Fonctions de la variable réelle
Dérivabilité

I Dérivabilité et prolongement

Exercice 1 (Dérivée usuelle) : Retrouver les fonctions dérivées des fonctions usuelles suivantes et préciser leur domaine de dérivabilité :

1. Les fonctions constantes.
2. $x \longmapsto \sqrt{x}$.
3. $x \longmapsto \exp(x)$.
4. $x \longmapsto \cos(x)$.

Exercice 2 : Déterminer :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 3 : Calculer, en appliquant la définition le nombre dérivé de $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$ en 2. Vérifier en utilisant les formules de dérivation.

Exercice 4 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto (x^3+x-2)^4$
2. $x \longmapsto (1+x)\sqrt{1+x}$
3. $x \longmapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$
4. $x \longmapsto x^2\sqrt{x}$
5. $x \longmapsto x^2\cos(x)\sin(x)$
6. $x \longmapsto (x+\sin(x))^4$
7. $x \longmapsto \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$
8. $x \longmapsto \dfrac{x^3}{1+x^2}$
9. $x \longmapsto \dfrac{(x+1)^3}{\sqrt{x}}$
10. $x \longmapsto \dfrac{2x^3-1}{x\sqrt{1+x^2}}$
11. $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{1+\sqrt{x}}$
12. $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x-2}}{2+\sin(x)}$
13. $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}$
14. $x \longmapsto \dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^2}$
15. $x \longmapsto \dfrac{(\ln x)^4}{x}$
16. $x \longmapsto \dfrac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2-1}$
17. $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)+2}}$
18. $x \longmapsto \dfrac{3\pi}{\tan(5x)}$
19. $x \longmapsto \dfrac{5}{\sqrt{x^2+x+1}}$
20. $x \longmapsto \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$
21. $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{3}}{2x}$
22. $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
23. $x \longmapsto \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$
24. $x \longmapsto \sqrt{x^2+6x-1}$
25. $x \longmapsto \sqrt{\sin\left(\dfrac{1}{2+x^2}\right)}$
26. $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$
27. $x \longmapsto \ln\sqrt{1+x^2}$
28. $x \longmapsto \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$
29. $x \longmapsto \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$
30. $x \longmapsto \ln|7-2x|$
31. $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$
32. $x \longmapsto x^x$
33. $x \longmapsto x^{x^2}$
34. $x \longmapsto x^{x^x}$
35. $x \longmapsto (1+x^4)^{1-2x}$
36. $x \longmapsto \pi^{x^2-1}$
37. $x \longmapsto \cos\left(\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right)$
38. $x \longmapsto \sin\left(\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\right)$
39. $x \longmapsto \cos^4(x) - \sin^4(x)$

Correction :

