition 2 (Limites en $+\infty$) :

Soient D tel que $+\infty \in \overline{\mathrm{D}}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \geqslant \alpha \implies |f(x)-b| \leqslant \varepsilon.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, \alpha(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \geqslant \alpha \implies f(x) \geqslant \mathrm{A}.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff \forall\, \mathrm{B} \in \mathbb{R}, \exists\, \alpha(\mathrm{B}) \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \geqslant \alpha \implies f(x) \leqslant \mathrm{B}.$

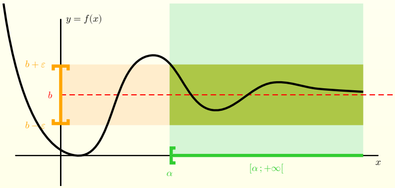


Figure 2 – Limite finie en l'infini.

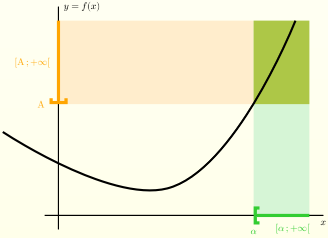


Figure 3 – Limite infinie à l'infini.

Décortiquons l'expression dans le cas d'une limite finie :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \in [\alpha\,;+\infty[\ \implies\ |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$$

- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$: « Quelle que soit la marge d'erreur ε qu'on se donne, aussi petite soit-elle ... ».

Décortiquons l'expression dans le cas d'une limite finie :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \in [\alpha\,;+\infty[\implies |f(x)-b| \leqslant \varepsilon.$$

- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$: « Quelle que soit la marge d'erreur ε qu'on se donne, aussi petite soit-elle … ».
- $\exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}$: « …il existe un seuil α … ».

Décortiquons l'expression dans le cas d'une limite finie :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \in [\alpha\,;+\infty[\implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$$

- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$: « Quelle que soit la marge d'erreur ε qu'on se donne, aussi petite soit-elle … ».
- $\exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}$: « …il existe un seuil α … ».
- $\forall\, x \in \mathrm{D}, : x \in [\alpha\,;+\infty[$ … : « …tel que si x est à la fois dans D et au-delà de α *i.e.* dans un voisinage de $+\infty$ … ».

Décortiquons l'expression dans le cas d'une limite finie :

$$\forall\,\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\,\alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R},\ \forall\,x \in \mathrm{D},\ x \in [\alpha\,;+\infty[\ \implies\ |f(x)-b| \leqslant \varepsilon.$$

- $\forall\,\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$: « Quelle que soit la marge d'erreur ε qu'on se donne, aussi petite soit-elle … ».
- $\exists\,\alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}$: « …il existe un seuil α … ».
- $\forall\,x \in \mathrm{D},$: $x \in [\alpha\,;+\infty[$ … : « …tel que si x est à la fois dans D et au-delà de α *i.e.* dans un voisinage de $+\infty$ … ».
- … $\implies |f(x)-b| \leqslant \varepsilon$: alors $f(x)$ est proche de b à ε près ».

Décortiquons l'expression dans le cas d'une limite finie :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \in [\alpha\,;+\infty[\implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$$

- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$: « Quelle que soit la marge d'erreur ε qu'on se donne, aussi petite soit-elle … ».
- $\exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}$: « …il existe un seuil α … ».
- $\forall\, x \in \mathrm{D},$: $x \in [\alpha\,;+\infty[$ … : « …tel que si x est à la fois dans D et au-delà de α *i.e.* dans un voisinage de $+\infty$ … ».
- … $\implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon$: alors $f(x)$ est proche de b à ε près ».

Décortiquons l'expression dans le cas d'une limite finie :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \in [\alpha\,;+\infty[\ \Longrightarrow\ |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$$

- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$: « Quelle que soit la marge d'erreur ε qu'on se donne, aussi petite soit-elle … ».
- $\exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}$: « …il existe un seuil α … ».
- $\forall\, x \in \mathrm{D},$: $x \in [\alpha\,;+\infty[$ … : « …tel que si x est à la fois dans D et au-delà de α *i.e.* dans un voisinage de $+\infty$ … ».
- … $\Longrightarrow\ |f(x) - b| \leqslant \varepsilon$: alors $f(x)$ est proche de b à ε près ».

Autrement dit : « Si $x \in \mathrm{D}$ est suffisamment grand, alors $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de b ».

Exercice 1 :

À l'aide de la définition, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

De manière analogue, en $-\infty$:

Proposition 3 (Limites en $-\infty$) :

Soient D tel que $-\infty \in \overline{\mathrm{D}}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\, \exists\, \beta(\varepsilon) \in \mathbb{R},\, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \leqslant \beta \implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$

De manière analogue, en $-\infty$:

Proposition 3 (Limites en $-\infty$) :

Soient D tel que $-\infty \in \overline{\mathrm{D}}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, \beta(\varepsilon) \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \leqslant \beta \implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, \beta(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \leqslant \beta \implies f(x) \geqslant \mathrm{A}.$

De manière analogue, en $-\infty$:

Proposition 3 (Limites en $-\infty$) :

Soient D tel que $-\infty \in \overline{\mathrm{D}}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, \beta(\varepsilon) \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \leqslant \beta \implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, \beta(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \leqslant \beta \implies f(x) \geqslant \mathrm{A}.$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall\, \mathrm{B} \in \mathbb{R}, \exists\, \beta(\mathrm{B}) \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \leqslant \beta \implies f(x) \leqslant \mathrm{B}.$

$f(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
x^n $n\neq 0$	$+\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair
$\dfrac{1}{x^n}$ $n\neq 0$	0	0
$\sqrt{x}$	$+\infty$	non défini
$\ln(x)$	$+\infty$	non défini
e^x	$+\infty$	0
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	0	non défini
$\sin(x)$ $\cos(x)$ $\tan(x)$	pas de limite	pas de limite
$\arctan(x)$	$\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{2}$
$\text{ch}\,(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\text{sh}\,(x)$	$+\infty$	$-\infty$

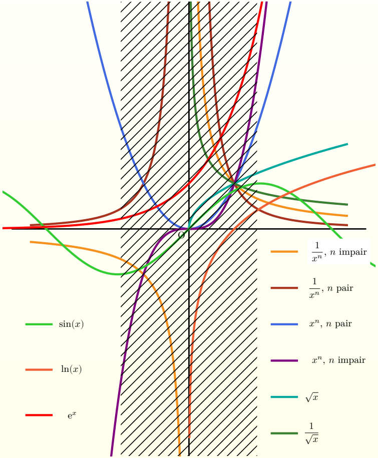


Figure 4 – Limites des fonctions de référence en l'infini.

Remarque : Toutes les fonctions n'ont pas nécessairement une limite en l'infini. C'est le cas, notamment des fonctions circulaires cos, sin ou tan mais aussi de la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & x - \lfloor x \rfloor . \end{array}$$

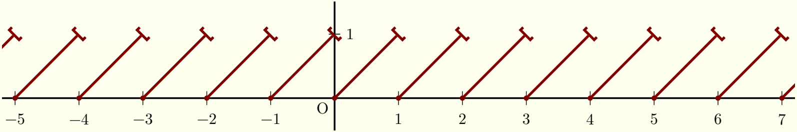


Figure 5 – La fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ n'a pas de limite en $\pm\infty$.

Exercice 2 :

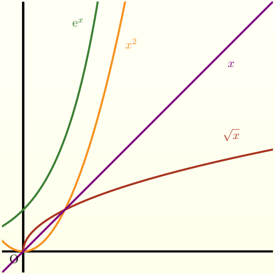
Déterminer les limites (si elles existent) suivantes :

1. $\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-3x+1}{5x^3-x}$
2. $\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty} \cos(x)-x$
3. $\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty} x^2e^{-x}-x$

Remarque : Une fonction peut tendre vers $+\infty$ en $+\infty$ de plusieurs façons. On parle de vitesse de divergence différentes.

C'est le cas par exemple des fonctions suivantes :

- $x \longmapsto x^2$ tend « rapidement » vers l'infini. La concavité est tournée vers le haut.
- $x \longmapsto x$ tend « moyennement » vers l'infini. Pas de concavité
- $x \longmapsto \sqrt{x}$ tend « lentement » vers l'infini. La concavité est tournée vers le bas.
- $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ tend vers l'infini « incommensurablement plus vite » que les fonctions précédentes.



