

# *Fonctions de la variable réelle -* CONTINUITÉ

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 15



- ① Continuité
  - Fonction continue
  - Stabilité algébrique
  - Prolongement par continuité
  - Continuité et suites
  
- ② Théorèmes de continuité globale
  - Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences
  - Image d'un segment
  
- ③ Continuité des fonctions monotones
  - Lien entre monotonie et continuité
  - Continuité et bijectivité
  
- ④ Fonctions à valeurs complexes





Longtemps, les mathématiques se sont développées au service des autres sciences. La séparation des différentes sciences est d'ailleurs tardive, et nombreux ont été les mathématiciens à avoir également été des physiciens de renommée, comme Newton par exemple. Les mathématiques ont d'abord été vues comme un outil :

- au service de la mécanique et de l'ingénierie (Archimède)
- au service de l'astronomie (géométrie grecque, Ptolémée, écoles indienne et arabe)
- au service de toute étude nécessitant d'être chiffrée pour obtenir des ordres de grandeurs.



Le dernier point découle l'importance du développement du calcul numérique (calcul approché, en opposition au calcul algébrique). C'est ce point de vue qui est à la base des procédés d'approximation (méthode de Newton de recherche d'un zéro, méthodes approchées de calcul d'intégrales), aboutissant notamment à la notion de convergence (qui donne la validité de l'approximation à l'infini).



Ainsi, l'utilisation de l'outil est souvent à la base de sa définition, et a souvent précédé sa théorisation : les mathématiques ont évolué de façon empirique.





ans ce chapitre nous suivons le processus inverse et donnons les outils permettant une étude efficace des fonctions. On commencera par redéfinir de manière uniforme et cohérente la notion de continuité basée sur la notion de limite revue également dans le chapitre précédent.



otre progression nous ramènera également sur un théorème fondamental de l'analyse réelle, le fameux **théorème des valeurs intermédiaires** que vous connaissez déjà bien mais dont la démonstration vous échappait encore fondamentalement.

Les fonctions que l'on étudie en analyse sont généralement définies sur des intervalles ou des réunions d'intervalles comme  $\mathbb{R}^*$  ou  $[0; 1[ \cup [2; 3]$ , voire  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ .

Dans tout ce chapitre, la lettre  $D$  qui nous servira d'ensemble de définition désignera cependant, sauf mention contraire, une partie quelconque de  $\mathbb{R}$ .

On notera, par ailleurs,  $\mathbb{K}$  l'un des corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .



# I. Continuité

- 1 Continuité
  - Fonction continue
  - Stabilité algébrique
  - Prolongement par continuité
  - Continuité et suites
- 2 Théorèmes de continuité globale
- 3 Continuité des fonctions monotones
- 4 Fonctions à valeurs complexes



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

Définition 1 (Fonction continue) :

Soit  $f$  une fonction définie sur un sous-ensemble  $D$  de  $\mathbb{R}$  et  $a \in D$ .

- On dit que  $f$  est continue  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

### Définition 1 (Fonction continue) :

Soit  $f$  une fonction définie sur un sous-ensemble  $D$  de  $\mathbb{R}$  et  $a \in D$ .

- On dit que  $f$  est continue  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
- On dit que  $f$  est continue sur  $D$  si elle est continue en tout point de  $D$ .  
On note  $\mathcal{C}^0(D; \mathbb{R})$  leur ensemble.



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

### Définition 1 (Fonction continue) :

Soit  $f$  une fonction définie sur un sous-ensemble  $D$  de  $\mathbb{R}$  et  $a \in D$ .

- On dit que  $f$  est continue  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
- On dit que  $f$  est continue sur  $D$  si elle est continue en tout point de  $D$ .  
On note  $\mathcal{C}^0(D; \mathbb{R})$  leur ensemble.
- On dit que  $f$  est continue à gauche en  $a$  si  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a)$ .



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

### Définition I (Fonction continue) :

Soit  $f$  une fonction définie sur un sous-ensemble  $D$  de  $\mathbb{R}$  et  $a \in D$ .

- On dit que  $f$  est continue en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
- On dit que  $f$  est continue sur  $D$  si elle est continue en tout point de  $D$ .  
On note  $\mathcal{C}^0(D; \mathbb{R})$  leur ensemble.
- On dit que  $f$  est continue à gauche en  $a$  si  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a)$ .
- On dit que  $f$  est continue à droite en  $a$  si  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a)$ .



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

$f$  est continue en  $a$  si, et seulement si

- $\forall V_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a)), \exists V_{a, V_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) / f(V_{a, V_{f(a)}} \cap D) \subset V_{f(a)}$ .



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

$f$  est continue en  $a$  si, et seulement si

- $\forall V_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a)), \exists V_{a, V_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) / f(V_{a, V_{f(a)}} \cap D) \subset V_{f(a)}$ .

ou

- $\forall V_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a)), \exists V_{a, V_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) / \forall x \in D, x \in V_{a, V_{f(a)}} \implies f(x) \in V_{f(a)}$ .



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

$f$  est continue en  $a$  si, et seulement si

- $\forall V_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a)), \exists V_{a, V_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) / f(V_{a, V_{f(a)}} \cap D) \subset V_{f(a)}$ .

ou

- $\forall V_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a)), \exists V_{a, V_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) / \forall x \in D, x \in V_{a, V_{f(a)}} \implies f(x) \in V_{f(a)}$ .

ce qui revient à écrire :

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in D, |x - a| < \alpha \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

$f$  est continue en  $a$  si, et seulement si

- $\forall V_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a)), \exists V_{a, V_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) / f(V_{a, V_{f(a)}} \cap D) \subset V_{f(a)}$ .

ou

- $\forall V_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a)), \exists V_{a, V_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) / \forall x \in D, x \in V_{a, V_{f(a)}} \implies f(x) \in V_{f(a)}$ .

ce qui revient à écrire :

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in D, |x - a| < \alpha \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

ou encore :

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in D, x \in ]a - \alpha; a + \alpha[ \implies f(x) \in ]f(a) - \varepsilon; f(a) + \varepsilon[$ .



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

$f$  est continue en  $a$  si, et seulement si

- $\forall V_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a)), \exists V_{a, V_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) / f(V_{a, V_{f(a)}} \cap D) \subset V_{f(a)}$ .

ou

- $\forall V_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a)), \exists V_{a, V_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) / \forall x \in D, x \in V_{a, V_{f(a)}} \implies f(x) \in V_{f(a)}$ .

ce qui revient à écrire :

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in D, |x - a| < \alpha \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

ou encore :

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in D, x \in ]a - \alpha; a + \alpha[ \implies f(x) \in ]f(a) - \varepsilon; f(a) + \varepsilon[$ .

**Interprétation graphique :** Une fonction  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  si elle est définie sur cet intervalle et si sa courbe représentative se trace d'un « trait continu », sans lever le crayon.



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

### ATTENTION

Pour pouvoir parler de continuité en  $a$ , il est nécessaire que  $f$  soit définie en  $a$ . Cela revient en fait à exiger seulement que la limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe.

Cela n'a donc pas de sens de chercher si la fonction inverse est continue en 0. S'il faut lever le crayon pour tracer la courbe de la fonction inverse sur  $\mathbb{R}^*$ , c'est simplement parce qu'elle n'est pas définie en 0.



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

Remarques :

- La continuité d'une fonction est une propriété locale. Cela aura de grandes conséquences.



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

Remarques :

- La continuité d'une fonction est une propriété locale. Cela aura de grandes conséquences.
- Une fonction continue en  $a$  y est bornée dans un voisinage de  $a$ .



