Matrices et Limites

Exercice 1 : Calculer les limites suivantes, par valeurs inférieures et supérieures à défaut :

1. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1+\cos(x)}{\sin(x)}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\sin(x)\right)^{\frac{1}{\tan(x)}}$.

Exercice 2 : Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que :

$$\forall\, x\in\mathbb{R}_+,\quad g(x)>0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\mathrm{L}\neq 0.$$

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \iff \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

2. Montrer que si $\mathrm{L}>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty \iff \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\infty$.

Exercice 3 : Soit $r_0\in\mathbb{R}$. On pose :

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -r_0^2 & 2r_0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathrm{B}=\mathrm{A}-r_0\mathrm{I}_2.$$

1.
   a. Calculer B^2 puis B^n pour $n\geqslant 2$.
   b. En déduire une expression simple de A^n pour tout entier naturel n.

2. On pose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\forall\, n\in\mathbb{N},\ au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=0$, avec $(a\,;b\,;c)\in\mathbb{R}^3$ tels que $a\neq 0$ et $b^2-4ac=0$.
   a. Vérifier que $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=2r_0u_{n+1}-r_0^2u_n$ avec $r_0=-\dfrac{b}{2a}$.
   b. On pose : $\mathrm{X}_n=\begin{pmatrix}u_n\\ u_{n+1}\end{pmatrix}$.

      Montrer que $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{A}\mathrm{X}_n$.
   c. Montrer que $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \mathrm{X}_n=\mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$.
   d. On pose $\mu=u_0$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $(\lambda+\mu)r_0=u_1$.

      Déduire des questions précédentes que :
      $$\forall\, n\in\mathbb{N}, u_n=(\lambda n+\mu)r_0^n.$$

3. Application numérique : donner l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant le système :
$$\begin{cases}u_{n+2}-6u_{n+1}+9u_n=0\\ u_0=1\\ u_1=3.\end{cases}$$