Ces simples informations sont importantes puisqu'elles nous permettront de conjecturer certaines limites. Une fonction rapide sera prépondérante sur une fonction lente en l'infini donc pourra y imposer sa limite.

Soient α, β, γ des réels strictement positifs.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^{\beta}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\beta}}{\ln^{\gamma}(x)} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} x^{\beta} \left|\ln(x)\right|^{\gamma} = 0.$$

Figure 6 – Croissances comparées.

Proposition 4 (Limite en un point fini) :

Soient $a \in \overline{\mathrm{D}} \cap \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, x \in \mathrm{D}, |x-a| \leqslant \alpha \implies |f(x)-b| \leqslant \varepsilon.$$

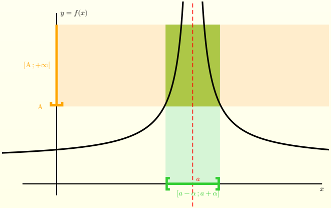


Figure 7 – Limite infinie en un point fini

Proposition 4 (Limite en un point fini) :

Soient $a \in \overline{\mathrm{D}} \cap \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, x \in \mathrm{D}, |x - a| \leqslant \alpha \implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$$
- $$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, \alpha(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, x \in \mathrm{D}, |x - a| \leqslant \alpha \implies f(x) \geqslant \mathrm{A}.$$

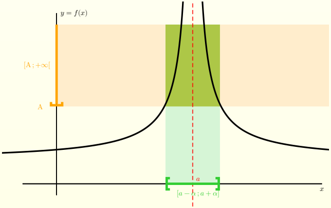


Figure 7 – Limite infinie en un point fini

Proposition 4 (Limite en un point fini) :

Soient $a \in \overline{\mathrm{D}} \cap \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, x \in \mathrm{D}, |x-a| \leqslant \alpha \implies |f(x)-b| \leqslant \varepsilon.$$
- $$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, \alpha(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, x \in \mathrm{D}, |x-a| \leqslant \alpha \implies f(x) \geqslant \mathrm{A}.$$
- $$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \iff \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, \alpha(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, x \in \mathrm{D}, |x-a| \leqslant \alpha \implies f(x) \leqslant \mathrm{A}.$$

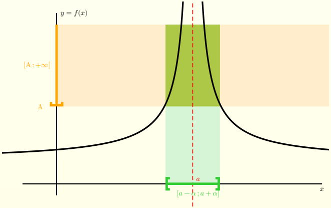


Figure 7 – Limite infinie en un point fini

Remarques :

- L'hypothèse $a \in \overline{\mathrm{D}}$ est nécessaire pour pouvoir considérer des points aussi proches que l'on veut de a.
  On dira que la limite de f est envisageable en a si cette hypothèse est satisfaite (sans considération d'existence ou non de la limite), et qu'elle ne l'est pas si $a \notin \overline{\mathrm{D}}$.

Remarques :

- L'hypothèse $a \in \overline{\mathrm{D}}$ est nécessaire pour pouvoir considérer des points aussi proches que l'on veut de a.
  On dira que la limite de f est envisageable en a si cette hypothèse est satisfaite (sans considération d'existence ou non de la limite), et qu'elle ne l'est pas si $a \notin \overline{\mathrm{D}}$.
- Dans le cas fini, l'inégalité est d'autant plus contraignante que ε est petit. On peut alors se contenter d'étudier le cas de valeurs de ε inférieures à une valeur ε_0 donnée.

Remarques :

- L'hypothèse $a \in \overline{\mathrm{D}}$ est nécessaire pour pouvoir considérer des points aussi proches que l'on veut de a.
  On dira que la limite de f est envisageable en a si cette hypothèse est satisfaite (sans considération d'existence ou non de la limite), et qu'elle ne l'est pas si $a \notin \overline{\mathrm{D}}$.
- Dans le cas fini, l'inégalité est d'autant plus contraignante que ε est petit. On peut alors se contenter d'étudier le cas de valeurs de ε inférieures à une valeur ε_0 donnée.
- De même, dans le cas d'une limite ∞, la définition trouve sa pertinence lorsque A devient grand ou petit (vers $-\infty$) mais il n'est pas nécessaire de le supposer strictement positif ou négatif.

$f(x)$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$
$\dfrac{1}{x^n}$ $n\neq 0$	$+\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$+\infty$	non défini
$\ln(x)$	$-\infty$	non défini

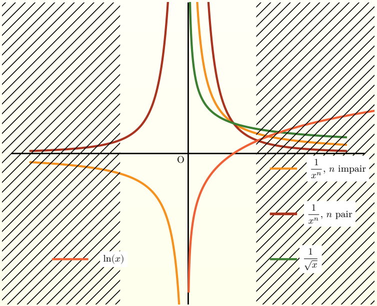


Figure 8 – Limites des fonctions de référence en 0.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}\,(x)}{x} \\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x} \end{aligned}\right\} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha, \quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Figure 9 – Taux d'accroissement de fonctions dérivables.

Exercice 3 :

Déterminer les limites (si elles existent) suivantes. On distinguera éventuellement 0^- et 0^+.

1. $\lim\limits_{x \to 0} x - \ln(x)$
2. $\lim\limits_{x \to 0} x\sqrt{1 + (\ln(x))^2}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x} - e^{3x}}{x}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} x e^{\frac{1}{x}}$

Corollaire 4.1 (Limite et valeur absolue) :

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{K}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \implies \lim_{x \to a} |f(x)| = |\ell| \, .$$

Corollaire 4.1 (Limite et valeur absolue) :

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{K}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \implies \lim_{x\to a} |f(x)| = |\ell|\,.$$

L'unicité de la limite d'une fonction provient d'une propriété topologique de $\mathbb{R}$: la séparation.

Théorème 5 (Unicité de la limite, cas réel) :

Soit $a \in \overline{\mathrm{D}}$ et f une fonction réelle.

Si elle existe, la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est unique.

Notation : En cas d'existence de la limite en a, le **théorème** (5) permet de justifier la notation, maintenant non ambigüe, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ de LA limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a.

Corollaire 4.1 (Limite et valeur absolue) :

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{K}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \implies \lim_{x \to a} |f(x)| = |\ell|.$$

L'unicité de la limite d'une fonction provient d'une propriété topologique de $\mathbb{R}$: la séparation.

Théorème 5 (Unicité de la limite, cas réel) :

Soit $a \in \overline{\mathrm{D}}$ et f une fonction réelle.

Si elle existe, la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est unique.

Notation : En cas d'existence de la limite en a, le théorème (5) permet de justifier la notation, maintenant non ambigüe, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ de LA limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a.

Par la contraposée, une fonction admettant deux valeurs d'adhérence au voisinage d'un point a ne peut y avoir de limite.

ATTENTION

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

En 0, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right) = \pm\infty$. Comme la limite de $\sin(x)$ en l'infini n'existe pas, celle de $f(x)$ en 0 n'existe pas non plus.

Nous verrons dans un autre chapitre une manière efficace et rigoureuse de montrer ce point.

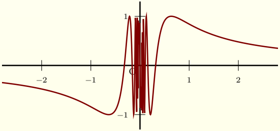


Figure 10 – La fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

Proposition 6 :

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, D un voisinage de a et $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$.

Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

Proposition 6 :

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, D un voisinage de a et $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$.

Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

Par la contraposée, toute fonction non bornée sur un voisinage de a ne peut avoir de limite finie.

On a mieux que la proposition (6) :

Théorème 7 :

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

1. Si $m < \ell$ alors, il existe un voisinage de a sur lequel $m < f(x)$.
2. Si $\ell < \mathrm{M}$ alors, il existe un voisinage de a sur lequel $f(x) < \mathrm{M}$.

On a mieux que la proposition (6) :

Théorème 7 :

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

1. Si $m < \ell$ alors, il existe un voisinage de a sur lequel $m < f(x)$.
2. Si $\ell < \mathrm{M}$ alors, il existe un voisinage de a sur lequel $f(x) < \mathrm{M}$.