1. $x \longmapsto 4(3x^2+1)(x^3+x-2)^3$
2. $x \longmapsto \frac{3}{2}\sqrt{1+x}$
3. $x \longmapsto \frac{x^2+x-1}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
4. $x \longmapsto \frac{5}{2}x\sqrt{x}$
5. $x \longmapsto 2x\cos(x)\sin(x) - x^2\sin^2 x + x^2\cos^2 x$
6. $x \longmapsto 4(1+\cos(x))(x+\sin(x))^3$
7. $x \longmapsto -\frac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}}$
8. $x \longmapsto \frac{x^2(3+x^2)}{(1+x^2)^2}$
9. $x \longmapsto \frac{(x+1)^2(5x-1)}{2x\sqrt{x}}$
10. $x \longmapsto \frac{2x^5+4x^3+2x^2+1}{x^2(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$
11. $x \longmapsto -\frac{2(x+\sqrt{x})\sin(x)+\cos(x)}{2(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}$
12. $x \longmapsto \frac{2+\sin(x)-2(x-2)\cos(x)}{2(2+\sin(x))^2\sqrt{x-2}}$
13. $x \longmapsto \frac{-1}{(\sin(x)-\cos(x))^2}$
14. $x \longmapsto \frac{-2(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^3}$
15. $x \longmapsto \frac{(4-\ln x)(\ln x)^3}{x^2}$
16. $x \longmapsto \frac{(x^4-2x^3-1)e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2(x^2-1)^2}$
17. $x \longmapsto \frac{-\sin^2 x - 4\sin(x) - 1}{2(\sin(x)+2)\sqrt{\sin(x)+2}}$
18. $x \longmapsto \frac{-15\pi(1+\tan^2 5x)}{\tan^2 5x}$
19. $x \longmapsto -\frac{5}{2}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}$
20. $x \longmapsto \frac{2+\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})^2}$
21. $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2x^2}$
22. $x \longmapsto \frac{-1}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
23. $x \longmapsto \frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$
24. $x \longmapsto \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x-1}}$
25. $x \longmapsto \frac{-x\cos\left(\frac{1}{2+x^2}\right)}{(2+x^2)^2\sqrt{\sin\left(\frac{1}{2+x^2}\right)}}$
26. $x \longmapsto \frac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x^3}}$
27. $x \longmapsto \frac{x}{1+x^2}$
28. $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
29. $x \longmapsto \frac{1}{x^2}\tan\frac{1}{x}$
30. $x \longmapsto \frac{-2}{7-2x}$
31. $x \longmapsto \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
32. $x \longmapsto (1+\ln x)x^x$
33. $x \longmapsto (1+2\ln x)x^{1+x^2}$
34. $x \longmapsto (\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x})x^{x^x+x}$
35. $x \longmapsto \left(-2\ln(x^4+1) + \frac{4(1-2x)x^3}{x^4+1}\right)(1+x^4)^{1-2x}$
36. $x \longmapsto 2x\ln(\pi)\pi^{x^2-1}$
37. $x \longmapsto \frac{-\sin\left(\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right)}{2\left(1+\sqrt{x}\right)\sqrt{x}}$
38. $x \longmapsto \frac{-2}{x(x+2)}\cos\left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)$
39. $x \longmapsto -4\cos(x)\sin(x)$

Exercice 5 : Après avoir préciser le domaine de dérivabilité, déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto (1+x)\sqrt{1+x}$
2. $x \longmapsto x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
3. $x \longmapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}$
4. $x \longmapsto \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$
5. $x \longmapsto x^{x^x}$
6. $x \longmapsto \sin\left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)$
7. $x \longmapsto \tan^3(x)$

Correction :

1. $x \longmapsto \frac{3}{2}\sqrt{1+x}$
2. $x \longmapsto \frac{x^2+x-1}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
3. $x \longmapsto -\frac{1}{(\sin(x)-\cos(x))^2}$
4. $x \longmapsto \frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$
5. $x \longmapsto (\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x})x^{x^x+x}$
6. $x \longmapsto -\frac{2}{x(x+2)}\cos\left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)$
7. $x \longmapsto 3\tan^2(x)(1+\tan^2 x)$

Exercice 6 : Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1. $x \longmapsto |\sin(x)|$
2. $x \longmapsto |x|^3$
3. $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$
4. $x \longmapsto \lfloor x \rceil^3$
5. $x \longmapsto (x-1)\sqrt{1-x^2}$
6. $x \longmapsto 2-(x-2)|x-2|$
7. $x \longmapsto |5-7x+2x^2|$
8. $x \longmapsto \sqrt{x^3 \arcsin(x)}$

Correction :