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

Remarques :

- La continuité d'une fonction est une propriété locale. Cela aura de grandes conséquences.
- Une fonction continue en  $a$  y est bornée dans un voisinage de  $a$ .
- $f$  n'est pas continue en  $a$  si, et seulement si

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* / \exists x_0(\alpha, \varepsilon) \in D, |x_0 - a| \leq \alpha \text{ et } |f(x_0) - f(a)| > \varepsilon. \quad (1)$$



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

Remarques :

- La continuité d'une fonction est une propriété locale. Cela aura de grandes conséquences.
- Une fonction continue en  $a$  y est bornée dans un voisinage de  $a$ .
- $f$  n'est pas continue en  $a$  si, et seulement si

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* / \exists x_0(\alpha, \varepsilon) \in D, |x_0 - a| \leq \alpha \text{ et } |f(x_0) - f(a)| > \varepsilon. \quad (1)$$

- $f$  est continue à gauche en  $a$  si  $f_{|D \cap ]-\infty; a[}$  est continue en  $a$  et continue à droite si  $f_{|D \cap ]a; +\infty[}$  est continue en  $a$ .



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

Remarques :

- La continuité d'une fonction est une propriété locale. Cela aura de grandes conséquences.
- Une fonction continue en  $a$  y est bornée dans un voisinage de  $a$ .
- $f$  n'est pas continue en  $a$  si, et seulement si

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* / \exists x_0(\alpha, \varepsilon) \in D, |x_0 - a| \leq \alpha \text{ et } |f(x_0) - f(a)| > \varepsilon. \quad (1)$$

- $f$  est continue à gauche en  $a$  si  $f_{|D \cap ]-\infty; a[}$  est continue en  $a$  et continue à droite si  $f_{|D \cap ]a; +\infty[}$  est continue en  $a$ .



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

Remarques :

- La continuité d'une fonction est une propriété locale. Cela aura de grandes conséquences.
- Une fonction continue en  $a$  y est bornée dans un voisinage de  $a$ .
- $f$  n'est pas continue en  $a$  si, et seulement si

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* / \exists x_0(\alpha, \varepsilon) \in D, |x_0 - a| \leq \alpha \text{ et } |f(x_0) - f(a)| > \varepsilon. \quad (1)$$

- $f$  est continue à gauche en  $a$  si  $f_{|D \cap ]-\infty; a[}$  est continue en  $a$  et continue à droite si  $f_{|D \cap ]a; +\infty[}$  est continue en  $a$ .

Exemple 1 :

La fonction valeur absolue  $x \mapsto |\cdot|$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

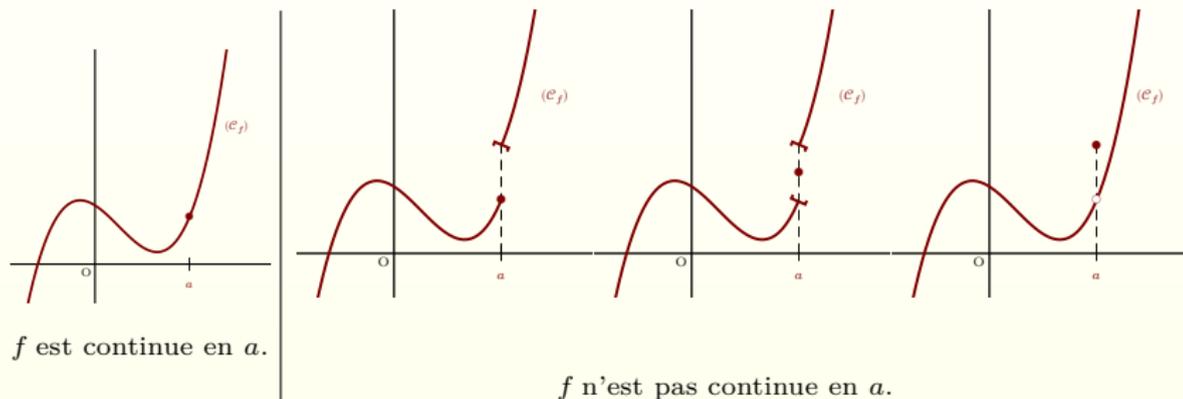


Figure 1 – Continuité et discontinuité en un point.



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

Exemples 2 :

- Toute fonction constante sur  $\mathbb{R}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

### Exemples 2 :

- Toute fonction constante sur  $\mathbb{R}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction  $\text{Id}_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

### Exemples 2 :

- Toute fonction constante sur  $\mathbb{R}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction  $\text{Id}_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction inverse  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ .



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

### Exemples 2 :

- Toute fonction constante sur  $\mathbb{R}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction  $\text{Id}_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction inverse  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ .



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

### Exemples 2 :

- Toute fonction constante sur  $\mathbb{R}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction  $Id_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction inverse  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ .
- La fonction  $x \mapsto \lfloor \cdot \rfloor$  est définie sur  $\mathbb{R}$  mais discontinue en tout point de  $\mathbb{Z}$ . Plus précisément, la fonction  $x \mapsto \lfloor \cdot \rfloor$  est continue à droite en tout point de  $\mathbb{R}$  mais n'est continue à gauche qu'en tout point de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

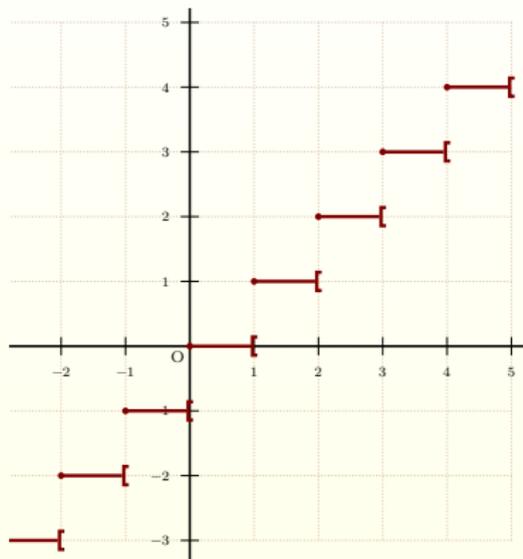


Figure 2 -  $x \mapsto [\cdot]$



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

**Théorème I (Continuité à gauche et à droite) :**

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction et  $a \in D$  un point au voisinage duquel  $f$  est définie à gauche et à droite.

$f$  est continue en  $a$  si et seulement si  $f$  est continue à gauche et à droite en  $a$ .



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

**Théorème 1 (Continuité à gauche et à droite) :**

Soient  $f : D \mapsto \mathbb{C}$  une fonction et  $a \in D$  un point au voisinage duquel  $f$  est définie à gauche et à droite.

$f$  est continue en  $a$  si et seulement si  $f$  est continue à gauche et à droite en  $a$ .

Pour tout  $x \in [0; 1[$ ,  $\lfloor x \rfloor = 0$  et la fonction  $x \mapsto 0$  est continue sur  $[0; 1[$ , mais peut-on pour autant dire que la fonction  $x \mapsto \lfloor \cdot \rfloor$  est continue sur  $[0; 1[$  ?

**Non !** Ces deux fonctions sont définies sur  $\mathbb{R}$  tout entier et coïncident sur  $[0; 1[$ , mais leur continuité en 0 dépend aussi de leur comportement au voisinage de 0 À GAUCHE *i.e.* à l'extérieur de  $[0; 1[$ .

Alors que la restriction  $x \mapsto \lfloor \cdot \rfloor_{|[0;1[}$  est bien continue sur  $[0; 1[$  tout entier, la fonction  $x \mapsto \lfloor \cdot \rfloor$  ne l'est que sur  $]0; 1[$ . En particulier, elle N'est PAS continue en 0.