Un cas particulier TRÈS important est le cas où $\ell > 0$ ou $\ell \neq 0$, le théorème (7) nous assure de l'existence d'un voisinage de a sur lequel $f(x) > 0$ ou $f(x) \neq 0$ *i.e.* il existe un voisinage de a sur lequel, f prend des valeurs du même signe que sa limite.

Proposition 8 :

Si f est définie en $a \in \mathrm{D}$ non adhérent à D et y admet une limite, alors cette limite est nécessairement égale à $f(a)$.

[2]. En un point de l'intérieur de D et non de $\overline{\mathrm{D}}$ je le redis.

Proposition 8 :

Si f est définie en $a \in \mathrm{D}$ non adhérent à D et y admet une limite, alors cette limite est nécessairement égale à $f(a)$.

Une fonction ne peut donc pas avoir de limite infinie en un point où elle est définie.

[2]. En un point de l'intérieur de D et non de $\overline{\mathrm{D}}$ je le redis.

Proposition 8 :

Si f est définie en $a \in \mathrm{D}$ non adhérent à D et y admet une limite, alors cette limite est nécessairement égale à $f(a)$.

Une fonction ne peut donc pas avoir de limite infinie en un point où elle est définie.

ATTENTION

La proposition (8) ne dit absolument pas que toute fonction définie en a est continue en a mais seulement qu'une condition nécessaire à l'être est que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.

⌊2⌋. En un point de l'intérieur de D et non de $\overline{\mathrm{D}}$ je le redis.

Proposition 8 :

Si f est définie en $a \in \mathrm{D}$ non adhérent à D et y admet une limite, alors cette limite est nécessairement égale à $f(a)$.

Une fonction ne peut donc pas avoir de limite infinie en un point où elle est définie.

ATTENTION

La proposition (8) ne dit absolument pas que toute fonction définie en a est continue en a mais seulement qu'une condition nécessaire à l'être est que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.

Conclusion, une fonction admet une limite en un point (intérieur) de D si, et seulement si elle y est continue.[2]

[2]. En un point de l'intérieur de D et non de $\overline{\mathrm{D}}$ je le redis.

Il y a donc peu de problèmes en un point intérieur mais que se passe-t-il alors aux bornes de celui-ci ? Une fonction peut y être définie mais ne pas y avoir de limite.

C'est, par exemple, le cas de la fonction partie entière en $a = 1$ où la fonction, pourtant correctement définie, prend des valeurs différentes suivant « le côté » d'où l'on arrive.

On parlera alors de limite à droite ou de limite à gauche.

Soit J un intervalle (ou une réunion d'intervalles, ou plus généralement un sous-ensemble quelconque) tel que $a \in \overline{\mathrm{D} \cap \mathrm{J}}$. Si la limite (finie ou infinie) en a de la restriction $f_{|\mathrm{D}\cap\mathrm{J}}$ existe, on utilise la notation suivante :

$$\lim_{x \to a} f_{|\mathrm{D}\cap\mathrm{J}}(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathrm{J}}} f(x).$$

Définition 3 (Limites à droite et à gauche) :

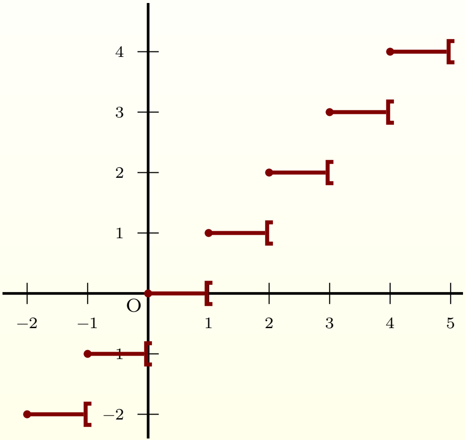
Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

Limite à gauche : Si a est adhérent à $\mathrm{D} \cap]-\infty\,;a[$, on dit que f possède une **limite à gauche** en a si $f_{|\mathrm{D}\cap]-\infty;a[}$ possède une limite en a.
Cette limite est notée $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in]-\infty;a[}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ ou encore $f(a-0)$.

Limite à droite : Si a est adhérent à $\mathrm{D} \cap]a\,;+\infty[$, on dit que f possède une **limite à droite** en a si $f_{|\mathrm{D}\cap]a;+\infty[}$ possède une limite en a.
Cette limite est notée $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in]a;+\infty[}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $f(a+0)$.

Remarque : a n'appartient ni à $\mathrm{D} \cap]-\infty\,;a[$ ni à $\mathrm{D} \cap]a\,;+\infty[$. Il y est seulement adhérent.

De même que plus haut, on peut dire que la limite $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in \mathrm{J}}} f(x)$ est envisageable ou non suivant que a appartient à $\overline{\mathrm{D}\cap\mathrm{J}}$ ou pas.



$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{\substack{x \to n \\ x < n}} \lfloor x \rfloor = n - 1$$

et

$$\lim_{\substack{x \to n \\ x > n}} \lfloor x \rfloor = n.$$

Figure 11 – La fonction partie entière n'a pas de limites en tout point de $\mathbb{Z}$ mais seulement des limites à droite et à gauche.

Exercice 4 :

Que dire des limites suivantes ?

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{|x|}$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{|x|}$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \lfloor x \rfloor$
7. $\lim\limits_{x \to 0} \lfloor x^2 \rfloor$

Corollaire 8.1 :

Soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Dire que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$ revient à dire que :

$$\forall\, \mathrm{V}_b \in \mathcal{V}(b),\ \exists\, \alpha(\mathrm{V}_b) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\quad \underset{\text{ou } x \in [a-\alpha\,;a[}{a - \alpha \leqslant x < a} \quad \Longrightarrow\ f(x) \in \mathrm{V}_b.$$

Corollaire 8.2 :

Soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Dire que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$ revient à dire que :

$$\forall\, \mathrm{V}_b \in \mathcal{V}(b),\ \exists\, \alpha(\mathrm{V}_b) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\quad \underset{\text{ou } x \in [a-\alpha\,;a[}{a-\alpha \leqslant x < a} \quad \Longrightarrow\ f(x) \in \mathrm{V}_b.$$

- Dire que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$ revient à dire que :

$$\forall\, \mathrm{V}_b \in \mathcal{V}(b),\ \exists\, \alpha(\mathrm{V}_b) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\quad \underset{\text{ou } x \in]a\,;a+\alpha]}{a < x \leqslant a+\alpha} \quad \Longrightarrow\ f(x) \in \mathrm{V}_b.$$

Corollaire 8.3 :

Soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Dire que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$ revient à dire que :

$$\forall\, \mathrm{V}_b \in \mathcal{V}(b),\ \exists\, \alpha(\mathrm{V}_b) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\quad \begin{array}{c} a - \alpha \leqslant x < a \\ \text{ou } x \in [a - \alpha\,;a[\end{array} \quad \Longrightarrow f(x) \in \mathrm{V}_b.$$

- Dire que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$ revient à dire que :

$$\forall\, \mathrm{V}_b \in \mathcal{V}(b),\ \exists\, \alpha(\mathrm{V}_b) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\quad \begin{array}{c} a < x \leqslant a + \alpha \\ \text{ou } x \in]a\,;a + \alpha] \end{array} \quad \Longrightarrow f(x) \in \mathrm{V}_b.$$

Corollaire 8.4 :

Soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Dire que $\displaystyle\lim_{x \to a^-} f(x) = b$ revient à dire que :

$$\forall\, \mathrm{V}_b \in \mathcal{V}(b),\ \exists\, \alpha(\mathrm{V}_b) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\quad \underset{\text{ou } x \in [a-\alpha\,;a[}{a - \alpha \leqslant x < a} \quad \Longrightarrow\ f(x) \in \mathrm{V}_b.$$

- Dire que $\displaystyle\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ revient à dire que :

$$\forall\, \mathrm{V}_b \in \mathcal{V}(b),\ \exists\, \alpha(\mathrm{V}_b) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\quad \underset{\text{ou } x \in]a\,;a+\alpha]}{a < x \leqslant a + \alpha} \quad \Longrightarrow\ f(x) \in \mathrm{V}_b.$$

Remarque : Les limites à gauche/à droite ne sont jamais que des limites au sens initial du chapitre mais appliquées à des restrictions. Cela justifie qu'elles auront les mêmes propriétés notamment leur unicité.