8.
- La fonction $x \longmapsto x^3 \arcsin(x)$ est dérivable sur $]-1\,;1[$ par produit, positive sur $[-1\,;1]$ et nulle seulement en 0.
  Cette fonction est donc dérivable sur $]-1\,;1[\setminus\{0\}$ à valeurs DANS $\mathbb{R}_+^*$.
  La fonction racine carrée étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ SEULEMENT, $x \longmapsto \sqrt{x^3 \arcsin(x)}$ est dérivable sur $]-1\,;1[\setminus\{0\}$ par composition.
- Ce raisonnement ne nous apprend rien sur la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^3 \arcsin(x)}$ en 0 car nos théorèmes d'opérations sur la dérivabilité nous parlent de dérivabilité mais pas de NON-dérivabilité.
  De fait, la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^3 \arcsin(x)}$ est quand même dérivable en 0 car :

$$\frac{\sqrt{x^3 \arcsin(x)}-0}{x-0} = \frac{\sqrt{x^4}}{x}\times\sqrt{\frac{\arcsin(x)}{x}} = x\sqrt{\frac{\arcsin(x)-\arcsin(0)}{x-0}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\times\sqrt{\arcsin'(0)} = 0.$$

  On pourrait montrer en revanche que $x \longmapsto \sqrt{x^3 \arcsin(x)}$ n'est pas dérivable en -1 et 1.

Exercice 7 :

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \begin{cases} ax+b & \text{si } x<0 \\ \sqrt{1+x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases} \end{array}$

   Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit dérivable en 0.
2. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ ax^2+bx+1 & \text{si } x>1. \end{cases} \end{array}$$

   soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x<1; \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

   Montrer que f est continue mais n'est pas dérivable en 1 et en donner une interprétation géométrique.
4. Mêmes questions en 0 avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x=0. \end{cases}$

Exercice 8 :

1. On définit $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ par $f(0)=0$ et $\forall\, x \neq 0,\ f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   (a) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

(b) f est-elle dérivable en 0 ?

2. Soit $g :]0\,;1[\longmapsto \exp\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

   (a) Montrer que g se prolonge par continuité en 0 et en 1.

   (b) Étudier la dérivabilité en 0 et en 1 de ce prolongement.

3. Soit $h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(x) = x|x|$.

   (a) Démontrer que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) La fonction h' est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 9 : Soit f définie sur $]0\,;1[$ par $f(x) = x\exp\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Montrer que f admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ $[0\,;1]$.

Exercice 10 : Soit $f : \begin{array}{ccc} [-1\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} \end{array}$

1. Montrer que f est continue sur $[-1\,;1]$, dérivable sur $]-1\,;1[$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in\,]-1\,;1[$.
3. Montrer que f est dérivable sur $[-1\,;1]$.
4. En déduire :

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} - \frac{\pi}{2}}{x-1}$. (b) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + \frac{\pi}{2}}{x+1}$.

II DÉRIVÉES $n^{\text{ÈMES}}$

Exercice 11 : Soit $f : \mathbb{R}^* \longmapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

Exercice 12 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sin(x)$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 13 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = x^{n-1}\ln x$.

   Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x > 0,\ f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$.

2. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout entier n.

Aide : On pourra chercher une relation entre f et f'.

Exercice 14 :

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

2. Déterminer une formule analogue pour $\cos^{(n)}$.
3. En déduire les dérivées $n^{\text{èmes}}$ de :

(a) $x \longmapsto \sin(2x)$ (b) $x \longmapsto 2\sin(3x) - 5\cos(3x)$ (c) $x \longmapsto \cos^3(x)$

Exercice 15 : $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de :

1. $\phi_1 : x \longmapsto x f(x)$
2. $\phi_2 : x \longmapsto x^2 f(x)$
3. $\phi_3 : x \longmapsto x^3 f(x)$
4. $\psi : x \longmapsto \dfrac{1}{x} f(x)$

Exercice 16 : On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $\forall\, x \neq 0,\ f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Démontrer que pour tout $x \neq 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x)$ est de la forme $\dfrac{\mathrm{P}_n(x)}{x^{3n}} f(x)$, où P_n est une fonction polynomiale.

   Aide : On procédera par récurrence sur n, sans chercher à expliciter P_n.
3. En déduire que f est dérivable à tout ordre en 0, et que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(0) = 0$. On dit que la fonction f est *plate* en 0.