**ATTENTION**



# I. Continuité

## 1. Fonction continue

Exercice 1 :

Tracer le graphe de  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{1+x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  soit continue en 0.



# I. Continuité

## 2. Stabilité algébrique

Proposition 2 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies et continues sur un ensemble  $D$ .

- 1  $|f|$  est continue sur  $D$ .



# I. Continuité

## 2. Stabilité algébrique

Proposition 2 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies et continues sur un ensemble  $D$ .

- 1  $|f|$  est continue sur  $D$ .
- 2 Toute combinaison linéaire  $\lambda f + g$  de fonctions continues sur  $D$  est continue sur  $D$ .



# I. Continuité

## 2. Stabilité algébrique

Proposition 2 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies et continues sur un ensemble  $D$ .

- 1  $|f|$  est continue sur  $D$ .
- 2 Toute combinaison linéaire  $\lambda f + g$  de fonctions continues sur  $D$  est continue sur  $D$ .
- 3 Le produit  $f \times g$  de deux fonctions continues sur  $D$  est continue sur  $D$ .



# I. Continuité

## 2. Stabilité algébrique

Proposition 2 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies et continues sur un ensemble  $D$ .

- ①  $|f|$  est continue sur  $D$ .
- ② Toute combinaison linéaire  $\lambda f + g$  de fonctions continues sur  $D$  est continue sur  $D$ .
- ③ Le produit  $f \times g$  de deux fonctions continues sur  $D$  est continue sur  $D$ .
- ④ Si  $g$  ne s'annule pas sur  $D$  alors la fonction  $\frac{f}{g}$  est continue sur  $D$ .



# I. Continuité

## 2. Stabilité algébrique

Proposition 2 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies et continues sur un ensemble  $D$ .

- 1  $|f|$  est continue sur  $D$ .
- 2 Toute combinaison linéaire  $\lambda f + g$  de fonctions continues sur  $D$  est continue sur  $D$ .
- 3 Le produit  $f \times g$  de deux fonctions continues sur  $D$  est continue sur  $D$ .
- 4 Si  $g$  ne s'annule pas sur  $D$  alors la fonction  $\frac{f}{g}$  est continue sur  $D$ .
- 5 Si  $f(D) \subset E$  et si  $g$  est continue sur  $E$  alors  $g \circ f$  est continue sur  $D$ .



# I. Continuité

## 2. Stabilité algébrique

Remarques :

- On dit que  $\mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$  est une  $\mathbb{R}$ -algèbre pour les opérations usuelles *i.e.* que  $\mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$  est stable par combinaisons linéaires et produits.



# I. Continuité

## 2. Stabilité algébrique

Remarques :

- On dit que  $\mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$  est une  $\mathbb{R}$ -algèbre pour les opérations usuelles *i.e.* que  $\mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$  est stable par combinaisons linéaires et produits.
- Si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $I$  alors  $\sup(f; g)$  et  $\inf(f; g)$  le sont aussi.  
Il suffit de remarquer que :

$$\sup(f; g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \quad \text{et} \quad \inf(f; g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}.$$

En particulier  $f^+ = \sup(f; 0)$  et  $f^- = \inf(f; 0)$  le sont.



# I. Continuité

## 2. Stabilité algébrique

### Méthode 1 :

Avant de s'intéresser, si nécessaire, à des points locaux du domaine de définition  $D$  d'une fonction  $f$ , il suffira bien souvent de préciser la continuité de quelques fonctions usuelles sur un sous-ensemble  $D'$  de  $D$  et d'invoquer les « théorèmes généraux » pour conclure à la continuité de  $f$  sur  $D'$ .

On étudiera alors la continuité et l'éventualité d'un prolongement en les points de  $D \setminus D'$ .

### ATTENTION

On prendra bien garde à préciser que les quotients ne s'annulent pas, que les expressions sous les racines sont positives, que celles dans les logarithmes strictement positives, celles dans les arcsin et arccos entre  $-1$  et  $1$ , ... et on précisera bien les domaines manipulés dans les composées.



# I. Continuité

## 2. Stabilité algébrique

Exemple 3 :

La fonction  $x \mapsto \left(\ln\left(x^2 + e^{\frac{1}{x}}\right)\right)^2$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^*$ .

En effet,

- La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  (à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ) et la fonction  $x \mapsto e^x$  l'est sur  $\mathbb{R}$ , donc par composition  $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ .



# I. Continuité

## 2. Stabilité algébrique

### Exemple 3 :

La fonction  $x \mapsto \left(\ln\left(x^2 + e^{\frac{1}{x}}\right)\right)^2$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^*$ .

En effet,

- La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  (à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ) et la fonction  $x \mapsto e^x$  l'est sur  $\mathbb{R}$ , donc par composition  $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ .
- La fonction  $x \mapsto x^2$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc sur  $\mathbb{R}^*$ . Par somme,  $x \mapsto x^2 + e^{\frac{1}{x}}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ .



# I. Continuité

## 2. Stabilité algébrique

### Exemple 3 :

La fonction  $x \mapsto \left(\ln\left(x^2 + e^{\frac{1}{x}}\right)\right)^2$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^*$ .

En effet,

- La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  (à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ) et la fonction  $x \mapsto e^x$  l'est sur  $\mathbb{R}$ , donc par composition  $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ .
- La fonction  $x \mapsto x^2$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc sur  $\mathbb{R}^*$ . Par somme,  $x \mapsto x^2 + e^{\frac{1}{x}}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ .
- La fonction  $x \mapsto x^2 + e^{\frac{1}{x}}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  et  $x \mapsto \ln(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc par composition  $x \mapsto \ln\left(x^2 + e^{\frac{1}{x}}\right)$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  (à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ).



# I. Continuité

## 2. Stabilité algébrique

### Exemple 3 :

La fonction  $x \mapsto \left(\ln\left(x^2 + e^{\frac{1}{x}}\right)\right)^2$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^*$ .

En effet,

- La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  (à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ) et la fonction  $x \mapsto e^x$  l'est sur  $\mathbb{R}$ , donc par composition  $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ .
- La fonction  $x \mapsto x^2$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc sur  $\mathbb{R}^*$ . Par somme,  $x \mapsto x^2 + e^{\frac{1}{x}}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ .
- La fonction  $x \mapsto x^2 + e^{\frac{1}{x}}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  et  $x \mapsto \ln(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , donc par composition  $x \mapsto \ln\left(x^2 + e^{\frac{1}{x}}\right)$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  (à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ).
- Enfin, la fonction  $x \mapsto x^2$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Le résultat découle donc d'une dernière composition.



# I. Continuité

## 2. Stabilité algébrique

Exercice 2 :

Montrer que la fonction  $x \mapsto \arcsin\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .



# I. Continuité

## 2. Stabilité algébrique

Exemple 4 (Fonction  $k$ -lipschitzienne) :

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne de rapport  $k > 0$  si pour tout  $(x; y) \in I^2$  :

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

La fonction est dite **contractante** si  $k < 1$ .

Les fonctions lipschitziennes sont continues sur leur ensemble de définition.



# I. Continuité

## 2. Stabilité algébrique

### Exercice 3 :

Étudier la continuité des fonctions suivantes au point  $a$  :

①  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  en  $a = 0$ .

$$x \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{array} \right.$$



# I. Continuité

## 2. Stabilité algébrique

### Exercice 3 :

Étudier la continuité des fonctions suivantes au point  $a$  :

①  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  en  $a = 0$ .

$$x \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

②  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  en  $a = 2$ .

$$x \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 2 \end{cases}$$



# I. Continuité

## 3. Prolongement par continuité

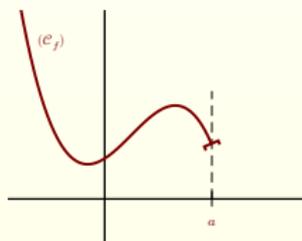
### Définition 2 :

Soient  $f : D \mapsto \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $D$  et  $a \in \mathbb{R} \setminus D$  adhérent à  $D$ .