Théorème 9 (Limite et limites à gauche et à droite) :

Soit $a \in \overline{\mathrm{D}}$.

La fonction f admet une limite en a notée $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ si, et seulement si

1. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$ si f est définie en a.

Théorème 9 (Limite et limites à gauche et à droite) :

Soit $a \in \overline{\mathrm{D}}$.

La fonction f admet une limite en a notée $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ si, et seulement si

1. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$ si f est définie en a.
   ou

Théorème 9 (Limite et limites à gauche et à droite) :

Soit $a \in \overline{\mathrm{D}}$.

La fonction f admet une limite en a notée $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ si, et seulement si

1. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$ si f est définie en a.
   ou
2. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ si f n'est pas définie en a.

Théorème 9 (Limite et limites à gauche et à droite) :

Soit $a \in \overline{\mathrm{D}}$.

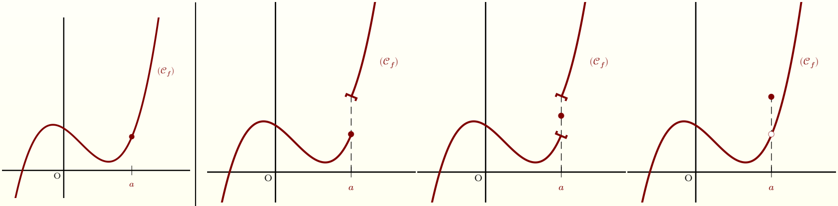
La fonction f admet une limite en a notée $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ si, et seulement si

1. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$ si f est définie en a.

   ou

2. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ si f n'est pas définie en a.

En particulier, dans tous les cas, une condition nécessaire est que les quantités $f(a-0)$ et $f(a+0)$ existent et soient égales.



$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe (et vaut $f(a)$).

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ n'existe pas

Figure 12 – Caractérisation de la limite en fonction des ses limites à gauche et à droite.

Exemple 2 :

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ a pour limite $+\infty$ en 0 [3].

⌊3⌋. Car la même limite infinie à droite et à gauche.

Exemple 2 :

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ a pour limite $+\infty$ en 0 [3].
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 mais $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$.

[3]. Car la même limite infinie à droite et à gauche.

Exemple 2 :

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ a pour limite $+\infty$ en 0 [3].
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 mais $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.
- Soit δ_0, la fonction qui, à tout réel associe 1 si $x = 0$ et 0 sinon.
  On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \delta_0 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \delta_0 = 0$ mais δ_0 n'a pas de limite en 0 car $\delta_0(0) = 1$.

[3]. Car la même limite infinie à droite et à gauche.

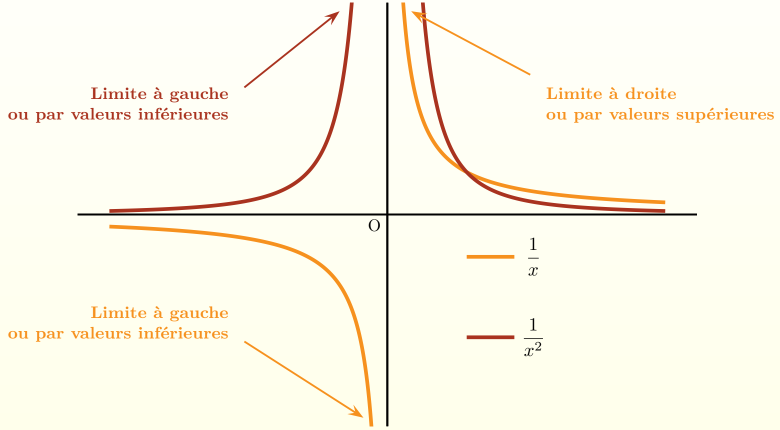


Figure 13 – Limites à droite et à gauche d'une fonction

Exemples 3 :

Étudions les limites de $\dfrac{1}{2-x}$ et $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ dans un voisinage de 2 :

Comme $\lim\limits_{x\to 2} 2-x=0$, on est ramené à l'étude de $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{u}$ qui dépend du signe de u :

1. On commence par dresser un tableau de signes de $x-2$: [4]

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	

Avec les conventions de notations :

$$\lim_{x\to 2^-} 2-x=0^+ \text{et} \lim_{x\to 2^+} 2-x=0^-.$$

2. On conclut :

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to 2^-} 2-x & = & 0^+\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} & = & +\infty\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{les composées de limites}]{\text{D'après les théorèmes sur}} \lim_{x\to 2^-}\frac{1}{2-x}=+\infty,$$

[4]. Au moins dans sa tête !

Exemples 3 :

Étudions les limites de $\dfrac{1}{2-x}$ et $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ dans un voisinage de 2 :

Comme $\lim\limits_{x\to 2} 2-x=0$, on est ramené à l'étude de $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{u}$ qui dépend du signe de u :

1. On commence par dresser un tableau de signes de $x-2$: [4]

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	

Avec les conventions de notations :

$$\lim_{x\to 2^-} 2-x=0^+ \text{et} \lim_{x\to 2^+} 2-x=0^-.$$

2. On conclut : et

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to 2^+} 2-x & = & 0^- \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x} & = & -\infty\end{array}\right\} \xRightarrow[\text{les composées de limites}]{\text{D'après les théorèmes sur}} \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{2-x}=-\infty.$$

[4]. Au moins dans sa tête !

Exemples 3 :

Ici, malgré la difficulté apparente,
$\lim\limits_{x\to 2^-}(2-x)^2 = \lim\limits_{x\to 2^+}(2-x)^2 = \lim\limits_{x\to 2}(2-x)^2 = 0^+$.

D'où :

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to 2}(2-x)^2 & = & 0^+ \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} & = & +\infty \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{les composées de limites}]{\text{D'après les théorèmes sur}} \lim_{x\to 2}\frac{1}{(2-x)^2} = +\infty.$$

Exemples 3 :

En conclusion, on remarquera bien que si $\dfrac{1}{2-x}$ n'a pas de limite en 2, $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ en a bien une qui est $+\infty$.

Exemples 4 :

- La fonction partie entière à des limites à droite et à gauche distinctes pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et n'admet donc pas de limite en ces points.

Exemples 4 :

- La fonction partie entière à des limites à droite et à gauche distinctes pour tout a $\in \mathbb{Z}$ et n'admet donc pas de limite en ces points.
- La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ n'est pas définie en 0 mais y admet une limite :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 1.$$

Exemples 4 :

- La fonction partie entière à des limites à droite et à gauche distinctes pour tout a $\in \mathbb{Z}$ et n'admet donc pas de limite en ces points.
- La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ n'est pas définie en 0 mais y admet une limite :
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 1.$$
- La fonction sinus cardinal $g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est définie en 0 et y admet une limite :
$$\lim_{x \to 0} g(x) = 1.$$

Exemples 4 :

- La fonction partie entière à des limites à droite et à gauche distinctes pour tout a $\in \mathbb{Z}$ et n'admet donc pas de limite en ces points.
- La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ n'est pas définie en 0 mais y admet une limite :
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 1.$$
- La fonction sinus cardinal $g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est définie en 0 et y admet une limite :
$$\lim_{x \to 0} g(x) = 1.$$
- La fonction $x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est définie en 0, admet une limite à droite et une limite à gauche en 0 mais n'admet pas de limite en 0.

Exercice 5 :

Déterminer les limites suivantes si elles existent. Dans le cas contraire, on déterminera les limites par valeurs supérieures et inférieures.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

Le comportement à l'infini, dit comportement asymptotique, peut aussi aider à cerner l'allure de la courbe.

On définit pour cela la notion de droite asymptote [4] : il s'agit d'une droite qui approche d'aussi près que l'on veut une portion de la courbe lorsque l'on s'éloigne vers l'infini dans l'une des deux directions. Plus précisément :

---

[4]. De l'étymologie grecque construit à l'aide du préfixe privatif « a » et de « symptôsis » (rencontre) : la droite qui ne se rencontre pas.

