Matrices et Limites

Exercice 1 :

1 On utilise les théorèmes sur les limites de composées pour se ramener en 0 :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos(x)}{\sin(x)} &\underset{u=\pi-x}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{u\to0}\frac{1+\cos(\pi-u)}{\sin(\pi-u)}\\ &= \lim_{u\to0}\frac{1-\cos(u)}{\sin(u)} = -\lim_{u\to0}\frac{\cos(u)-\cos(0)}{u-0}\times\frac{1}{\dfrac{\sin(u)-\sin(0)}{u-0}}\end{aligned}$$

En reconnaissant les taux de variations en 0 de deux fonctions dérivables dont la limite est leur nombre dérivée en ce point. Le second étant non nul, on conclut avec les théorèmes généraux :

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos(x)}{\sin(x)} = \sin(0)\times\frac{1}{\cos(0)} = 0.$$

2 On utilise la quantité conjuguée, qui donne

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}.$$

En mettant en facteur $\sqrt{x}$ au numérateur et au dénominateur, on obtient

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}+1}.$$

La forme n'est plus indéterminée, et la limite recherchée est $\dfrac{1}{2}$.

3 Pour x « assez proche » de 0, par exemple, $x\in\left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right[\cup\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, les quantités sont définies et on a :

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}} = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}.$$

D'où,

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}} = \lim_{\substack{x\to0\\x\in\left]-\frac{\pi}{2};0\right[}}\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}} = \lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \lim_{\substack{x\to0\\x<0}}-\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\sqrt{2}.$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}} = \lim_{\substack{x\to0\\x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[}}\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{2}.$$

Il n'y a donc pas de limite en 0.

4 On commence par restreindre l'étude à un voisinage de 0 suffisamment petit pour que tan et la puissance existe *i.e.* $x\in \mathrm{I}=\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$. Sur ce dernier, on est alors assuré que :

— $\tan(x)$ est défini,
— $\tan(x)\neq 0$,
— $1+\sin(x)>0$.

Pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a alors :

$$\Big(1+\sin(x)\Big)^{\frac{1}{\tan(x)}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\tan(x)}\ln(1+\sin(x))} = \mathrm{e}^{\cos(x)\frac{\ln(1+\sin(x))}{\sin(x)}}.$$

Comme $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on peut poser $u = \sin(x) \iff x = \arcsin(u)$ sur cet intervalle.

D'où,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \cos(x)\frac{\ln(1+\sin(x))}{\sin(x)} \underset{u=\sin(x)}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \lim_{\substack{u\to 0\\ u\neq 0}} \cos(\arcsin(u))\,\frac{\ln(1+u)}{u} = 1,$$

en reconnaissant une limite connue.

Enfin, $\lim_{v\to 1} \mathrm{e}^v = \mathrm{e}$ entraîne $\lim_{x\to 0}\Big(1+\sin(x)\Big)^{\frac{1}{\tan(x)}} = \mathrm{e}$.

Exercice 2 :

1. Comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \mathrm{L}$, il existe un seuil $\alpha\left(\frac{\mathrm{L}}{2}\right) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$x \geqslant \alpha \implies \mathrm{L}-\frac{\mathrm{L}}{2} \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \mathrm{L}+\frac{\mathrm{L}}{2} \iff \frac{\mathrm{L}}{2}g(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2}\mathrm{L}\,g(x) \text{ avec } g(x) > 0. \quad \text{(XII.1)}$$

Si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, alors on conclut avec le théorème d'encadrement :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

On a aussi :

$$x \geqslant \alpha \implies \frac{2}{3\mathrm{L}}\,f(x) \leqslant g(x) \leqslant \frac{2}{\mathrm{L}}\,f(x) \;\text{ ou }\; \frac{2}{\mathrm{L}}\,f(x) \leqslant g(x) \leqslant \frac{2}{3\mathrm{L}}\,f(x), \quad \text{(XII.2)}$$

suivant le signe de $\mathrm{L} \neq 0$.

Dans les deux cas, le théorème d'encadrement permet encore de conclure :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \implies \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

D'où l'équivalence.

