Fonctions de la variable réelle
Continuité

Exercice 1 : Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{2\sqrt{x+3}}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ -\frac{1}{4} & \text{si } x = 1 \end{cases}$

2. $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

3. $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

4. $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

5. $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

6. $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x\ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

7. $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

8. $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

9. $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

10. $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 - x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 2 : Étudier la continuité des fonctions suivantes en $n \in \mathbb{Z}$:

1. $f : x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$
2. $g : x \longmapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$
3. $h : x \longmapsto \lfloor x \rfloor^2 - x\lfloor x \rfloor + x^2$

Exercice 3 : Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité ?

$f_1 : x \longmapsto x\left|1 + \dfrac{1}{x}\right|$

$f_2 : x \longmapsto \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+4} - 2}$

$f_3 : x \longmapsto \dfrac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$

$f_4 : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{2x-2} - 2}{2x - 6}$

$f_5 : x \longmapsto \begin{cases} x^2 - 5 & \text{si } x < 1 \\ k \in \mathbb{Z} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

$f_6 : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{2x + \sqrt{x+5}}{x+1} & \text{si } x > -1 \\ k \in \mathbb{Z} & \text{si } x = -1 \end{cases}$.

Exercice 4 : On considère la fonction $\chi_{\mathbb{Q}}$, appelé fonction de Dirichlet, définie par

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Démontrer que $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

2 Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & x\chi_{\mathbb{Q}}(x). \end{array}$

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite d'irrationnel $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x.

Comme $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = 1$ et $f(v_n) = 0$, par passage à la limite, f ne peut être continue en x.

Exercice 5 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Démontrer que la fonction f n'est pas continue en 0, mais qu'elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires *i.e.* que pour tous $a < b$ de $\mathbb{R}$ et tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, on peut trouver $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = k$.

Correction : Pour prouver que f n'est pas continue en 0, il suffit de trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0, mais telle que $\left(f(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(0) = 0$.

Ici, $u_n = \dfrac{1}{2n\pi + \dfrac{\pi}{2}}$ convient, puisque $f(u_n) = 1$ pour tout entier n.

Maintenant, il faut prouver que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Soient $a < b$ deux réels.

- Si $0 \notin [a\,;b]$, alors f est continue sur $[a\,;b]$, et on peut directement appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f.
- Sinon, on a donc $0 \in [a\,;b]$. Sans perte de généralité, on peut supposer $b \neq 0$.

  Soit μ entre $f(a)$ et $f(b)$ que l'on peut supposer dans l'intervalle $[-1\,;1]$ et soit $\theta \in [0\,;2\pi[$ tel que $\sin(\theta) = \mu$.

  Posons alors $v_n = \dfrac{1}{2n\pi + \theta}$.

  La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, par valeurs supérieures :

  $$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } v_{n_0} \in [0\,;b] \subset [a\,;b] \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ f(v_n) = \mu.$$

  On a donc bien trouvé (au moins) un élément v_{n_0} de $[a\,;b]$ tel que $f(v_{n_0}) = \mu$ pour μ compris entre $f(a)$ et $(f(b)$.
  Ainsi, est une valeur prise par f sur l'intervalle $[a\,;b]$: la fonction f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[a\,;b]$ sans être continue sur $[a\,;b]$.

Exercice 6 : Soit la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor^{x}}$.

1 Déterminer la limite à gauche en p pour $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. f est-elle continue en p ?

2 Donner la limite de la suite $\left(f(u_n)\right)_{n>2}$ lorsque :

(a) $u_n = n$

(b) $u_n = n + \frac{1}{2}$

(c) $u_n = n + \dfrac{1}{\ln n}$.

3 Pensez-vous que f possède une limite (finie ou infinie) en $+\infty$?

Exercice 7 : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, et soient p, q deux réels strictement positifs.

Démontrer qu'il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c)$.

Correction : *Le réel $\dfrac{p}{p+q}f(a) + \dfrac{q}{p+q}f(b)$ est clairement un réel de l'intervalle $[f(a)\,;f(b)]$ (ou $[f(b)\,;f(a)]$ si $f(b) < f(a)$), puisqu'il s'écrit $\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$, avec $\lambda \in [0\,;1]$ qui est égal à $\dfrac{p}{p+q}$.*

Puisque la fonction f est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut trouver $c \in [a\,;b]$ tel que

$$f(c) = \frac{p}{p+q}f(a) + \frac{q}{p+q}f(b).$$

Multipliant par $p+q$, c'est exactement le résultat voulu.

Exercice 8 : Justifier l'existence d'une unique solution α dans $\left]\pi\,;\dfrac{3\pi}{2}\right[$ de l'équation $\tan x = x$.

Donner une solution approchée de α à 10^{-1} près.

Exercice 9 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$.

Discuter, suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$.

Correction : *La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. On en déduit le tableau de variations suivant :*

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

On peut alors amorcer la discussion suivant les valeurs de a :

- *Si $a > -1$, puisque $f(x) \leqslant -1$ si $x \in]-\infty, 2]$, il n'y a pas de solutions à l'équation $f(x) = a$ dans cet intervalle.*
  D'autre part, f est continue strictement croissante sur $]2\,;+\infty[$, et $a \in \left]f(2)\,;\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-5\,;+\infty[$.
  Il y a donc une solution unique dans l'intervalle $]2\,;+\infty[$ à l'équation $f(x) = a$, et donc aussi une solution unique sur $\mathbb{R}$.
- *Si $a = -1$, on fait le même raisonnement, en remarquant qu'il n'y a pas de solutions dans $]-\infty\,;0[$ ni dans $]0\,;+\infty[$.*
  En revanche, on a aussi $f(0) = -1$. L'équation $f(x) = -1$ admet donc 2 solutions.