Remarque : L'utilisation du terme asymptote ne se limite pas aux droites. On parlera de courbes asymptotes

Définition 4 (Asymptote) :

On dit qu'une fonction f admet :

1. une asymptote verticale au voisinage de a d'équation $x = a$ lorsque $\lim_{x \to a^\pm} f(x) = \pm\infty$.

Définition 4 (Asymptote) :

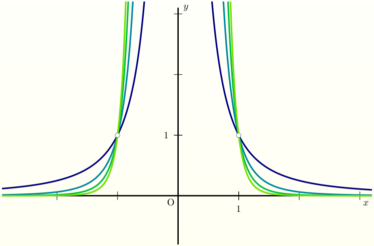
On dit qu'une fonction f admet :

1. une asymptote verticale au voisinage de a d'équation $x = a$ lorsque $\lim\limits_{x \to a^\pm} f(x) = \pm\infty$.
2. une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = b$ lorsque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$.

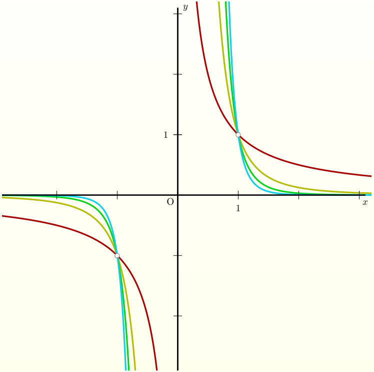
Définition 4 (Asymptote) :

On dit qu'une fonction f admet :

1. une asymptote verticale au voisinage de a d'équation $x = a$ lorsque $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.
2. une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = b$ lorsque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$.
3. plus généralement, une droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = ax + b$, dite asymptote oblique, au voisinage de $\pm\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.

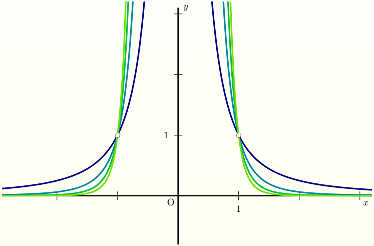


$$x \longmapsto \frac{1}{x^n} \text{ pour } n = 2,\ 4,\ 6,\ 8.$$



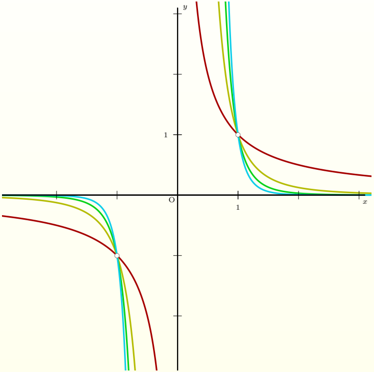
$$x \longmapsto \frac{1}{x^n} \text{ pour } n = 1,\ 3,\ 5,\ 7.$$

Figure 14 – Les courbes des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ admettent l'axe des ordonnées comme asymptote verticale et l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.



On remarquera que l'existence de la limite n'est pas nécessaire pour que la courbe admette une asymptote verticale comme c'est le cas pour $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour n impair.

$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour $n = 2,\ 4,\ 6,\ 8.$



$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour $n = 1,\ 3,\ 5,\ 7.$

Figure 14 – Les courbes des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ admettent l'axe des ordonnées comme asymptote verticale et l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

Méthode I :

Tant qu'on ne dispose pas de méthode plus sophistiquée, le principe est le suivant (pour une asymptote en $+\infty$) :

1. Étudier la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$:

Méthode 1 :

Tant qu'on ne dispose pas de méthode plus sophistiquée, le principe est le suivant (pour une asymptote en $+\infty$) :

1. Étudier la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$:
   - Si cette limite n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.

Méthode 1 :

Tant qu'on ne dispose pas de méthode plus sophistiquée, le principe est le suivant (pour une asymptote en $+\infty$) :

1. Étudier la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$:
   - Si cette limite n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.
   - Si cette limite est finie, de valeur a, on dit que la droite $y = ax$ est direction asymptotique de la courbe en $+\infty$.

Méthode 1 :

Tant qu'on ne dispose pas de méthode plus sophistiquée, le principe est le suivant (pour une asymptote en $+\infty$) :

1. Étudier la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$:
   - Si cette limite n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.
   - Si cette limite est finie, de valeur a, on dit que la droite $y = ax$ est direction asymptotique de la courbe en $+\infty$.
2. On étudie la limite de $f(x) - ax$:

Méthode 1 :

Tant qu'on ne dispose pas de méthode plus sophistiquée, le principe est le suivant (pour une asymptote en $+\infty$) :

1. Étudier la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$:
   - Si cette limite n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.
   - Si cette limite est finie, de valeur a, on dit que la droite $y = ax$ est direction asymptotique de la courbe en $+\infty$.
2. On étudie la limite de $f(x) - ax$:
   - Si elle n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.

Méthode 1 :

Tant qu'on ne dispose pas de méthode plus sophistiquée, le principe est le suivant (pour une asymptote en $+\infty$) :

1. Étudier la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$:
   - Si cette limite n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.
   - Si cette limite est finie, de valeur a, on dit que la droite $y = ax$ est direction asymptotique de la courbe en $+\infty$.
2. On étudie la limite de $f(x) - ax$:
   - Si elle n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.
   - Si cette limite est finie, de valeur b, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

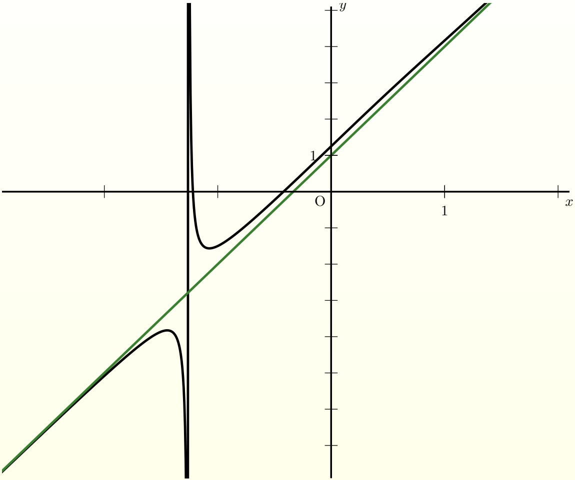


Figure 15 – La droite d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote à la courbe de $f : x \longmapsto 3x + 1 + \dfrac{1}{2(x^3 + 2)}$.

Exercice 6 :

Étudier les asymptotes éventuelles des courbes de :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{4x^2-2}{2x+1}$
2. $g : x \longmapsto \sqrt{x^2+3x+1}$

Exercice 6 :

Étudier les asymptotes éventuelles des courbes de :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{4x^2 - 2}{2x + 1}$
2. $g : x \longmapsto \sqrt{x^2 + 3x + 1}$

Exercice 7 :

Montrer que la courbe de $x \mapsto \cos(x) - x$ n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.

Remarque : Dire que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ est équivalent de dire que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - b = 0$. Cette dernière expression représente, au signe près, la distance entre la courbe et son asymptote : à l'infini, la courbe représentative se rapproche infiniment de son asymptote.

Méthode 2 :

Soit f une fonction et $y = ax + b$ l'équation de son asymptote horizontale ou oblique $(\mathcal{D})$.

Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $(\mathcal{D})$ en $+\infty$, il suffit d'étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$ sur un voisinage $]\alpha\,;+\infty[$ de celui-ci.

x	α		δ		$+\infty$
Signe de $f(x) - (ax + b)$		$+$	0	$-$	
Position de $\mathcal{C}_f$ et $(\mathcal{D})$		$\mathcal{C}_f$ au dessus de $(\mathcal{D})$		$\mathcal{C}_f$ au dessous de $(\mathcal{D})$	

II. Stabilité algébrique

Un peu d'histoire : *Les théorèmes qui suivent étaient jugés évidents au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. Une tentative de démonstration aurait alors paru incongrue et superflue. Ces démonstrations nous sont cependant nécessaires pour plusieurs raisons :*

- *Montrer l'efficacité de notre définition de limite.*

II. Stabilité algébrique

Un peu d'histoire : *Les théorèmes qui suivent étaient jugés évidents au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. Une tentative de démonstration aurait alors paru incongrue et superflue. Ces démonstrations nous sont cependant nécessaires pour plusieurs raisons :*

- *Montrer l'efficacité de notre définition de limite.*
- *Justifier la validité de notre intuition.*

II. Stabilité algébrique

Un peu d'histoire : *Les théorèmes qui suivent étaient jugés évidents au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. Une tentative de démonstration aurait alors paru incongrue et superflue. Ces démonstrations nous sont cependant nécessaires pour plusieurs raisons :*

- *Montrer l'efficacité de notre définition de limite.*
- *Justifier la validité de notre intuition.*
- *Servir de modèle de démonstration pouvant être utilisé dans des cas plus complexes.*

II. Stabilité algébrique

Les résultats de certaines opérations sur les limites sont intuitifs et parfaitement déterminés.