Exercice 17 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable au point x_0.

1. Montrer que le rapport $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0, et calculer cette limite.
2. Étudier la réciproque.

Correction : Il suffit de couper en passant par $f(x_0)$:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{-h}\right) \to \frac{f'(x_0) + f'(x_0)}{2}.$$

La réciproque est clairement fausse. Il suffit de prendre $f(x) = |x|$ et $x_0 = 0$.

Exercice 18 : Justifier que $f : x \longmapsto x^3 + x + 1$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f^{-1})'(x)$ pour $x = -1$ et $x = 1$.
2. La fonction f^{-1} est-elle de classe $\mathscr{C}^\infty$?

III Rolle et TAF

Exercice 19 : Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ |\arctan(x) - \arctan(y)| \leqslant |x - y|$.
2. $\forall\, x \geqslant 0,\ x \leqslant e^x - 1 \leqslant x e^x$.

Correction :

1. On rappelle que la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\left|\frac{1}{1+x^2}\right| \leqslant 1.$$
   L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction arctan entre x et y donne alors le résultat.

2 On appelle cette fois le théorème (et non l'inégalité !) des accroissements finis à e^x entre 0 et x. Il existe donc $c \in]0\,;x[$ tel que

$$e^x - 1 = e^x - e^0 = e^c(x-0) = e^c x.$$

Puisque $1 \leqslant e^c \leqslant e^x$ et $x \geqslant 0$, on en déduit l'inégalité demandée.

Exercice 20 : Soit f dérivable sur $[a,b]$ avec $|f'| \leqslant k$. On suppose $f(a)$ et $f(b)$ connus. Représenter la région où se trouve $\mathcal{C}_f$ sur $[a,b]$.

Exercice 21 : Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ $(a<b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $[f(b)-f(a)]\,g'(c) = [g(b)-g(a)]\,f'(c)$.

Exercice 22 : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a\,;b[$, et vérifiant $f(a) = f(b) = 0$.

Soit $d \in \mathbb{R} \setminus [a\,;b]$. Montrer qu'il existe une tangente à la courbe représentative de f passant par le point $(d\,;0)$.

Correction : L'équation de la tangente au point d'abscisse x_0 est

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Cette tangente passe par le point $(d,0)$ si, et seulement si

$$f'(x_0)(x_0 - d) - f(x_0) = 0.$$

On va chercher une fonction dont la dérivée va être presque de la forme précédente, et on va montrer par le théorème de Rolle que la dérivée de cette fonction s'annule.

Pour cela, on pose $g(x) = \dfrac{f(x)}{x-d}$ définie et continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$, de dérivée

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x-d) - f(x)}{(x-d)^2}.$$

De plus, $g(a) = g(b) = 0$. Par le théorème de Rolle, on peut trouver $x_0 \in]a\,;b[$ tel que $g'(x_0) = 0$.

Pour ce x_0, la relation

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - d}$$

est donc vérifiée, et la tangente à la courbe représentative de f au point $(x_0, f(x_0))$ passe par $(d\,;0)$.

Exercice 23 : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$. On suppose que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a\,;b]$, et que f est n-fois dérivable sur $[a\,;b]$.

1 Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet au moins n solutions sur $]a\,;b[$.

2 Montrer qu'il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Correction :

1 Soit $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$ des points distincts de I sur lesquels f s'annule.

Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, f est continue sur $[a_k\,;a_{k+1}]$ et dérivable sur $]a_k\,;a_{k+1}[$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c_k \in]a_k\,;a_{k+1}[$ tel que $f'(c_k) = 0$.

Enfin, puisque $a_1 < c_1 < a_2 < \ldots < a_n < c_n < a_{n+1}$, les n valeurs c_k, $k \in [\![1\,;n]\!]$ sont deux a deux disjoints, ce qui permet de conclure.

