Fonctions de la variable réelle
Dérivabilité

I DÉRIVABILITÉ ET PROLONGEMENT

Exercice 1 (Dérivée usuelle) : Retrouver les fonctions dérivées des fonctions usuelles suivantes et préciser leur domaine de dérivabilité :

1. Les fonctions constantes.
2. $x \longmapsto \sqrt{x}$.
3. $x \longmapsto \exp(x)$.
4. $x \longmapsto \cos(x)$.

Exercice 2 : Déterminer :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 3 : Calculer, en appliquant la définition le nombre dérivé de $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$ en 2. Vérifier en utilisant les formules de dérivation.

Exercice 4 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto (x^3 + x - 2)^4$
2. $x \longmapsto (1+x)\sqrt{1+x}$
3. $x \longmapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$
4. $x \longmapsto x^2\sqrt{x}$
5. $x \longmapsto x^2\cos(x)\sin(x)$
6. $x \longmapsto (x + \sin(x))^4$
7. $x \longmapsto \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$
8. $x \longmapsto \dfrac{x^3}{1+x^2}$
9. $x \longmapsto \dfrac{(x+1)^3}{\sqrt{x}}$
10. $x \longmapsto \dfrac{2x^3 - 1}{x\sqrt{1+x^2}}$
11. $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{1+\sqrt{x}}$
12. $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x-2}}{2+\sin(x)}$
13. $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)}$
14. $x \longmapsto \dfrac{1}{(e^x + e^{-x})^2}$
15. $x \longmapsto \dfrac{(\ln x)^4}{x}$
16. $x \longmapsto \dfrac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2 - 1}$
17. $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x) + 2}}$
18. $x \longmapsto \dfrac{3\pi}{\tan(5x)}$
19. $x \longmapsto \dfrac{5}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$
20. $x \longmapsto \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$
21. $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{3}}{2x}$
22. $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
23. $x \longmapsto \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
24. $x \longmapsto \sqrt{x^2 + 6x - 1}$
25. $x \longmapsto \sqrt{\sin\left(\dfrac{1}{2+x^2}\right)}$
26. $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$
27. $x \longmapsto \ln\sqrt{1+x^2}$
28. $x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$
29. $x \longmapsto \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$
30. $x \longmapsto \ln|7 - 2x|$
31. $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$
32. $x \longmapsto x^x$
33. $x \longmapsto x^{x^2}$
34. $x \longmapsto x^{x^x}$
35. $x \longmapsto (1+x^4)^{1-2x}$
36. $x \longmapsto \pi^{x^2-1}$
37. $x \longmapsto \cos(\ln(1+\sqrt{x}))$
38. $x \longmapsto \sin\left(\ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)\right)$
39. $x \longmapsto \cos^4(x) - \sin^4(x)$

Exercice 5 : Après avoir préciser le domaine de dérivabilité, déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto (1+x)\sqrt{1+x}$
2. $x \longmapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$
3. $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}$
4. $x \longmapsto \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$
5. $x \longmapsto x^{x^x}$
6. $x \longmapsto \sin\left(\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\right)$
7. $x \longmapsto \tan^3(x)$

Exercice 6 : Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1. $x \longmapsto |\sin(x)|$
2. $x \longmapsto |x|^3$
3. $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$
4. $x \longmapsto |x|^3$
5. $x \longmapsto (x-1)\sqrt{1-x^2}$
6. $x \longmapsto 2-(x-2)|x-2|$
7. $x \longmapsto |5-7x+2x^2|$
8. $x \longmapsto \sqrt{x^3 \arcsin(x)}$

Exercice 7 :

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \begin{cases} ax+b & \text{si } x<0 \\ \sqrt{1+x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases} \end{array}$

   Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit dérivable en 0.
2. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ ax^2+bx+1 & \text{si } x>1. \end{cases} \end{array}$$

   soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x<1; \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

   Montrer que f est continue mais n'est pas dérivable en 1 et en donner une interprétation géométrique.
4. Mêmes questions en 0 avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x=0. \end{cases}$

Exercice 8 :

1. On définit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ par $f(0)=0$ et $\forall\, x \neq 0,\ f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   - a) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   - b) f est-elle dérivable en 0 ?
2. Soit $g :]0\,;1[\longmapsto \exp\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)$.
   - a) Montrer que g se prolonge par continuité en 0 et en 1.
   - b) Étudier la dérivabilité en 0 et en 1 de ce prolongement.
3. Soit $h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(x) = x|x|$.
   - a) Démontrer que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   - b) La fonction h' est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 9 : Soit f définie sur $]0\,;1[$ par $f(x) = x\exp\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Montrer que f admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ $[0\,;1]$.