D'autres opérations mènent à des formes dites « indéterminées », c'est-à-dire qu'elles conduisent à plusieurs résultats possibles qu'ils faudra... déterminer.

- $0 \times \infty$
- $\dfrac{0}{0}$
- $\dfrac{\infty}{\infty}$
- $\infty - \infty$
- 1^{∞}
- 0^{0}
- ∞^{0}
- 0^{∞}

Pour ce faire, il faudra alors user de différentes méthodes et techniques pour transformer l'écriture de la suite et « lever l'indétermination ».

Notamment, soit factoriser une somme, développer un produit, décomposer une fraction en éléments simples ou multiplier le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée, soit essayer de changer la forme de l'expression, soit utiliser le théorème de comparaison ou des gendarmes, soit le corollaire (18.1) sur les suites monotones pour pouvoir conclure [5].

[5]. Dans tous les cas, réfléchir avant d'affirmer.

ATTENTION

Dans les paragraphes qui suivent, on considèrera un réel $a \in \overline{\mathbb{R}}$, deux fonctions f et g à valeurs réelles définies dans un voisinage de a et on considèrera les limites en ce point.

Proposition 10 (Somme) :

Soient ℓ, $\ell' \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme Indéter.

Exemple 5 :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 2 + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ a pour limite 2 en $+\infty$.

En effet $$\left.\begin{array}{rcl} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{x}} & = & 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2 & = & 2 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{les sommes de limites}]{\text{D'après les théorèmes sur}} \lim_{x\to+\infty} 2 + \frac{4}{\sqrt{x}} = 2.$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 + 0 = 2$ d'après les théorèmes sur les limites de sommes.

ATTENTION

Cas de la forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$:

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\ell) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, mais $\lim\limits_{x\to+\infty}((x+\ell)-x) = \ell$.

ATTENTION

Cas de la forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$:

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ :
$\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \ell) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, mais
$\lim\limits_{x \to +\infty} ((x + \ell) - x) = \ell$.
- On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et
$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$, mais $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 2x) = \lim\limits_{x \to +\infty} = -\infty$.

ATTENTION

Cas de la forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$:

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ :
  $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \ell) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, mais
  $\lim\limits_{x \to +\infty} ((x + \ell) - x) = \ell$.
- On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et
  $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$, mais $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 2x) = \lim\limits_{x \to +\infty} = -\infty$.
- On peut ne pas obtenir de limite :
  $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \cos(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x = +\infty$, mais
  $(x + \cos(x) - x) = \cos(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Proposition 11 (Produit) :

Soient ℓ, $\ell' \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si g a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $f \times g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞ [6]	Forme Indéter.	∞ [6]

[6]. Appliquer la règle des signes d'un produit.

ATTENTION

Cas de la forme indéterminée $0 \times (\infty)$:

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ :
  $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\pi}{x-2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} x - 2 = 0$, mais
  $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\pi}{x-2} \times (x-2) = \pi$.

ATTENTION

Cas de la forme indéterminée $0 \times (\infty)$ **:**

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ :
  $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\pi}{x-2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} x - 2 = 0$, mais
  $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\pi}{x-2} \times (x-2) = \pi$.
- On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$,
  mais $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} \times x^2 = -\infty$.

ATTENTION

Cas de la forme indéterminée $0 \times (\infty)$:

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ :
$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\pi}{x-2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} x - 2 = 0$, mais
$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\pi}{x-2} \times (x-2) = \pi$.

- On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$,
mais $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} \times x^2 = -\infty$.

- On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$ et
$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, mais $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} \times x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Proposition 12 (Inverse) :

Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	$\ell \neq 0$	0	∞
alors $\dfrac{1}{f}$ a pour limite	$\dfrac{1}{\ell}$	∞ [7]	0

[7]. Appliquer la règle des signes d'un quotient.

En remarquant que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$, on en déduit alors les résultats sur les limites de quotients :

Proposition 13 (Quotient) :

Soient ℓ, $\ell' \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞
Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0	0	∞	ℓ' [8]
alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞ [9]	Forme Indéter.	0	∞ [9]

[8]. y compris $\ell' = 0$.

[9]. Appliquer la règle des signes d'un quotient.

Exercice 8 :

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{1 - x^4}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2 - \sqrt{4 - \frac{1}{x}}}$.

Proposition 14 (Limite d'une fonction Composée) :

Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathrm{E}$ et $g : \mathrm{E} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à E et $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{Si } \lim_{x \to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x \to b} g(x) = c, \text{ alors } \lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c.$$

Proposition 14 (Limite d'une fonction Composée) :

Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathrm{E}$ et $g : \mathrm{E} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à E et $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{Si } \lim_{x \to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x \to b} g(x) = c, \text{ alors } \lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c.$$

Cette dernière propriété nous permet alors de justifier la recherche d'une limite par changement de variable *i.e.* on ne s'intéresse plus à la limite de $(gof)(x)$ quand $x \to a$, mais de $g(\mathrm{X})$ quand $\mathrm{X} \to b$.

Proposition 14 (Limite d'une fonction Composée) :

Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathrm{E}$ et $g : \mathrm{E} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à E et $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x\to b} g(x) = c, \text{ alors } \lim_{x\to a} (g\circ f)(x) = c.$$

Cette dernière propriété nous permet alors de justifier la recherche d'une limite par changement de variable *i.e.* on ne s'intéresse plus à la limite de $(gof)(x)$ quand $x \to a$, mais de $g(\mathrm{X})$ quand $\mathrm{X} \to b$.

Exemple 6 :

On cherche la limite de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln^2(x) + 2\ln(x)}{\ln^2(x)+1}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(x) + 2\ln(x)}{\ln^2(x)+1} \underset{\boxed{\substack{\mathrm{X}=\ln(x) \\ \lim_{x\to 0}\mathrm{X}=-\infty}}}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{\mathrm{X}\to-\infty} \frac{\mathrm{X}^2+2\mathrm{X}}{\mathrm{X}^2+1} = 1.$$

Exercice 9 :

Déterminer les limites suivantes si elles existent. Dans le cas contraire, on déterminera les limites par valeurs supérieures et inférieures.

Dans tous les cas, préciser l'équation d'une éventuelle asymptote à la courbe représentative de f.

1. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+6x-7}$
2. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{1+x}{1-x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$
3. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{2-x}{x}}$

En posant $g \equiv |...|$ dans la proposition (14) , on retrouve le corollaire (4.1) :

Corollaire 14.1 (Limite et valeur absolue) :

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{K}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \implies \lim_{x \to a} |f(x)| = |\ell|\,.$$

Les deux théorèmes suivants sont de simples corollaires de la proposition (14) précédente. Leurs applications sont cependant loin d'être triviales. Nous en verrons quelques exemples.

Corollaire 14.2 (Limite d'une suite explicite) :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A\,;+\infty[$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = f(n)$ pour tout entier naturel $n \geqslant A$.

Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\text{Si } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Les deux théorèmes suivants sont de simples corollaires de la proposition (14) précédente. Leurs applications sont cependant loin d'être triviales. Nous en verrons quelques exemples.

Corollaire 14.3 (Limite d'une suite explicite) :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[\mathrm{A}\,;+\infty[$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = f(n)$ pour tout entier naturel $n \geqslant \mathrm{A}$.

Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\text{Si } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Exemple 7 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{\dfrac{3n+2}{n+1}}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+2}{n+1} = 3$ et $\displaystyle\lim_{x\to3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$, on a aisément $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.

Corollaire 14.4 (Limite d'une suite quelconque) :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont tous les termes appartiennent à I.

