Fonctions de la variable réelle
Continuité

Exercice 1 : Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{2\sqrt{x+3}}{x-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ -\frac{1}{4} & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

2. $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

3. $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

4. $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

5. $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

6. $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x\ln|x| & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

7. $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

8. $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

9. $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

10. $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 - x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

Exercice 2 : Étudier la continuité des fonctions suivantes en $n \in \mathbb{Z}$:

1. $f : x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$
2. $g : x \longmapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$
3. $h : x \longmapsto \lfloor x \rfloor^2 - x\lfloor x \rfloor + x^2$

Exercice 3 : Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité ?

$f_1 : x \longmapsto x\left|1 + \frac{1}{x}\right|$

$f_2 : x \longmapsto \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+4}-2}$

$f_3 : x \longmapsto \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$

$f_4 : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{2x-6}$

$f_5 : x \longmapsto \begin{cases} x^2-5 & \text{si } x < 1 \\ k \in \mathbb{Z} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$

$f_6 : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{2x+\sqrt{x+5}}{x+1} & \text{si } x > -1 \\ k \in \mathbb{Z} & \text{si } x = -1 \end{cases}.$

Exercice 4 : On considère la fonction $\chi_{\mathbb{Q}}$, appelé fonction de Dirichlet, définie par

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Démontrer que $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.
2. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & x\chi_{\mathbb{Q}}(x). \end{array}$

Exercice 5 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Démontrer que la fonction f n'est pas continue en 0, mais qu'elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires *i.e.* que pour tous $a < b$ de $\mathbb{R}$ et tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, on peut trouver $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = k$.

Exercice 6 : Soit la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor^{x}}$.

1. Déterminer la limite à gauche en p pour $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. f est-elle continue en p ?
2. Donner la limite de la suite $(f(u_n))_{n>2}$ lorsque :
   a. $u_n = n$
   b. $u_n = n + \dfrac{1}{2}$
   c. $u_n = n + \dfrac{1}{\ln n}$.
3. Pensez-vous que f possède une limite (finie ou infinie) en $+\infty$?

Exercice 7 : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, et soient p, q deux réels strictement positifs.

Démontrer qu'il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c)$.

Exercice 8 : Justifier l'existence d'une unique solution α dans $\left]\pi\,;\dfrac{3\pi}{2}\right[$ de l'équation $\tan x = x$.

Donner une solution approchée de α à 10^{-1} près.

Exercice 9 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$.

Discuter, suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$.

Exercice 10 : Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = x^n$ admet (au moins) une solution sur $[0,1]$.

Exercice 11 : Soit n, un entier naturel ($n \geqslant 2$). On considère l'équation $(\mathrm{E}_n) : x^n - nx + 1 = 0$.

1. Montrer que (E_n) admet sur $[0,1]$ une unique solution notée α_n.
2. Montrer que la suite (α_n) converge vers 0.

Exercice 12 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 :

1. Montrer que $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$ réalise une bijection de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite de $f^{-1}(2^{-n})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 14 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue périodique non constante. On veut prouver que f admet une plus petite période, c'est-à-dire qu'il existe $\mathrm{T} > 0$ tel que

- $f(x + \mathrm{T}) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Pour tout $0 < \tau < \mathrm{T}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ avec $f(x + \tau) \neq f(x)$.

On pose

$$\mathrm{A} = \{\tau > 0 : \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x + \tau) = f(x)\}.$$

1. Justifier que A admet une borne inférieure que l'on notera T.
2. Démontrer que $\mathrm{T} > 0$.
3. Démontrer que T est une période pour f.