2. On montre par récurrence sur $k \in [\![1\,;n]\!]$ la propriete $\mathcal{P}(k)$: $f^{(k)}$ s'annule au moins $n+1-k$ fois sur $]a\,;b[$.

On a $\mathcal{P}(1)$ vraie d'après la question précédente.

Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence $f^{(k)}$ s'annule au moins $n+1-k$ fois sur $[a\,;b]$, disons en $r_1 < \ldots < r_{n+1-k}$.

Pour $i \in [\![1\,;n-k]\!]$, $f^{(k)}$ est continue sur $[r_i\,;r_{i+1}]$, dérivable sur $]r_i\,;r_{i+1}[$ (car f est n-fois dérivable sur $[a\,;b]$) et $f^{(k)}(r_i) = f^{(k)}(r_{i+1}) = 0$, donc par le théorème de Rolle, il existe $s_i \in]r_i\,;r_{i+1}[$ tel que $f^{(k+1)}(s_i) = 0$.

Comme $a < s_1 < r_1 < \ldots < s_{n-k} < b$, on a montré que $f^{(k+1)}$ s'annule au moins $n-k$ fois sur $]a\,;b[$, ainsi $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

En conclusion $\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie et en particulier, $\mathcal{P}(n)$ i.e. $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois en $c \in]a\,;b[$ avec $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 24 ([Formule de Taylor-Lagrange) : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et n un entier naturel.

Soit f une fonction élément de $\mathrm{C}^n([a\,;b]\,,\mathbb{R}) \cap \mathrm{D}^{n+1}(]a\,;b[\,,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in]a\,;b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Aide : Appliquer le théorème de Rolle à la fonction $g(x) = f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - \mathrm{A}\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ où A est intelligemment choisi.

Correction : On a déjà $g(b) = f(b) - f(b) = 0$. Puisque $a \neq b$, on peut choisir A tel que $g(a) = 0$ à savoir $\mathrm{A} = \dfrac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\left(f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right)$.

Avec les hypothèses faites sur f, g est d'autre part continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$. Le théorème de Rolle permet alors d'affirmer qu'il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Pour $x \in]a\,;b[$, on a

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + \mathrm{A}\frac{(b-x)^n}{n!} \\
&= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \mathrm{A}\frac{(b-x)^n}{n!} \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + \mathrm{A}\frac{(b-x)^n}{n!} \\
&= \frac{(b-x)^n}{n!}(\mathrm{A} - f^{(n+1)}(x)).
\end{aligned}$$

Ainsi, il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $\dfrac{(b-c)^n}{n!}(\mathrm{A} - f^{(n+1)}(c)) = 0$, et donc, puisque $c \neq b$, tel que $f^{(n+1)}(c) = \mathrm{A}$.

L'égalité $g(a) = 0$ s'écrit alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

pour un certain réel c de $]a\,;b[$.

IV Études de fonctions (exercices de terminale)

Exercice 25 : Étude complète de $x \longmapsto |x \ln |x||$.

Exercice 26 : Étudier les variations de $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 6x}$

Exercice 27 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.

1. Déterminer les asymptotes de f.
2. Montrer qu'on peut écrire $\forall x \in \mathrm{D}_f, f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$ où g est une fonction qu'on déterminera.
3. Étudier g pour déterminer son signe.

   On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près de la racine α de g.
4. En déduire le tableau de variations de f.

Exercice 28 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

1. Établir que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x^2 + x - 2)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

2. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 29 : Soit la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x+3}}.$$

1. Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité de f.
2. Montrer que, là où f est dérivable :

$$f'(x) = \frac{(x+1)(3x+11)}{2(x+3)\sqrt{x+3}}.$$

3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que f admet un minimum sur son ensemble de définition.

Exercice 30 : Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et que :

$$f'(x) = \frac{x + 4\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}\,(2 + \sqrt{x})^2}.$$

2. Résoudre l'équation $\mathrm{X}^2 + 4\mathrm{X} - 1 = 0$ et en déduire le signe de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f.