Pour réels a et b de $\overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \end{cases} \qquad \text{alors} \qquad \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = b.$$

Pour l'instant, on ne peut encore rien dire si ce n'est que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendra vers la limite de f en ℓ pour peu qu'elle en ait une.

Mais, imaginons que, tout naturellement, on ait $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$ ou, autrement dit, que f soit continue en ℓ.

On obtiendrait alors un moyen efficace de trouver la limite d'une suite récurrente à l'aide de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ que l'on ferait « passer à la limite » :

$$\begin{tikzcd} u_{n+1} \arrow[d, "n\to+\infty"'] & = & f(u_n) \arrow[d, "n\to+\infty"'] \\ \ell & = & f(\ell) \end{tikzcd}$$

Pour l'instant, on ne peut encore rien dire si ce n'est que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendra vers la limite de f en ℓ pour peu qu'elle en ait une.

Mais, imaginons que, tout naturellement, on ait $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$ ou, autrement dit, que f soit continue en ℓ.

On obtiendrait alors un moyen efficace de trouver la limite d'une suite récurrente à l'aide de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ que l'on ferait « passer à la limite » :

$$\begin{tikzcd}
u_{n+1} \arrow[d, "n\to+\infty"'] & = & f(u_n) \arrow[d, "n\to+\infty"'] \\
\ell & = & f(\ell)
\end{tikzcd}$$

Autrement dit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right).}$

(sous conditions de continuité de f)

Pour l'instant, on ne peut encore rien dire si ce n'est que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendra vers la limite de f en ℓ pour peu qu'elle en ait une.

Mais, imaginons que, tout naturellement, on ait $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$ ou, autrement dit, que f soit continue en ℓ.

On obtiendrait alors un moyen efficace de trouver la limite d'une suite récurrente à l'aide de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ que l'on ferait « passer à la limite » :

$$\begin{tikzcd} u_{n+1} \arrow[d, "n\to+\infty"'] & = & f(u_n) \arrow[d, "n\to+\infty"'] \\ \ell & = & f(\ell) \end{tikzcd}$$

Autrement dit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right).}$

(sous conditions de continuité de f)

La limite cherchée serait alors nécessairement une solution de l'équation

$$f(x) = x.$$

Pour l'instant, on ne peut encore rien dire si ce n'est que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendra vers la limite de f en ℓ pour peu qu'elle en ait une.

Mais, imaginons que, tout naturellement, on ait $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$ ou, autrement dit, que f soit continue en ℓ.

On obtiendrait alors un moyen efficace de trouver la limite d'une suite récurrente à l'aide de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ que l'on ferait « passer à la limite » :

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle n\to+\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle n\to+\infty} \\ \ell & = & f(\ell) \end{array}$$

Autrement dit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right).}$

(sous conditions de continuité de f)

La limite cherchée serait alors nécessairement une solution de l'équation

$$f(x) = x.$$

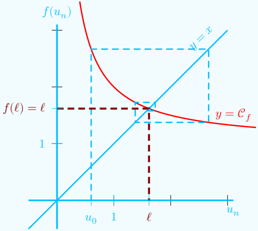
Nous y reviendrons plus avant dans les paragraphes suivants car, pour l'instant, rien ne nous assure que $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$!!!

Exemple 8 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite définie par récurrence par une fonction dont est tracée la courbe représentative ci-contre.

Les termes de la suite semblent converger vers le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$, un « point fixe » de f.

On verra dans quel contexte ceci est vrai.



En pratique, le corollaire (14.4) permet souvent de démontrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point a :

Méthode 3 :

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Pour montrer que f n'a pas de limite en a, il suffit de trouver 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$.

En pratique, le corollaire (14.4) permet souvent de démontrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point a :

Méthode 3 :

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Pour montrer que f n'a pas de limite en a, il suffit de trouver 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$.

Exemple 9 ($\cos$ n'a pas de limite en $\pm\infty$) :

Considérons les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n = 2\pi n$ et $v_n = \dfrac{\pi}{2} + u_n$.

En pratique, le corollaire (14.4) permet souvent de démontrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point a :

Méthode 3 :

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Pour montrer que f n'a pas de limite en a, il suffit de trouver 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$.

Exemple 9 ($\cos$ n'a pas de limite en $\pm\infty$) **:**

Considérons les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n = 2\pi n$ et $v_n = \dfrac{\pi}{2} + u_n$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(u_n) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(v_n)$.

En pratique, le corollaire (14.4) permet souvent de démontrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point a :

Méthode 3 :

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Pour montrer que f n'a pas de limite en a, il suffit de trouver 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$.

Exemple 9 ($\cos$ n'a pas de limite en $\pm\infty$) :

Considérons les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n = 2\pi n$ et $v_n = \dfrac{\pi}{2} + u_n$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(u_n) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(v_n)$.

La fonction cos ne peut donc avoir de limites en $+\infty$.

Exercice 10 :

Soit f une fonction périodique.

Démontrer que si f admet une limite ℓ en $+\infty$, f est constante.

III. Propriétés de la limite

Proposition 15 (Limite et ordre) :

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et deux fonctions f et g définies sur tout voisinage $\mathcal{V}_a$ de a.

$$\text{Si,} \quad \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a,\ g(x) \leqslant f(x), \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell' \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \end{cases} \qquad \text{alors} \quad \ell' \leqslant \ell.$$

On parle souvent de conservation des inégalités **larges** par passage à la limite.

Proposition 15 (Limite et ordre) :

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et deux fonctions f et g définies sur tout voisinage $\mathcal{V}_a$ de a.

$$\text{Si,} \quad \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a,\ g(x) \leqslant f(x), \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell' \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \end{cases} \qquad \text{alors} \quad \ell' \leqslant \ell.$$

On parle souvent de conservation des inégalités **larges** par passage à la limite.

Remarques :

- La proposition (15) n'est pas vraie avec des inégalités strictes : Si $g(x) < f(x)$ alors on ne peut pas en déduire $\ell < \ell'$ mais seulement $\ell \leqslant \ell'$: Prenez, par exemple $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ qui tendent toutes deux vers 0 alors qu'il est clair que $-\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$.

Proposition 15 (Limite et ordre) :

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et deux fonctions f et g définies sur tout voisinage $\mathcal{V}_a$ de a.

$$\text{Si,} \quad \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a,\ g(x) \leqslant f(x), \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell' \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \end{cases} \qquad \text{alors} \quad \ell' \leqslant \ell.$$

On parle souvent de conservation des inégalités **larges** par passage à la limite.

Remarques :

- La proposition (15) n'est pas vraie avec des inégalités strictes : Si $g(x) < f(x)$ alors on ne peut pas en déduire $\ell < \ell'$ mais seulement $\ell \leqslant \ell'$: Prenez, par exemple $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ qui tendent toutes deux vers 0 alors qu'il est clair que $-\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{x},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^*$.
- La proposition (15) peut s'étendre aux limites à gauche ou à droite. (Il suffit simplement de modifier l'intervalle de définition des fonctions).

La proposition (15) permet de comparer deux limites, mais elle ne permet pas de démontrer l'existence de la limite d'une fonction ce qui n'est pas le cas des théorèmes qui suivent.

Théorème 16 :

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, trois fonctions f, g et h définies sur un voisinage ouvert $\mathcal{V}_a$ de a et ℓ un réel.

Théorème d'encadrement :

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a, \quad g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

Théorème 16 :

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, trois fonctions f, g et h définies sur un voisinage ouvert $\mathcal{V}_a$ de a et ℓ un réel.

Théorème d'encadrement :

$$\text{Si } \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a, \quad g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$

Théorème de majoration :

$$\text{Si } \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a, \quad g(x) \leqslant f(x) \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

Théorème 16 :

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, trois fonctions f, g et h définies sur un voisinage ouvert $\mathcal{V}_a$ de a et ℓ un réel.

Théorème d'encadrement :

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a, \quad g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

Théorème de majoration :

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a, \quad g(x) \leqslant f(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

Théorème de minoration :

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a, \quad f(x) \leqslant g(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Exercice 11 :

Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x+\cos(x)$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

Les variations de la fonction peuvent aussi « forcer » certaines propriétés de la limite.