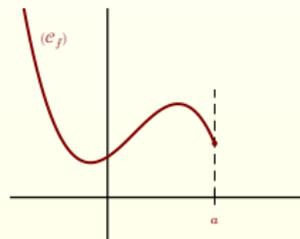
On dit que  $f$  est **prolongeable par continuité** en  $a$  s'il existe une fonction  $\tilde{f} : D \cup \{a\} \mapsto \mathbb{R}$  continue en  $a$  telle que :

$$\tilde{f}|_D = f.$$

La fonction  $\tilde{f}$  est appelée **prolongement par continuité** de  $f$  en  $a$ .



$f$  n'est pas définie en  $a$ .



$\tilde{f}$  est définie, continue en  $a$  et prolonge  $f$  en  $a$ .

Figure 3 – Prolongement d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition



# I. Continuité

## 3. Prolongement par continuité

### ATTENTION

Dans la définition, il doit être clair que  $a$  n'appartient pas à  $D$  *i.e.*  $f$  n'est pas définie en  $a$ .

Les fonctions  $f$  et  $\tilde{f}$  sont distinctes en toute rigueur car elles n'ont pas le même ensemble de définition, mais on choisit généralement de noter encore  $f$  le prolongement  $\tilde{f}$  par souci de simplicité sans autre forme de procès.



# I. Continuité

## 3. Prolongement par continuité

### Théorème 3 :

Soient  $f : D \mapsto \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $D$  et  $a \in \mathbb{R} \setminus D$  adhérent à  $D$ .

$f$  est prolongeable par continuité en  $a$  si, et seulement si  $f$  admet une limite finie  $\ell \in \mathbb{R}$  en  $a$ .

Dans ce cas, l'unique prolongement par continuité de  $f$  en  $a$  est donné par :

$$\tilde{f} : D \cup \{a\} \longmapsto \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ \ell & \text{si } x = a. \end{cases}$$



# I. Continuité

## 3. Prolongement par continuité

### Exemples 5 :

- La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = x \ln x$  admet un prolongement par continuité en 0 en posant  $f(0) = 0$ .



# I. Continuité

## 3. Prolongement par continuité

### Exemples 5 :

- La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = x \ln x$  admet un prolongement par continuité en 0 en posant  $f(0) = 0$ .
- Les fonction  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  et  $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$  admettent un prolongement par continuité en 0 en posant  $f(0) = g(0) = 1$ .



# I. Continuité

## 3. Prolongement par continuité

### Exemples 5 :

- La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = x \ln x$  admet un prolongement par continuité en 0 en posant  $f(0) = 0$ .
- Les fonction  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  et  $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$  admettent un prolongement par continuité en 0 en posant  $f(0) = g(0) = 1$ .
- Pour tout  $\alpha > 0$ , la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$  admet un prolongement par continuité en 0 en posant  $0^\alpha = 0$ .



# I. Continuité

## 3. Prolongement par continuité

Exercice 4 :

Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$ .

- 1 Montrer que  $f$  peut se prolonger en une fonction continue en 0.



# I. Continuité

## 3. Prolongement par continuité

### Exercice 4 :

Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$ .

- 1 Montrer que  $f$  peut se prolonger en une fonction continue en 0.
- 2 Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x) + 1$ .  
En déduire que  $f$  peut se prolonger en une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .



# I. Continuité

## 4. Continuité et suites

Proposition 4 (Caractérisation séquentielle de la continuité) :

Soient  $f : D \mapsto \mathbb{C}$  une fonction et  $a \in D$ .

$f$  est continue en  $a$  si, et seulement si pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $D$ , qui tend vers  $a$ , la suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $f(a)$ .



# I. Continuité

## 4. Continuité et suites

Proposition 4 (Caractérisation séquentielle de la continuité) :

Soient  $f : D \mapsto \mathbb{C}$  une fonction et  $a \in D$ .

$f$  est continue en  $a$  si, et seulement si pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $D$ , qui tend vers  $a$ , la suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $f(a)$ .

En résumé, pour une fonction continue

$$f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \dots\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\dots).$$



# I. Continuité

## 4. Continuité et suites

En pratique, ce théorème est plus souvent utilisé dans deux contextes bien précis :

- celui des suites récurrentes  $u_{n+1} = f(u_n)$  :

*Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$  ET si  $f$  continue en  $\ell$  alors  $f(\ell) = \ell$ .*



# I. Continuité

## 4. Continuité et suites

En pratique, ce théorème est plus souvent utilisé dans deux contextes bien précis :

- celui des suites récurrentes  $u_{n+1} = f(u_n)$  :

*Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$  ET si  $f$  continue en  $\ell$  alors  $f(\ell) = \ell$ .*

- celui des fonctions discontinues :

Par la contraposée pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point  $a$ , il suffit de trouver deux suites qui convergent vers  $a$  mais telles que leur image converge soit pas soit vers deux limites différentes comme à l'*exercice (5)*.



# I. Continuité

## 4. Continuité et suites

### Exercice 5 :

Étudier la continuité en 0 de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ .

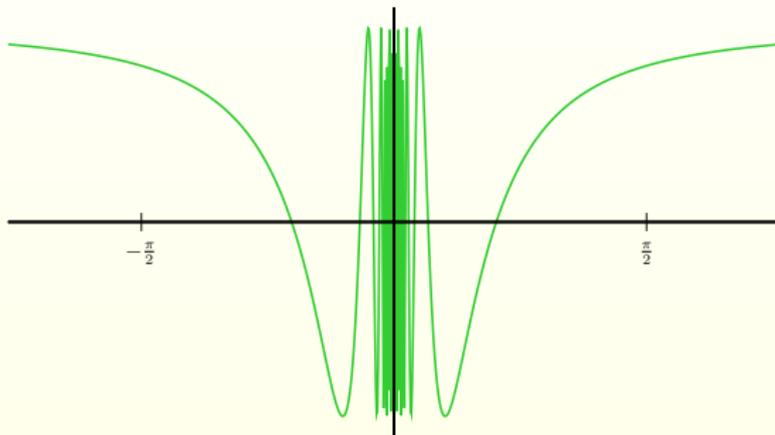


Figure 4 -  $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  n'est pas continue en 0.



# I. Continuité

## 4. Continuité et suites

Exemple 6 (Fonction continue sur  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$  et discontinue sur  $\mathbb{Q}$ ) :

La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ est rationnel sous sa forme irréductible,} \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$$

est continue en tout point irrationnel et discontinue ailleurs.

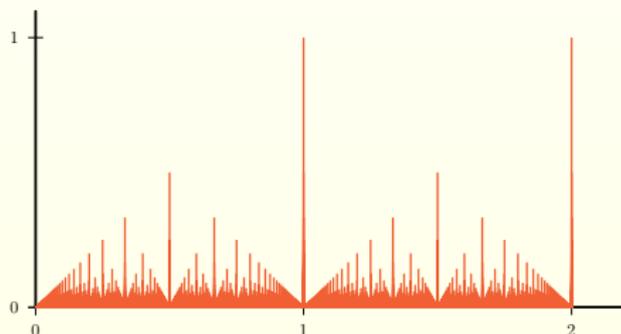


Figure 5 – Graphe de la fonction  $f$ , dite de Thomae, continue sur  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$  et discontinue sur



## II. Théorèmes de continuité globale

- 1 Continuité
- 2 Théorèmes de continuité globale
  - Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences
  - Image d'un segment
- 3 Continuité des fonctions monotones
- 4 Fonctions à valeurs complexes



## II. Théorèmes de continuité globale

### ATTENTION

Les théorèmes de ce paragraphe ne concernent que les fonctions à valeurs réelles.

