Matrices et Limites

Question de cours : *Transposée d'un produit et de l'inverse.*

Exercice 1 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & 0 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - I_3)(A + 2I_3)$.
2. Montrer que A est inversible, et déterminer A^{-1}.
3. Soient $B = \frac{1}{3}(A + I_3)$ et $C = -\frac{1}{3}(A - 2I_3)$. Déterminer B^n, C^n puis A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Les relations sont-elles valables pour $n \in \mathbb{Z}$?

Correction :

1. $(A - I_3)(A + 2I_3) = 2A$.
2. De ce fait, $A^2 - A = 2I_3$ ou encore $\frac{1}{2}(A - I_3)A = I_3$:A est inversible, et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$.
3. $B^n = B$ et $C^n = C$. D'autre part, $BC = CB = 0_3$.

   Ainsi, comme $A = 2B - C$, on obtient en développant : $A^n = 2^nB^n + (-1)^nC^n = 2^nB + (-1)^nC$.

   Ce résultat s'obtient également par division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$:

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}I_3$$

4. Pour $n \in \mathbb{Z}$, les relations $B^n = B$ et $C^n = C$ ne sont plus valables (car B et C ne sont pas inversibles).
   En revanche, $A^n = 2^nB + (-1)^nC$ est toujours valable. En effet,

$$(2^{-n}B + (-1)^{-n}C)A^n = (2^{-n}B + (-1)^{-n}C)(2^nB + (-1)^nC) = B^2 + 0 + 0 + C^2 = B + C = I_3.$$

Exercice 3 : Soient a et b des réels non nuls, et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Trouver toutes les matrices $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à -dire telles que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$.

Matrices et Limites

Question de cours : *Trace d'un produit.*

Exercice 1 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$
2. $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x}}$

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A+I_3)^3$.
2. Montrer que A est inversible et donner A^{-1}.
3. Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction :

1. Calculer $(A+I_3)^3 = 0_3$.
2. $A^3+3A^2+3A+I_3 = 0_3$ donc $A(-A^2+3A-I_3) = I_3$ et $A^{-1} = -A^2+3A-I_3$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -a & -a \\ -1 & -1-a & -a \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer $A^n = [(A+I_3)-I_3]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (A+I_3)^k = I_3 - n(A+I_3) + \frac{n(n-1)}{2}(A+I_3)^2$

$$A^n = I_3 - n\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & -a & -a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -na & -na \\ -n & 1+\frac{n(n-1)}{2}a & +\frac{n(n-1)}{2}a \\ n & -\frac{n(n-1)}{2}a & 1-\frac{n(n-1)}{2}a \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que :

$$\forall\, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{AB} = \mathrm{BA} \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \mathrm{A} = \lambda.\mathrm{I}_n$$

Matrices et Limites

Question de cours : *Unicité de la limite.*

Exercice 1 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x)$
2. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

Exercice 2 : Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à -dire qu'il existe $p \geqslant 1$ tel que $\mathrm{A}^p = 0$.

1. Calculer $(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})(\mathrm{I}_n + \mathrm{A} + ... + \mathrm{A}^{p-1})$.
2. En déduire que la matrice $\mathrm{I}_n - \mathrm{A}$ est inversible, et donner son inverse.

Exercice 3 : Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que :

$$\forall\, \mathrm{D} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \quad \mathrm{AD} = \mathrm{DA} \iff \mathrm{A} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}).$$

Matrices et Limites

Question de cours : *Si f admet une limite finie alors, f est bornée.*

Exercice 1 : Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}.\sin \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction : $A = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'où $A^n = (I_3 + N)^n = I_3 + nN + \dfrac{n(n-1)}{2} N^2$.

Exercice 3 : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Matrices et Limites

Question de cours : *Théorème d'encadrement.*

Exercice 1 : Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}, A^n = a_n A + b_n I_3$.
2. Expliciter a_n et b_n.

Correction : $A^2 = 7A - 10I_3$.

On a $\begin{cases} a_{n+1} = 7a_n + b_n \\ b_{n+1} = -10a_n \end{cases}$ et donc $\begin{cases} a_n = \dfrac{5^n - 2^n}{3} \\ b_n = \dfrac{5.2^n - 2.5^n}{3} \end{cases}$.

Exercice 3 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Matrices et Limites

Question de cours : *Transposée d'un produit et de l'inverse.*

Exercice 1 : Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$.

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, A^n = a_n A^2 + b_n A$.
2. Expliciter a_n et b_n.