Exercice 10 : Soit $f: \begin{array}{rcl} [-1\,;1] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2} \end{array}$

1. Montrer que f est continue sur $[-1\,;1]$, dérivable sur $]-1\,;1[$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1\,;1[$.
3. Montrer que f est dérivable sur $[-1\,;1]$.
4. En déduire :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}-\frac{\pi}{2}}{x-1}$. (b) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+\frac{\pi}{2}}{x+1}$.

II Dérivées $n^{\text{èmes}}$

Exercice 11 : Soit $f: \mathbb{R}^* \longmapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

Exercice 12 : Soit $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sin(x)$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 13 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = x^{n-1}\ln x$.

   Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x > 0,\ f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$.
2. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout entier n.

Aide : On pourra chercher une relation entre f et f'.

Exercice 14 :

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

2. Déterminer une formule analogue pour $\cos^{(n)}$.
3. En déduire les dérivées $n^{\text{èmes}}$ de :

(a) $x \longmapsto \sin(2x)$ (b) $x \longmapsto 2\sin(3x) - 5\cos(3x)$ (c) $x \longmapsto \cos^3(x)$

Exercice 15 : $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de :

1. $\phi_1 : x \longmapsto x f(x)$
2. $\phi_2 : x \longmapsto x^2 f(x)$
3. $\phi_3 : x \longmapsto x^3 f(x)$
4. $\psi : x \longmapsto \dfrac{1}{x} f(x)$

Exercice 16 : On définit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $\forall\, x \neq 0,\ f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

2. Démontrer que pour tout $x \neq 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x)$ est de la forme $\dfrac{\mathrm{P}_n(x)}{x^{3n}} f(x)$, où P_n est une fonction polynomiale.

   Aide : On procédera par récurrence sur n, sans chercher à expliciter P_n.

3. En déduire que f est dérivable à tout ordre en 0, et que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(0) = 0$. On dit que la fonction f est *plate* en 0.

Exercice 17 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable au point x_0.

1. Montrer que le rapport $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0, et calculer cette limite.
2. Étudier la réciproque.

Exercice 18 : Justifier que $f : x \longmapsto x^3 + x + 1$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f^{-1})'(x)$ pour $x = -1$ et $x = 1$.
2. La fonction f^{-1} est-elle de classe $\mathscr{C}^\infty$?

III Rolle et TAF

Exercice 19 : Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leqslant |x - y|$.
2. $\forall\, x \geqslant 0$, $x \leqslant e^x - 1 \leqslant x e^x$.

Exercice 20 : Soit f dérivable sur $[a,b]$ avec $|f'| \leqslant k$. On suppose $f(a)$ et $f(b)$ connus.

Représenter la région où se trouve $\mathcal{C}_f$ sur $[a,b]$.

Exercice 21 : Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ $(a < b)$.

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c)$.

Exercice 22 : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a\,;b[$, et vérifiant $f(a) = f(b) = 0$.

Soit $d \in \mathbb{R} \setminus [a\,;b]$. Montrer qu'il existe une tangente à la courbe représentative de f passant par le point $(d\,;0)$.

Exercice 23 : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$. On suppose que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a\,;b]$, et que f est n-fois dérivable sur $[a\,;b]$.

1. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet au moins n solutions sur $]a\,;b[$.
2. Montrer qu'il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 24 (Formule de Taylor-Lagrange) : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et n un entier naturel.

Soit f une fonction élément de $\mathrm{C}^n([a\,;b]\,,\mathbb{R}) \cap \mathrm{D}^{n+1}(]a\,;b[\,,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Aide : Appliquer le théorème de Rolle à la fonction $g(x) = f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - \mathrm{A}\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ où A est intelligemment choisi.

IV ÉTUDES DE FONCTIONS (EXERCICES DE TERMINALE)

Exercice 25 : Étude complète de $x \longmapsto |x \ln |x||$.

Exercice 26 : Étudier les variations de $f : x \longmapsto \dfrac{x^2-5x+6}{2x^2-6x}$

Exercice 27 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$.

1. Déterminer les asymptotes de f.
2. Montrer qu'on peut écrire $\forall\, x \in \mathrm{D}_f, f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$ où g est une fonction qu'on déterminera.
3. Étudier g pour déterminer son signe.

   On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près de la racine α de g.
4. En déduire le tableau de variations de f.

Exercice 28 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \frac{x^2+2x+5}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1. Établir que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

2. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 29 : Soit la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x+3}}.$$

1. Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité de f.
2. Montrer que, là où f est dérivable :

$$f'(x) = \frac{(x+1)(3x+11)}{2(x+3)\sqrt{x+3}}.$$

3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que f admet un minimum sur son ensemble de définition.

Exercice 30 : Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et que :

$$f'(x) = \frac{x+4\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\,(2+\sqrt{x})^2}.$$

2. Résoudre l'équation $\mathrm{X}^2+4\mathrm{X}-1=0$ et en déduire le signe de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f.