La continuité globale désigne la continuité sur un intervalle par opposition à la continuité locale en un point.



## II. Théorèmes de continuité globale

### 1. Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences

**Théorème 5 (dit de Bolzano) :**

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$  et  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ .

Si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes opposés, alors  $f$  s'annule au moins une fois sur  $[a; b]$  i.e.  $\exists c \in [a; b], f(c) = 0$ .



## II. Théorèmes de continuité globale

### 1. Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences

**Théorème 5 (dit de Bolzano) :**

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$  et  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ .

Si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes opposés, alors  $f$  s'annule au moins une fois sur  $[a; b]$  i.e.  $\exists c \in [a; b], f(c) = 0$ .

**Exercice 6 :**

Montrer que l'équation  $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$  admet au moins trois solutions distinctes dans  $\mathbb{R}$ .

En donner un encadrement à  $10^{-1}$  de chacune d'elles.



## II. Théorèmes de continuité globale

### 1. Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences

**Théorème 5 (dit de Bolzano) :**

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$  et  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ .

Si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes opposés, alors  $f$  s'annule au moins une fois sur  $[a; b]$  i.e.  $\exists c \in [a; b], f(c) = 0$ .

**Exercice 6 :**

Montrer que l'équation  $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$  admet au moins trois solutions distinctes dans  $\mathbb{R}$ .

En donner un encadrement à  $10^{-1}$  de chacune d'elles.

**Corollaire 5.1 :**

Tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.



## II. Théorèmes de continuité globale

### 1. Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences

**Théorème 6 (Théorème des valeurs intermédiaires) :**

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Plus précisément, soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq b$  et  $f \in \mathcal{C}^0([a; b]; \mathbb{R})$ .

Tout réel compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  possède un antécédent par  $f$  dans  $[a; b]$ .

« Pour tout réel  $k$  entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe  $c \in [a; b]$  tel que  $f(c) = k$ . »

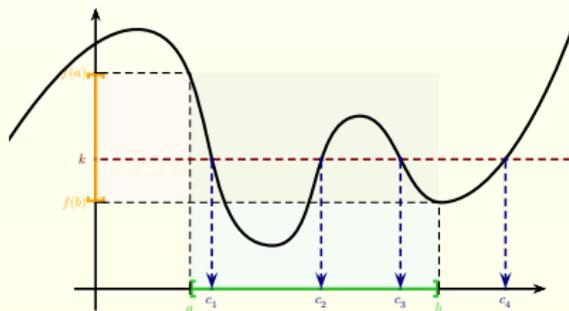


Figure 6 – Une fonction continue sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  prend toutes les valeurs de celui-ci.



## II. Théorèmes de continuité globale

### 1. Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences

Si  $I$  est un INTERVALLE et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, cette version nouvelle du TVI affirme que  $f(I)$  est également un INTERVALLE, mais pas que  $I$  et  $f(I)$  sont de même nature.

#### ATTENTION

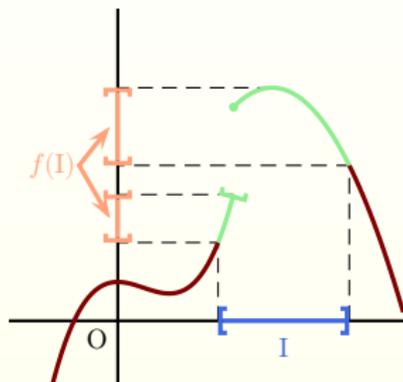
Il se peut que  $I$  soit ouvert et  $f(I)$  un segment, ou bien que  $I$  soit semi-ouvert et  $f(I)$  ouvert, ...

Comme le montrera le **théorème (7)**, ce sera, par contre, bien le cas lorsque l'intervalle est un segment *i.e.* un intervalle de la forme  $[a; b]$ .

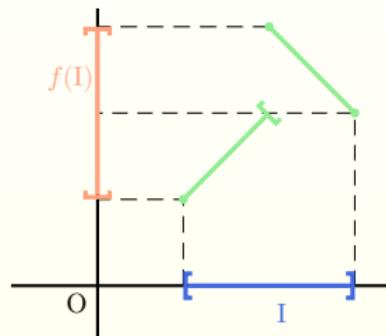


## II. Théorèmes de continuité globale

### 1. Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences



$I$  est un intervalle,  $f(I)$  n'est pas un intervalle.



$I$  et  $f(I)$  sont des intervalles (des segments).

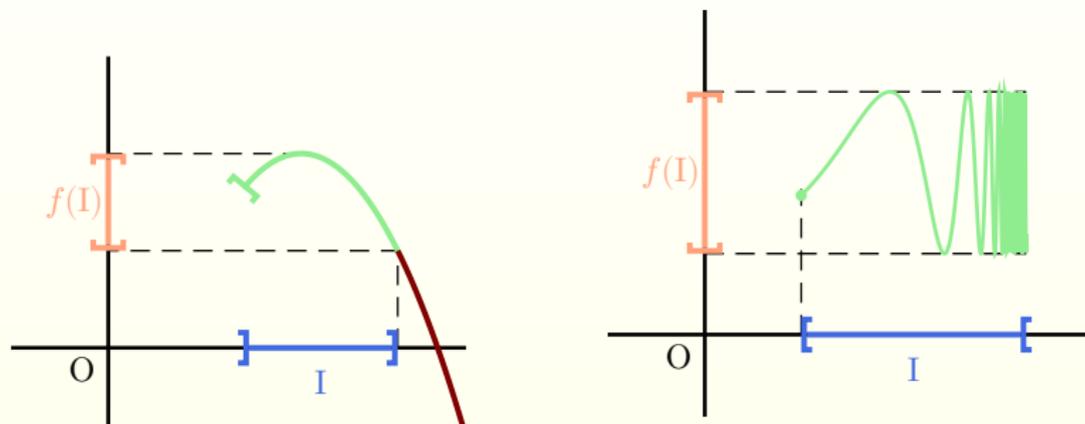
**$f$  n'est pas continue sur  $I$ .**

Figure 7 – Image d'un intervalle par une fonction



## II. Théorèmes de continuité globale

### 1. Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences



$I$  est ouvert,  $f(I)$  est fermé.

$I$  est semi-ouvert,  $f(I)$  est fermé.

**$f$  est continue sur  $I$ .**

Figure 7 – Image d'un intervalle par une fonction



## II. Théorèmes de continuité globale

### 1. Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences

*Une réflexion : Un contre-exemple à l'équivalence entre la propriété des valeurs intermédiaires et la continuité nous est donné par la fonction de l'exercice précédent*  
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

*Cette fonction n'est pas continue en 0 mais elle satisfait bien la propriété des valeurs intermédiaires pour chaque couple de points dans  $\mathbb{R}$ .*

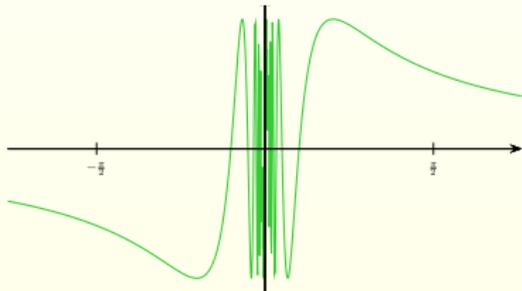


Figure 8 –  $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  ne peut être prolongeable par continuité en 0 mais vérifie la propriété du théorème des valeurs intermédiaires.