III. Propriétés de la limite

2. La monotonie contrôle la limite

Théorème 17 (Théorème de la limite monotone) :

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ $(a < b)$ et $f :]a\,;b[\longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b, et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \sup\limits_{]a;b[}(f) < +\infty$.

Théorème 17 (Théorème de la limite monotone) :

Soient a, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ $(a < b)$ et $f :]a\,;b[\longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b, et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \sup\limits_{]a;b[}(f) < +\infty$.
- Si f n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$.

Théorème 17 (Théorème de la limite monotone) :

Soient $a,\, b \in \overline{\mathbb{R}}$ $(a < b)$ et $f :]a\,;b[\longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b, et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \sup\limits_{]a;b[}(f) < +\infty$.
- Si f n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$.

Remarque : Lorsque f est décroissante, on a les résultats correspondants :

- Si f est décroissante et minorée, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \inf\limits_{]a;b[}(f) > -\infty$.
- Si f est décroissante et non minorée, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x) = -\infty$.

Proposition 18 :

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ $(a < b)$ et $f :]a\,;b[\longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante et $x_0 \in]a\,;b[$.

Alors, f admet une limite à gauche et une limite à droite finies en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

III. Propriétés de la limite

3. Limites à gauche et à droite

Proposition 18 :

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ $(a < b)$ et $f :]a\,;b[\longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante et $x_0 \in]a\,;b[$.

Alors, f admet une limite à gauche et une limite à droite finies en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

On retiendra le théorème et la proposition précédents sous la forme ci-dessous :

Corollaire 18.1 :

Toute fonction monotone possède une limite à gauche et une limite à droite en tout point en lequel cela a un sens.

Afin de bien le comprendre, précisons cet énoncé dans un cas particulier d'une fonction $f : [a\,; b[\longmapsto \mathbb{R}$ croissante avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in\,]a\,; +\infty]$.

À retenir :

Le théorème de la limite monotone affirme que :

1. la limite $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ EXISTE et elle est forcément FINIE car $f(a) \leqslant \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ par passage à la limite,

Afin de bien le comprendre, précisons cet énoncé dans un cas particulier d'une fonction $f : [a\,;b[\longmapsto \mathbb{R}$ croissante avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a\,;+\infty]$.

À retenir :

Le théorème de la limite monotone affirme que :

1. la limite $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ EXISTE et elle est forcément FINIE car $f(a) \leqslant \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ par passage à la limite,
2. pour tout $c \in]a\,;b[$, les limites $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ EXISTENT et elles sont forcément FINIES car $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$,

Afin de bien le comprendre, précisons cet énoncé dans un cas particulier d'une fonction $f : [a\,;b[\longmapsto \mathbb{R}$ croissante avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in\ ]a\,;+\infty]$.

À retenir :

Le théorème de la limite monotone affirme que :

1. la limite $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ EXISTE et elle est forcément FINIE car $f(a) \leqslant \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ par passage à la limite,
2. pour tout $c \in\ ]a\,;b[$, les limites $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ EXISTENT et elles sont forcément FINIES car $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$,
3. la limite $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ EXISTE et elle est soit finie, soit égale à $+\infty$.

IV. Extension aux fonctions complexes

Définition/Théorème 5 (Limite d'une fonction complexe en un point) :

Soit $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$.

On dit que f admet ℓ pour limite en a si :

$$\forall\, \mathrm{V}_\ell \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(\ell), \quad \exists\, \mathrm{V}_a \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(a), \quad \forall\, x \in \mathrm{D} \cap \mathrm{V}_a, \quad f(x) \in \mathrm{V}_\ell,$$

Définition/Théorème 5 (Limite d'une fonction complexe en un point) :

Soit $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$.

On dit que f admet ℓ pour limite en a si :

$$\forall\, \mathrm{V}_\ell \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(\ell), \quad \exists\, \mathrm{V}_a \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(a), \quad \forall\, x \in \mathrm{D} \cap \mathrm{V}_a, \quad f(x) \in \mathrm{V}_\ell,$$

i.e.

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0, \quad \forall\, x \in \mathrm{D}, \quad |x-a| < \alpha \implies |f(x)-\ell| < \varepsilon,$$

IV. Extension aux fonctions complexes

Définition/Théorème 5 (Limite d'une fonction complexe en un point) :

Soit $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$.

On dit que f admet ℓ pour limite en a si :

$$\forall\, \mathrm{V}_\ell \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(\ell), \quad \exists\, \mathrm{V}_a \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(a), \quad \forall\, x \in \mathrm{D} \cap \mathrm{V}_a, \quad f(x) \in \mathrm{V}_\ell,$$

i.e.

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0, \quad \forall\, x \in \mathrm{D}, \quad |x - a| < \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

ou encore

$$\lim_{x \to a} |f(x) - \ell| = 0.$$

IV. Extension aux fonctions complexes

Définition/Théorème 5 (Limite d'une fonction complexe en un point) :

Soit $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$.

On dit que f admet ℓ pour limite en a si :

$$\forall \, \mathrm{V}_\ell \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(\ell), \quad \exists \, \mathrm{V}_a \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(a), \quad \forall \, x \in \mathrm{D} \cap \mathrm{V}_a, \quad f(x) \in \mathrm{V}_\ell,$$

i.e.

$$\forall \, \varepsilon > 0, \quad \exists \, \alpha > 0, \quad \forall \, x \in \mathrm{D}, \quad |x - a| < \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

ou encore

$$\lim_{x \to a} |f(x) - \ell| = 0.$$

Le théorème d'unicité de la limite est encore valable, ce qui autorise la notation

$$\lim_{x \to a} f(x).$$

Théorème 19 (Parties réelle et imaginaire) :

Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to a} \mathrm{Re}\,(f)(x) = \mathrm{Re}\,(\ell) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \mathrm{Im}\,(f)(x) = \mathrm{Im}\,(\ell).$$

IV. Extension aux fonctions complexes

Théorème 19 (Parties réelle et imaginaire) :

Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to a} \mathrm{Re}\,(f)(x) = \mathrm{Re}\,(\ell) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \mathrm{Im}\,(f)(x) = \mathrm{Im}\,(\ell).$$

Définition 6 (Fonction bornée) :

Soit $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction.

On dit que f est bornée s'il existe un réel $\mathrm{K} \geqslant 0$ tel que $\forall\, x \in \mathrm{D}, \quad |f(x)| \leqslant \mathrm{K}$.

Globalement, on dit que f est bornée sur D si, et seulement si $|f|$ l'est.

IV. Extension aux fonctions complexes

Théorème 19 (Parties réelle et imaginaire) :

Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to a} \mathrm{Re}\,(f)(x) = \mathrm{Re}\,(\ell) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \mathrm{Im}\,(f)(x) = \mathrm{Im}\,(\ell).$$

Définition 6 (Fonction bornée) :

Soit $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction.

On dit que f est bornée s'il existe un réel $\mathrm{K} \geqslant 0$ tel que $\forall\, x \in \mathrm{D},\quad |f(x)| \leqslant \mathrm{K}$.

Globalement, on dit que f est bornée sur D si, et seulement si $|f|$ l'est.
En particulier,

Corollaire 19.1 :

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Si $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ admet une limite finie en $a \in \overline{\mathrm{D}}$ alors f est bornée sur un voisinage de a.

ATTENTION

Pas de $\pm\infty$ dans $\mathbb{C}$ ni de théorèmes basés sur la relation d'ordre.

IV. Extension aux fonctions complexes

ATTENTION

Pas de $\pm\infty$ dans $\mathbb{C}$ ni de théorèmes basés sur la relation d'ordre.

Les notions de limite à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, sont maintenues pour les fonctions complexes, de même que les résultats sur les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse, à ceci près que les symboles $\pm\infty$ sont bannis.

IV. Extension aux fonctions complexes

ATTENTION

Pas de $\pm\infty$ dans $\mathbb{C}$ ni de théorèmes basés sur la relation d'ordre.

Les notions de limite à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, sont maintenues pour les fonctions complexes, de même que les résultats sur les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse, à ceci près que les symboles $\pm\infty$ sont bannis.

Les grands théorèmes d'existence de limite - théorèmes d'encadrement/minoration/majoration et théorème de la limite monotone - n'ont pas de sens dans le cas complexe car ils utilisent de façon essentielle la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$.