2. Si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \pm\infty$ alors l'une ou l'autre des inégalités de (XII.1) permettent de conclure avec le théorème de comparaison et $\mathrm{L} > 0$, dans les deux cas.

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, on utilise l'une ou l'autre des inégalités de (XII.2).

En conclusion, si $\mathrm{L} > 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty \iff \lim_{x\to+\infty} g(x) = \infty$.

Exercice 3 :

1.
   a. Par calcul matriciel $\mathrm{B}^2 = 0_2$ donc pour tout $n \geqslant 2$, puis $\mathrm{B}^n = \mathrm{B}^2\mathrm{B}^{n-2} = 0_2$.

   b. $\mathrm{A} = r_0\mathrm{I}_2 + \mathrm{B}$ avec $(r_0\mathrm{I}_2)\,\mathrm{B} = r_0\mathrm{I}_2\mathrm{B} = r_0\mathrm{B}\mathrm{I}_2 = \mathrm{B}\,(r_0\mathrm{I}_2)$. Les matrices B et $r_0\mathrm{I}_2$ commutant, on peut appliquer la formule du binôme qui s'écrit :

$$\mathrm{A}^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} r_0^{n-k}\mathrm{B}^k.$$

Or, d'après la question précédente, $\mathrm{B}^n = 0_2$ si $n \geqslant 2$.

Donc,

$$\mathrm{A}^n = r_0^n\mathrm{I}_2 + nr_0^{n-1}\mathrm{B} = \begin{pmatrix} (1-n)r_0^n & nr_0^{n-1} \\ -nr_0^{n+1} & (1+n)r_0^n \end{pmatrix}.$$

2 (a) Alors $u_{n+2} = -\dfrac{b}{a}u_{n+1} - \dfrac{c}{a}u_n$ car $a \neq 0$.

De plus, $-\dfrac{b}{a} = 2r_0$ et $b^2 = 4ac$, donc $\dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 = r_0^2$.

On en déduit

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2r_0 u_{n+1} - r_0^2 u_n \ \text{ avec }\ r_0 = -\frac{b}{2a}.$$

(b) Par calcul matriciel $\mathrm{AX}_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ -r_0^2 u_n + 2r_0 u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ d'après la question précédente.

Or, $\mathrm{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ par définition.

D'où, $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n$.

(c) On montre ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

- Initialisation : $\mathrm{A}^0\mathrm{X}_0 = \mathrm{I}_2\mathrm{X}_0 = \mathrm{X}_0$.
- Si pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$, alors $\mathrm{AX}_n = \mathrm{AA}^n\mathrm{X}_0 = \mathrm{A}^{n+1}\mathrm{X}_0$.

  Or, $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n$ d'après la question précédente.

  On en déduit $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{A}^{n+1}\mathrm{X}_0$ ce qu'il fallait vérifier et l'hérédité.
- Initialisée pour $n = 0$ et héréditaire, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) D'après la question précédente et connaissant l'expression simple de A^n en fonction de n, nous avons

$$\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} r_0^n(1-n)u_0 + nr_0^{n-1}u_1 \\ -nr_0^{n+1}u_0 + r_0^n(1+n)u_1 \end{pmatrix}.$$

Or, $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ donc par identification

$$u_n = r_0^n(1-n)u_0 + nr_0^{n-1}u_1 = nr_0^{n-1}\left(u_1 - r_0u_0\right) + u_0r_0^n.$$

Or, $\mu = u_0$ et $(\lambda+\mu)r_0 = u_1$, donc par différence

$$u_1 - r_0u_0 = \lambda r_0.$$

Par ailleurs, $u_0 = \mu$, ce qui donne en remplaçant dans l'expression précédente

$$\begin{aligned} u_n &= nr_0^{n-1}\lambda r_0 + \mu r_0^n \\ &= (\lambda n + \mu)r_0^n. \end{aligned}$$

3 On a, successivement, $r_0 = 3$ puis $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n(\lambda n + \mu)3^n$ pour $(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2$.

Les conditions sur u_0 et u_1 entraînent alors $\lambda = 0$ et $\mu = 1$.

Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n$.