## II. Théorèmes de continuité globale

### 1. Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences

Exercice 7 :

Soit  $f$  une application continue de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ .

Démontrer que  $f$  a un point fixe, et un seul lorsqu'elle décroît.



## II. Théorèmes de continuité globale

### 1. Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences

#### Exercice 7 :

Soit  $f$  une application continue de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ .

Démontrer que  $f$  a un point fixe, et un seul lorsqu'elle décroît.

#### Exercice 8 :

Un marcheur parcourt douze kilomètres en une heure.

Démontrer qu'il existe une demi-heure pendant laquelle il parcourt exactement six kilomètres.



## II. Théorèmes de continuité globale

### 2. Image d'un segment

Rappel (Segment) :

Soient  $a < b$  des réels. On appelle **segment** l'ensemble noté  $[a; b]$  défini par :

$$[a; b] = \left\{ x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b \right\}.$$



---

[1]. La démonstration de ce théorème est admise en PTSI.

## II. Théorèmes de continuité globale

### 2. Image d'un segment

Rappel (Segment) :

Soient  $a < b$  des réels. On appelle **segment** l'ensemble noté  $[a; b]$  défini par :

$$[a; b] = \left\{ x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b \right\}.$$

En particulier, les segments de  $\mathbb{R}$  sont des fermés bornés de  $\mathbb{R}$ .

---

[1]. La démonstration de ce théorème est admise en PTSI.



## II. Théorèmes de continuité globale

### 2. Image d'un segment

Rappel (Segment) :

Soient  $a < b$  des réels. On appelle **segment** l'ensemble noté  $[a; b]$  défini par :

$$[a; b] = \left\{ x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b \right\}.$$

En particulier, les segments de  $\mathbb{R}$  sont des fermés bornés de  $\mathbb{R}$ .

**Théorème (Théorème des bornes atteintes<sup>[1]</sup>) :**

Toute fonction continue sur un SEGMENT  $y$  est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists c, d \in [a; b] \text{ tels que } f(c) = \min_{x \in [a; b]} f(x) \quad \text{et} \quad f(d) = \max_{x \in [a; b]} f(x).$$

---

[1]. La démonstration de ce théorème est admise en PTSI.



## II. Théorèmes de continuité globale

### 2. Image d'un segment

**Moralité** : Même si nous avons vu que la continuité ne préservait pas la nature des intervalles en général, une chose est sûre, un segment est toujours transformé en un segment.

En effet, si nous savions déjà que l'image de  $[a; b]$  était un intervalle, nous savons désormais que les bornes sont atteintes *i.e.*

$$f([a; b]) = [m; M] \quad \text{où} \quad m = \min_{x \in [a; b]} f(x) = f(c) \quad \text{et} \quad M = \max_{x \in [a; b]} f(x) = f(d).$$

ou, de manière équivalente :

L'image d'un SEGMENT par une fonction CONTINUE est un SEGMENT.

**ATTENTION**

Sur un intervalle borné qui n'est pas un segment, une fonction continue n'a aucune raison d'être bornée. Pensez à la fonction  $\tan$  sur  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ .



## II. Théorèmes de continuité globale

### 2. Image d'un segment

#### Exemples 1 :

Le fait que  $[a; b]$  soit un intervalle fermé borné est très important. Voici quelques exemples :

- 1  $x \mapsto x$  définie sur  $[0; +\infty[$  n'est pas majorée.



## II. Théorèmes de continuité globale

### 2. Image d'un segment

#### Exemples 1 :

Le fait que  $[a; b]$  soit un intervalle fermé borné est très important. Voici quelques exemples :

- ❶  $x \mapsto x$  définie sur  $[0; +\infty[$  n'est pas majorée.
- ❷  $x \mapsto \frac{x}{x+1}$  définie sur  $[0; +\infty[$  est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.



## II. Théorèmes de continuité globale

### 2. Image d'un segment

#### Exemples 1 :

Le fait que  $[a; b]$  soit un intervalle fermé borné est très important. Voici quelques exemples :

- ❶  $x \mapsto x$  définie sur  $[0; +\infty[$  n'est pas majorée.
- ❷  $x \mapsto \frac{x}{x+1}$  définie sur  $[0; +\infty[$  est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.
- ❸  $x \mapsto 1 - x$  définie sur  $]0; 1]$  est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.



## II. Théorèmes de continuité globale

### 2. Image d'un segment

#### Exemples 7 :

Le fait que  $[a; b]$  soit un intervalle fermé borné est très important. Voici quelques exemples :

- ❶  $x \mapsto x$  définie sur  $[0; +\infty[$  n'est pas majorée.
- ❷  $x \mapsto \frac{x}{x+1}$  définie sur  $[0; +\infty[$  est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.
- ❸  $x \mapsto 1 - x$  définie sur  $]0; 1]$  est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.
- ❹  $x \mapsto \frac{1}{x}$  définie sur  $]0; 1]$  n'est pas majorée.



## II. Théorèmes de continuité globale

### 2. Image d'un segment

#### Exemples 7 :

Le fait que  $[a; b]$  soit un intervalle fermé borné est très important. Voici quelques exemples :

- ❶  $x \mapsto x$  définie sur  $[0; +\infty[$  n'est pas majorée.
- ❷  $x \mapsto \frac{x}{x+1}$  définie sur  $[0; +\infty[$  est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.
- ❸  $x \mapsto 1 - x$  définie sur  $]0; 1]$  est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.
- ❹  $x \mapsto \frac{1}{x}$  définie sur  $]0; 1]$  n'est pas majorée.



## II. Théorèmes de continuité globale

### 2. Image d'un segment

#### Exemples 7 :

Le fait que  $[a; b]$  soit un intervalle fermé borné est très important. Voici quelques exemples :

- ❶  $x \mapsto x$  définie sur  $[0; +\infty[$  n'est pas majorée.
- ❷  $x \mapsto \frac{x}{x+1}$  définie sur  $[0; +\infty[$  est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.
- ❸  $x \mapsto 1 - x$  définie sur  $]0; 1]$  est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.
- ❹  $x \mapsto \frac{1}{x}$  définie sur  $]0; 1]$  n'est pas majorée.

#### Exercice 9 :

Montrer qu'une fonction continue et strictement positive sur un segment  $y$  est minorée par un réel strictement positif.



## II. Théorèmes de continuité globale

### 2. Image d'un segment

Corollaire 71 :

Toute fonction continue périodique définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier est bornée.



# III. Continuité des fonctions monotones

- 1 Continuité
- 2 Théorèmes de continuité globale
- 3 Continuité des fonctions monotones**
  - Lien entre monotonie et continuité
  - Continuité et bijectivité
- 4 Fonctions à valeurs complexes



### III. Continuité des fonctions monotones

#### 1. Lien entre monotonie et continuité

Tout d'abord une conséquence direct du **théorème (7)** et de celui de la limite monotone.

**Théorème 8 (TVI appliqué aux fonctions strictement monotones) :**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Toute fonction continue et strictement croissante sur  $I$  est bijective de  $I$  sur  $f(I)$  *i.e.* quels que soient  $a < b$  deux réels de  $I$ , tout réel  $y$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  admet un unique antécédent par  $f$  dans  $[a; b]$ .