Correction : $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $A^3 = A^2 + 2A$ et donc $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}$ et donc $\begin{cases} a_n = \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{6} \\ b_n = \dfrac{2^n - 4(-1)^n}{6} \end{cases}$.

Exercice 3 :

1. Montrer que pour tout $0 < \epsilon < 1$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|x - 1| < \frac{\epsilon}{4} \implies |x^2 + x - 2| < \epsilon.$$

2. En déduire :

$$\lim_{x \to 1} x^2 + x - 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1} (x^2 + x - 2) \cos x.$$

Matrices et Limites

Question de cours : *Trace d'un produit.*

Exercice 1 : Déterminer $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \sin 2x}{x^2}$.

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer les réels a, b, c tels que $A^3 = aA^2 + bA + cI_3$.

Correction : $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 0 \\ 14 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$.

En cherchant a, b, c, on tombe sur un système lié : $\begin{cases} 5a + b + c = 13 \\ 4a + 2b = 14 \\ 9a + 3b + c = 27 \end{cases}$.

Il y a une infinité de solutions $a = 2 - \dfrac{1}{3}c$ et $b = 3 + \dfrac{2}{3}c$.

C'est parce qu'on a déjà $A^2 = 2A + 3I_3$.

Exercice 3 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 dans son intérieur. On suppose que $\lim_{x \to x_0} f(x) = u > 0$.

Démontrer qu'il existe $t > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < t$ alors $|f(x)| \geqslant \dfrac{u}{2}$.

Matrices et Limites

Question de cours : *Unicité de la limite.*

Exercice 1 : Déterminer $\lim_{x\to 0} x\dfrac{\tan x}{\cos^2 x - 1}$.

Exercice 2 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I.$$

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

Exercice 3 : Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+ \; g(x) > 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0.$$

Montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Matrices et Limites

Question de cours : *Si f admet une limite finie alors, f est bornée.*

Exercice 1 : Montrer que si une fonction f définie sur $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$ est continue en x_0 alors la fonction $|f|$ est, elle aussi, continue en x_0.

Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 2 : Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\mathrm{M}^2 + \mathrm{M}$.
2. En déduire que M est inversible et calculer M^{-1}.

Correction :

1. $\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = 2\mathrm{I}_2$.
2. $\mathrm{M}[\frac{1}{2}(\mathrm{M} + \mathrm{I}_2)] = \mathrm{I}_2$ *donc* M *est inversible et* $\mathrm{M}^{-1} = \frac{1}{2}(\mathrm{M} + \mathrm{I}_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 : Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+ \; g(x) > 0 \text{ et } \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \mathrm{L} \neq 0.$$

Montrer que si $\mathrm{L} > 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

Matrices et Limites

Question de cours : *Théorème d'encadrement.*

Exercice 1 : Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Exercice 3 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Correction : $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Matrices et Limites

Question de cours : *Transposée d'un produit et de l'inverse.*

Exercice 1 : Déterminer $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2}-1)$.

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A+I)^3$.
2. En déduire que A est inversible.

Exercice 3 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer :

$$\Big(\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(BX)\Big) \implies A = B.$$

Matrices et Limites

Question de cours : *Trace d'un produit.*

Exercice 1 : Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$

Exercice 2 : Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *i.e.* $\{\mathrm{M}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall\,\mathrm{X}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{MX}=\mathrm{XM}\}$.

Exercice 3 : Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer :

$$\Big(\forall\,\mathrm{X}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\quad \mathrm{tr}\,(\mathrm{AX})=\mathrm{tr}\,(\mathrm{BX})\Big) \implies \mathrm{A}=\mathrm{B}.$$

Matrices et Limites

Question de cours : *Unicité de la limite.*

Exercice 1 : Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$

Exercice 2 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer :

$$\Big(\forall\, \mathrm{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \mathrm{tr}\,(\mathrm{AX}) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{BX})\Big) \implies \mathrm{A} = \mathrm{B}.$$

Exercice 3 : Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(\mathrm{I}_3 + \mathrm{A})^3 = 0_3$.
2. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction : *Soit* $\mathrm{N} = \mathrm{I}_3 + \mathrm{A}$. *On a* $\mathrm{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & -a & -a \end{pmatrix}$ *et effectivement* $\mathrm{N}^3 = 0_3$.

De ce fait, $\mathrm{A}^n = (\mathrm{N} - \mathrm{I}_3)^n = (-1)^n \left(\mathrm{I}_3 - n\mathrm{N} + \dfrac{n(n-1)}{2}\mathrm{N}^2\right)$.