- Si $a \in]-5\,;-1[$, alors par le même argument que précédemment (stricte monotonie et valeur ou limite aux bornes), on constate que l'équation $f(x) = a$ admet une solution unique sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$, $]0\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$. Il y a donc trois solutions à l'équation $f(x) = a$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < -5$, alors il ne peut pas y avoir de solutions dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et puisque f est strictement croissante, continue sur $]-\infty\,;0[$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $f(0) - 1$, l'équation $f(x) = a$ admet une solution unique dans $]-\infty\,;0[$.
- Enfin, si $a = -5$, on trouve deux solutions, l'une dans $]-\infty\,;0[$, et aussi 2.

Exercice 10 : Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = x^n$ admet (au moins) une solution sur $[0,1]$.

Exercice 11 : Soit n, un entier naturel ($n \geqslant 2$). On considère l'équation $(\mathrm{E}_n) : x^n - nx + 1 = 0$.

1. Montrer que (E_n) admet sur $[0,1]$ une unique solution notée α_n.
2. Montrer que la suite (α_n) converge vers 0.

Exercice 12 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Correction : Le résultat qui va nous fournir l'existence du minimum est le théorème des bornes atteintes. C'est le fait que f admet des limites en $\pm\infty$ valant $+\infty$ qui va nous permettre de nous ramener à un segment.

Pour cela, on commence par traduire avec des quantificateurs les propriétés sur les limites :

$$\forall\, \mathrm{A} > 0,\ \exists\, \mathrm{M}_1 > 0,\ \forall\, x \geqslant \mathrm{M}_1,\ f(x) \geqslant \mathrm{A}.$$
$$\forall\, \mathrm{A} > 0,\ \exists\, \mathrm{M}_2 < 0,\ \forall\, x \leqslant \mathrm{M}_2,\ f(x) \geqslant \mathrm{A}.$$

On espère alors appliquer le théorème précédent dans l'intervalle $[\mathrm{M}_2\,;\mathrm{M}_1]$. Il y a encore deux problèmes à régler, qui ne sont pas indépendants :

- On doit être sûr que le minimum de f est effectivement atteint dans l'intervalle $[\mathrm{M}_2\,;\mathrm{M}_1]$,
- et il faut donner une valeur à A pour avoir effectivement des valeurs de M_1 et M_2.

On choisit par exemple $\mathrm{A} = f(0)$. Pour cette valeur de A, la définition de la limite donne les réels M_1 et M_2.

La fonction f est continue sur $[\mathrm{M}_2\,;\mathrm{M}_1]$ donc il existe donc $x_0 \in [\mathrm{M}_2\,;\mathrm{M}_1]$ tel que, pour tout $x \in [\mathrm{M}_2\,;\mathrm{M}_1]$, on ait $f(x) \geqslant f(x_0)$ d'après le théorème des bornes atteintes.

D'autre part, si $x > \mathrm{M}_1$ ou si $x < \mathrm{M}_2$, on a $f(x) \geqslant \mathrm{A} = f(0) \geqslant f(x_0)$.

En conclusion, f atteint bien son minimum en x_0.

Exercice 13 :

1. Montrer que $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$ réalise une bijection de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite de $f^{-1}(2^{-n})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 14 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue périodique non constante. On veut prouver que f admet une plus petite période, c'est-à-dire qu'il existe $\mathrm{T} > 0$ tel que

- $f(x + \mathrm{T}) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Pour tout $0 < \tau < \mathrm{T}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ avec $f(x + \tau) \neq f(x)$.

On pose
$$\mathrm{A} = \{\tau > 0 : \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x + \tau) = f(x)\}\,.$$

1. Justifier que A admet une borne inférieure que l'on notera T.
2. Démontrer que $\mathrm{T} > 0$.
3. Démontrer que T est une période pour f.

Correction :

1. A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (puisque f est périodique) et minorée par 0. Elle admet donc une borne inférieure.
2. Soit $x \neq y$ tel que $f(x) \neq f(y)$. Soit $\varepsilon = |f(y) - f(x)| > 0$.

   Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{R}$, $|y - z| < \delta$ entraîne $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$.

   Supposons que $\mathrm{T} = 0$. Alors il existe $\tau \in \mathrm{A}$ tel que $0 < \tau < \delta$. Mais alors, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x + n\tau \leqslant y < x + (n+1)\tau$, et donc $|y - (x + n\tau)| < \delta$.

   On en déduit que
   $$|f(y) - f(x)| = |f(y) - f(x + n\tau)| < \varepsilon = |f(y) - f(x)|.$$
   Une contradiction. On a donc $\mathrm{T} > 0$.
3. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et soit $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers T.

   Puisque $f(x + \tau_n) = f(x)$, la continuité de f en $x + \mathrm{T}$ entraîne que $f(x + \mathrm{T}) = f(x)$.

   Ainsi, T est bien une période de f, et par construction, c'est la plus petite période de f.