De plus,  $f(I)$  est un intervalle et, pour  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ , suivant le sens de monotonie de  $f$ ,

- si  $I = [a; b]$  alors  $f(I) = [f(a); f(b)]$  ou  $f(I) = [f(b); f(a)]$ ,
- si  $I = [a; b[$  alors  $f(I) = \left[ f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$  ou  $f(I) = \left[ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right[$ ,
- si  $I = ]a; b]$  alors  $f(I) = \left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$  ou  $f(I) = \left] f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right]$ ,
- si  $I = ]a; b[$  alors  $f(I) = \left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$  ou  $f(I) = \left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$  respectivement.

### III. Continuité des fonctions monotones

#### 1. Lien entre monotonie et continuité

**Théorème 8 (TVI appliqué aux fonctions strictement monotones) :**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Toute fonction continue et strictement croissante sur  $I$  est bijective de  $I$  sur  $f(I)$  *i.e.* quels que soient  $a < b$  deux réels de  $I$ , tout réel  $y$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  admet un unique antécédent par  $f$  dans  $[a; b]$ .

De plus,  $f(I)$  est un intervalle et, pour  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ , suivant le sens de monotonie de  $f$ ,

- si  $I = [a; b]$  alors  $f(I) = [f(a); f(b)]$  ou  $f(I) = [f(b); f(a)]$ ,
- si  $I = [a; b[$  alors  $f(I) = \left[ f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$  ou  $f(I) = \left[ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right[$ ,
- si  $I = ]a; b]$  alors  $f(I) = \left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$  ou  $f(I) = \left] f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right]$ ,
- si  $I = ]a; b[$  alors  $f(I) = \left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$  ou  $f(I) = \left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$  respectivement.

En particulier, l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone est un intervalle de même nature.



### III. Continuité des fonctions monotones

#### 1. Lien entre monotonie et continuité

##### ATTENTION

Lorsque la monotonie n'est pas stricte, il se peut que les limites aux bornes exclues soit tout de même atteintes.



### III. Continuité des fonctions monotones

#### 1. Lien entre monotonie et continuité

##### ATTENTION

Lorsque la monotonie n'est pas stricte, il se peut que les limites aux bornes exclues soit tout de même atteintes.

**Théorème 9 (Monotonie + intervalle entraîne continuité) :**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction **monotone** sur un **intervalle**  $I$ .

La fonction  $f$  est continue sur  $I$  si, et seulement si  $f(I)$  est un intervalle.



### III. Continuité des fonctions monotones

#### 1. Lien entre monotonie et continuité

##### ATTENTION

Lorsque la monotonie n'est pas stricte, il se peut que les limites aux bornes exclues soit tout de même atteintes.

**Théorème 9 (Monotonie + intervalle entraîne continuité) :**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction **monotone** sur un **intervalle**  $I$ .

La fonction  $f$  est continue sur  $I$  si, et seulement si  $f(I)$  est un intervalle.

**Remarque** : Ce théorème énonce une réciproque du théorème **théorème (6)** des valeurs intermédiaires, mais elle n'est valable que pour les fonctions monotones.



### III. Continuité des fonctions monotones

#### 1. Lien entre monotonie et continuité

Ce résultat d'apparence anodine est à employer prudemment. La continuité, même vue globalement, est une notion locale et le fait que l'ensemble-image soit un intervalle ne garantit aucunement que la fonction est continue sur son intervalle de définition.

#### ATTENTION

À titre d'exemple, on pourra considérer la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

L'ensemble-image  $f(\mathbb{R})$  est un intervalle puisqu'égal à  $\mathbb{R}$ . Pourtant, la fonction  $f$  n'est pas continue en 0, donc n'est pas continue sur son intervalle de définition.



### III. Continuité des fonctions monotones

#### 2. Continuité et bijectivité

**Théorème 10 (Théorème de la Bijection) :**

Soient  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction continue sur  $I$ .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ①  $f$  est strictement monotone sur  $I$ .

**Remarque :** Étant donné que les graphes de  $f$  et  $f^{-1}$  sont symétriques. Si le graphe de  $f$  peut être tracé sans lever le crayon, comment le graphe de  $f^{-1}$  ne le pourrait-il pas ?



### III. Continuité des fonctions monotones

#### 2. Continuité et bijectivité

**Théorème 10 (Théorème de la Bijection) :**

Soient  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction continue sur  $I$ .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1  $f$  est strictement monotone sur  $I$ .
- 2  $f$  est injective sur  $I$ , donc bijective de  $I$  sur  $f(I)$ .

**Remarque :** Étant donné que les graphes de  $f$  et  $f^{-1}$  sont symétriques. Si le graphe de  $f$  peut être tracé sans lever le crayon, comment le graphe de  $f^{-1}$  ne le pourrait-il pas ?



### III. Continuité des fonctions monotones

#### 2. Continuité et bijectivité

##### Théorème 10 (Théorème de la Bijection) :

Soient  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction continue sur  $I$ .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1  $f$  est strictement monotone sur  $I$ .
- 2  $f$  est injective sur  $I$ , donc bijective de  $I$  sur  $f(I)$ .

Dans ces conditions,  $f^{-1}$  est continue et strictement monotone de même sens de variation que  $f$  sur  $f(I)$ .

**Remarque** : Étant donné que les graphes de  $f$  et  $f^{-1}$  sont symétriques. Si le graphe de  $f$  peut être tracé sans lever le crayon, comment le graphe de  $f^{-1}$  ne le pourrait-il pas ?



# III. Continuité des fonctions monotones

## 2. Continuité et bijectivité

Définition 3 (Homéomorphisme) :

On appelle **homéomorphisme** toute bijection continue entre deux espaces topologiques dont la bijection réciproque est continue.

Le **théorème (10)** affirme donc que toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  est un homéomorphisme.

- Il existe des injections non strictement monotones.

**ATTENTION**



# III. Continuité des fonctions monotones

## 2. Continuité et bijectivité

### Définition 3 (Homéomorphisme) :

On appelle **homéomorphisme** toute bijection continue entre deux espaces topologiques dont la bijection réciproque est continue.

Le **théorème (10)** affirme donc que toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  est un homéomorphisme.

**ATTENTION**

- Il existe des injections non strictement monotones.
- Il existe des fonctions bijectives mais non monotones.  
Elles ne sont alors pas continues



# III. Continuité des fonctions monotones

## 2. Continuité et bijectivité

### Définition 3 (Homéomorphisme) :

On appelle **homéomorphisme** toute bijection continue entre deux espaces topologiques dont la bijection réciproque est continue.

Le **théorème (10)** affirme donc que toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  est un homéomorphisme.

### ATTENTION

- Il existe des injections non strictement monotones.
- Il existe des fonctions bijectives mais non monotones. Elles ne sont alors pas continues
- Il existe des fonctions bijectives et continues, dont la bijection réciproque n'est pas continue.  
On vient de voir que ce n'est jamais le cas lorsque  $f$  est monotone sur un intervalle  $I$ .



# III. Continuité des fonctions monotones

## 2. Continuité et bijectivité

### Exemple 8 :

En début d'année, l'existence des fonctions arcsin, arccos et arctan a découlé du TVI strictement monotone et leur continuité du théorème de continuité d'une réciproque.



### III. Continuité des fonctions monotones

#### 2. Continuité et bijectivité

La preuve de continuité de  $f^{-1}$  peut être adaptée à la recherche des limites aux bornes d'une réciproque.

Corollaire 101 :

Soient  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue et strictement monotone.

Alors  $f^{-1}$  admet des limites aux bornes de  $J = f(I)$  données par :

$$\lim_{y \rightarrow \sup(J)} f^{-1}(y) = \begin{cases} \sup(I) & \text{si } f \text{ croissante} \\ \inf(I) & \text{si } f \text{ décroissante} \end{cases}$$

On a un résultat analogue pour la limite de  $f^{-1}$  en  $\inf(J)$ .