Matrices et Limites

Question de cours : *Si f admet une limite finie alors, f est bornée.*

Exercice 1 : Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 2\,|x|}{x}$

2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3\,x + 2}$

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice 3 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A(A - 2I_3)(A - 3I_3)$.
2. En déduire A^n en fonction de A^2, A et I_3 pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction : $A(A - 2I_3)(A - 3I_3) = 0_3$.

On effectue la division euclidienne de X^n par $X(X-2)(X-3)$:

$X^n = X(X-2)(X-3)Q + a_nX^2 + b_nX + c_n$.

On a $\begin{cases} 2^n = 4a_n + 2b_n + c_n \\ 3^n = 9a_n + 3b_n + c_n \\ c_n = 0 \end{cases}$. On obtient $a_n = \dfrac{2.3^n - 3.2^n}{6}$, $b_n = \dfrac{9.2^n - 4.3^n}{6}$ et $c_n = 0$.

Donc $A^n = \dfrac{2.3^n - 3.2^n}{6}A^2 + \dfrac{9.2^n - 4.3^n}{6}A$.

Matrices et Limites

Question de cours : *Théorème d'encadrement.*

Exercice 1 : Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 3 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - I_3)(A + 3I_3)$ et en déduire A^2 en fonction de A et I_3.
2. De manière générale, montrer que A^k pour $k \in \mathbb{N}$ s'écrit sous la forme $A^k = a_kA + b_kI_3$.
3. Trouver a_k et b_k.

Correction : $(A - I_3)(A + 3I_3) = 0_3$ donc $A^2 = -2A + 3I_3$.

$\begin{cases} a_{k+1} = b_k - 2a_k \\ b_{k+1} = 3a_k \end{cases}$ et donc $\begin{cases} a_k = \dfrac{1-(-3)^k}{4} \\ b_k = \dfrac{3+(-3)^k}{4} \end{cases}$.

Matrices et Limites

Question de cours : *Transposée d'un produit et de l'inverse.*

Exercice 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 dans son intérieur. On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = u > 0$.

Démontrer qu'il existe $t > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < t$ alors $|f(x)| \geqslant \dfrac{u}{2}$.

Exercice 2 : Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que :

$$\forall\, \mathrm{D} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \quad \mathrm{AD} = \mathrm{DA} \iff \mathrm{A} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}).$$

Exercice 3 : Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $(\mathrm{M} - \mathrm{I}_4)^n$.
2. En déduire M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction : Soit $\mathrm{N} = \mathrm{M} - \mathrm{I}_4$. $\mathrm{N}^2 = 0_4$. Ainsi $\mathrm{M}^n = (\mathrm{I}_4 + \mathrm{N})^n = \mathrm{I}_4 + n\mathrm{N}$.

Matrices et Limites

Question de cours : *Trace d'un produit.*

Exercice 1 : Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+ \; g(x) > 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \mathrm{L} \neq 0.$$

Montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Exercice 2 : Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que :

$$\forall\, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{AB} = \mathrm{BA} \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \mathrm{A} = \lambda.\mathrm{I}_n$$

Exercice 3 :

1. Pour $n \geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 2$.
2. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Déduire de la question précédente la valeur de A^n, pour $n \geqslant 2$.

Matrices et Limites

Question de cours : *Unicité de la limite.*

Exercice 1 : Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+ \; g(x) > 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \mathrm{L} \neq 0.$$

Montrer que si $\mathrm{L} > 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

Exercice 2 : Soient a et b des réels non nuls, et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Trouver toutes les matrices $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à -dire telles que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathrm{A}^3 - 3\mathrm{A}^2 + 2\mathrm{A} = 0_3$.
2. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. A est-elle inversible ?

Correction : On effectue la division euclidienne de X^n par $\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$:
$\mathrm{X}^n = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)\mathrm{Q} + a_n\mathrm{X}^2 + b_n\mathrm{X} + c_n$.

On a $\begin{cases} 1^n = a_n + b_n + c_n \\ 2^n = 4a_n + 2b_n + c_n \\ c_n = 0 \end{cases}$. On obtient $a_n = 2^{n-1} - 1$, $b_n = 2 - 2^{n-1}$ et $c_n = 0$.

Donc $\mathrm{A}^n = \dfrac{2.3^n - 3.2^n}{6}\mathrm{A}^2 + \dfrac{9.2^n - 4.3^n}{6}\mathrm{A}$.