### III. Continuité des fonctions monotones

#### 2. Continuité et bijectivité

La preuve de continuité de  $f^{-1}$  peut être adaptée à la recherche des limites aux bornes d'une réciproque.

Corollaire 10.2 :

Soient  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue et strictement monotone.

Alors  $f^{-1}$  admet des limites aux bornes de  $J = f(I)$  données par :

$$\lim_{y \rightarrow \sup(J)} f^{-1}(y) = \begin{cases} \sup(I) & \text{si } f \text{ croissante} \\ \inf(I) & \text{si } f \text{ décroissante} \end{cases}$$

On a un résultat analogue pour la limite de  $f^{-1}$  en  $\inf(J)$ .

On retrouve la continuité de  $\exp$ ,  $\arctan$ ,  $\arccos$ ,  $\arcsin$  sur leur intervalle de définition respectif avec leurs limites au bornes.

Par exemple,  $\arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sup \left( \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[ \right) = \frac{\pi}{2}$ .



### III. Continuité des fonctions monotones

#### 2. Continuité et bijectivité

Exercice 10 :

① Montrer que  $f : ]-1, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}$  est bijective.  
$$x \longmapsto \frac{x}{1-x^2}$$



### III. Continuité des fonctions monotones

#### 2. Continuité et bijectivité

Exercice 10 :

① Montrer que  $f : ]-1, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}$  est bijective.

$$x \longmapsto \frac{x}{1-x^2}$$

② Exprimer  $f^{-1}(y)$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ .



# IV. Fonctions à valeurs complexes

- 1 Continuité
- 2 Théorèmes de continuité globale
- 3 Continuité des fonctions monotones
- 4 Fonctions à valeurs complexes**



## IV. Fonctions à valeurs complexes

On rappelle qu'il n'est question ici que de fonctions  $f : I \mapsto \mathbb{C}$ , où  $I \subset \mathbb{R}$ . Les fonctions dont la variable est elle-même complexe sont l'objet de tout un pan de l'analyse, appelée **analyse complexe**, utilisant des méthodes très différentes de celles étudiées dans ce chapitre et pas du tout à votre programme.

Rappel (Limite) :

La fonction  $f$  admet pour limite  $\ell \in \mathbb{C}$  quand  $x$  tend vers  $a \in I$  si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* / |x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

C'est exactement la même définition que pour une fonction réelle, la seule toute petite différence étant que la valeur absolue en fin de définition s'est transformée en module.



## IV. Fonctions à valeurs complexes

- Les notions de limite à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, sont maintenues pour les fonctions à valeurs complexes.



## IV. Fonctions à valeurs complexes

- Les notions de limite à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, sont maintenues pour les fonctions à valeurs complexes.
- La caractérisation séquentielle de la limite est également maintenue, de même que les résultats sur les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse, à ceci près que les symboles  $\pm\infty$  sont bannis. En effet, on ne peut définir de limites infinies dans  $\mathbb{C}$  de façon simple : si on calque la définition réelle, le module de  $f$  tendra vers  $+\infty$  mais ça ne dit rien sur  $f$  elle-même dans la mesure où, dans  $\mathbb{C}$ , on peut se rapprocher de l'infini dans toutes les directions et, en particulier, parler de  $+\infty$  et de  $-\infty$  n'a évidemment aucun sens.



## IV. Fonctions à valeurs complexes

- Les notions de limite à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, sont maintenues pour les fonctions à valeurs complexes.
- La caractérisation séquentielle de la limite est également maintenue, de même que les résultats sur les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse, à ceci près que les symboles  $\pm\infty$  sont bannis. En effet, on ne peut définir de limites infinies dans  $\mathbb{C}$  de façon simple : si on calque la définition réelle, le module de  $f$  tendra vers  $+\infty$  mais ça ne dit rien sur  $f$  elle-même dans la mesure où, dans  $\mathbb{C}$ , on peut se rapprocher de l'infini dans toutes les directions et, en particulier, parler de  $+\infty$  et de  $-\infty$  n'a évidemment aucun sens.
- Les grands théorèmes d'existence de limite – théorèmes d'encadrement, minoration, majoration et théorème de la limite monotone – n'ont pas de sens dans le cas complexe car ils utilisent de façon essentielle la **relation d'ordre**  $\leq$  sur  $\mathbb{R}$ .



## IV. Fonctions à valeurs complexes

### Théorème II (Continuité) :

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

$f$  est continue sur  $I$  si, et seulement si  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  le sont.



## IV. Fonctions à valeurs complexes

### Théorème II (Continuité) :

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

$f$  est continue sur  $I$  si, et seulement si  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  le sont.

Comme pour les fonctions à valeurs réelles, les combinaisons linéaires, produits, quotients (de dénominateur non nul) et composées de fonctions continues sont des fonctions continues.



## IV. Fonctions à valeurs complexes

### Théorème II (Continuité) :

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

$f$  est continue sur  $I$  si, et seulement si  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  le sont.

Comme pour les fonctions à valeurs réelles, les combinaisons linéaires, produits, quotients (de dénominateur non nul) et composées de fonctions continues sont des fonctions continues.

### Exemples 9 :

Les fonctions  $t \mapsto e^{it}$  et  $t \mapsto \frac{1}{1+it}$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ .



## IV. Fonctions à valeurs complexes

Compte tenu de la définition, on retrouve des propriétés analogues au cas réel, à **une exception près**.

À retenir :

Soit  $D$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ .

- 1 On retrouve les mêmes théorèmes généraux, en particulier  $\mathcal{C}^0(D; \mathbb{R})$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre.



## IV. Fonctions à valeurs complexes

Compte tenu de la définition, on retrouve des propriétés analogues au cas réel, à **une exception près**.

À retenir :

Soit  $D$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ .

- 1 On retrouve les mêmes théorèmes généraux, en particulier  $\mathcal{C}^0(D; \mathbb{R})$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre.
- 2 Si  $f$  est continue sur  $D$ , alors les fonctions  $\bar{f}$  et  $|f|$  aussi.



## IV. Fonctions à valeurs complexes

Compte tenu de la définition, on retrouve des propriétés analogues au cas réel, à **une exception près**.

À retenir :

Soit  $D$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ .

- 1 On retrouve les mêmes théorèmes généraux, en particulier  $\mathcal{C}^0(D; \mathbb{R})$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre.
- 2 Si  $f$  est continue sur  $D$ , alors les fonctions  $\bar{f}$  et  $|f|$  aussi.
- 3 Si  $f : [a; b] \mapsto \mathbb{C}$  est continue sur le segment  $[a; b]$ , alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes *i.e.* il existe  $t_0, t_1 \in [a; b]$  tels que :

$$|f(t_0)| = \max_{t \in [a; b]} |f(t)| \quad \text{et} \quad |f(t_1)| = \min_{t \in [a; b]} |f(t)|.$$



**Le théorème des valeurs intermédiaires n'est plus vrai.**

La notion de comparaison entre  $f(a)$  et  $f(b)$  ne peut être adaptée.

**ATTENTION**



### Le théorème des valeurs intermédiaires n'est plus vrai.

La notion de comparaison entre  $f(a)$  et  $f(b)$  ne peut être adaptée.

#### ATTENTION

Par exemple, la fonction  $t \mapsto e^{it}$  est continue sur  $[0; 2\pi]$ , 0 est compris entre  $f(\pi) = -1$  et  $f(0) = 1$ , mais  $0 \notin f([0; 2\pi])$  car  $f$  ne s'annule pas.

**Remarque** : Ici  $f([0; 2\pi])$  n'est pas un intervalle, mais un cercle !

