XVI

Fonctions de la variable réelle DÉRIVABILITÉ

Dans ce chapitre, nous complétons nos outils permettant une étude efficace des fonctions. L' est bien entendu la *dérivation*, que nous abordons ici d'un point de vue essentiellement pratique : comme inscrit dans le programme de PTSI, l'objectif est de savoir dériver et étudier de façon efficace des fonctions explicites.

Rien de très nouveaux donc, si ce n'est un peu plus de maturité en analyse réelle et la section des théorèmes classiques qui va s'enrichir d'un théorème capital : *le théorème des accroissements finis*[1]. Fondamental notamment pour l'étude des suites récurrentes que nous aborderons au prochain chapitre.

Contenu

Dans tout ce chapitre, I représentera, sauf mentions autres, un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ *i.e.* non vide et non réduit à un singleton ou une réunion d'intervalles tous non triviaux.

[1]. Après le « TVI » voici le « TAF ».

I Dérivabilité

Un peu d'histoire :

- *La notion de dérivée tire son origine dans l'étude des tangentes, et en particulier de la pente des tangentes. Pierre de Fermat*[2] *le premier (en 1636) constate que très souvent, la pente s'obtient en écrivant* $\dfrac{f(a+e)-f(a)}{e}$*, en « prenant »* $e=0$ *(il ne dispose pas encore de la notion de limite). Il appelle* e *un « infiniment petit ».*
- *Newton, en 1669, introduit la notation* $(\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})$*, pour les dérivées des coordonnées d'un point, qu'il appelle « fluxions » des « fluentes »* $(x,\ y,\ z)$*, qu'il définit comme les vitesses dont les fluentes sont augmentées graduellement et indéfiniment.*

  Sa notation est encore utilisée actuellement en physique.
- *En 1674, Leibniz introduit la notation* $\mathrm{d}x$ *; pour désigner une variation infinitésimale sur l'abscisse, et* dy *pour désigner une variation infinitésimale sur l'ordonnée. Si* y *dépend de* x*,* $\dfrac{dx}{dy}$ *désigne donc la variation infinitésimale de la fonction* y *rapportée à la variation infinitésimale de* x *qui l'a provoquée : il s'agit bel et bien de la définition de Fermat, et rien de plus : pas de nouvelle théorie, juste une nouvelle notation, encore largement utilisée aujourd'hui, notamment sous la forme non quotientée (pensez aux intégrales !)*
- *À la fin du 18ème siècle, Joseph-Louis Lagrange*[3] *introduit la terminologie « dérivée » et la notation* f'*.*

[2]. **Pierre de Fermat**, né dans la première décennie du XVIIème siècle, à Beaumont-de-Lomagne (département actuel de Tarn-et-Garonne), près de Montauban, et mort le 12 janvier 1665 à Castres (département actuel du Tarn), est un magistrat, polymathe et surtout mathématicien français, surnommé « le prince des amateurs ».

Il est aussi poète, habile latiniste et helléniste, et s'est intéressé aux sciences et en particulier à la physique. On lui doit notamment le principe de Fermat en optique.

Il est particulièrement connu pour avoir énoncé le dernier théorème de Fermat, dont la démonstration n'a été établie que plus de 300 ans plus tard par le mathématicien britannique Andrew Wiles en 19944.

[3]. **Joseph Louis, comte de Lagrange** (en italien Giuseppe Lodovico ou aussi Giuseppe Luigi De la Grange Tournier1), né à Turin en 1736 et mort à Paris en 1813, est un mathématicien, mécanicien et astronome italien naturalisé français. À l'âge de trente ans, il quitte le Piémont et va séjourner à Berlin pendant vingt-et-un ans. Ensuite, il s'installe pour ses vingt-six dernières années à Paris, où il obtient la nationalité française sur l'instance d'Antoine Lavoisier.

Fondateur du calcul des variations avec Euler et de la théorie des formes quadratiques, il démontre le théorème de Wilson sur les nombres premiers et la conjecture de Bachet sur la décomposition d'un entier en quatre carrés. On lui doit un cas particulier du théorème auquel on donnera son nom en théorie des groupes, un autre sur les fractions continues, l'équation différentielle de Lagrange.

En physique, en précisant le principe de moindre action, avec le calcul des variations, vers 1756, il invente la fonction de Lagrange, qui vérifie les équations de Lagrange, puis développe la mécanique analytique, vers 1788, pour laquelle il introduit les multiplicateurs de Lagrange. Il entreprend aussi des recherches importantes sur le problème des trois corps en astronomie, un de ses résultats étant la mise en évidence des points de libration (dits points de Lagrange) (1772).

Il élabore le système métrique avec Lavoisier pendant la Révolution. Il est membre fondateur du Bureau des longitudes (1795) avec, entre autres, Laplace et Cassini. Il participe à l'enseignement de mathématiques de l'École normale de l'an III avec Joseph Lakanal, de l'École polytechnique (dès 1797) avec Monge et Fourcroy. Il a aussi été le fondateur de l'Académie de Turin (1758).

En mécanique des fluides, il introduit le concept de potentiel de vitesse en 1781, bien en avance sur son temps. Il démontre que le potentiel de vitesse existe pour tout écoulement de fluide réel, pour lequel la résultante des forces dérive d'un potentiel. Dans le même mémoire de 1781, il introduit en plus deux notions fondamentales : le concept de la fonction de courant, pour un fluide incompressible, et le calcul de la célérité d'une petite onde dans un canal peu profond. Rétrospectivement, cet ouvrage marque une étape décisive dans le développement de la mécanique des fluides moderne.

Lagrange a aussi œuvré dans le domaine de la théorie des probabilités.

— *La formalisation rigoureuse est due à Karl Weierstrass* [4] *dans la deuxième moitié du 19ème siècle, s'appuyant sur une définition rigoureuse de la notion de limite et de continuité (dont il donne également pour la première fois une définition rigoureuse et précise)*

I.1 Taux d'accroissement et nombre dérivé

Définition 1 (Nombre dérivé, fonction dérivée, tangente) : Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{I}$.

- On dit que f *est dérivable en* a si le taux d'accroissement de f en a $\tau_{a,f}(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand $x \to a$, $x \neq a$.

  Dans ce cas, on appelle cette limite *le nombre dérivé de* f *en* a, noté $f'(a)$:

  $$f'(a) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

- On dit que f *est dérivable sur* I si f est dérivable en tout $a \in \mathrm{I}$ au sens précédent.

  On appelle alors *fonction dérivée* de f sur I, que l'on note f' $\left(\text{ou } \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)$, la fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x :

  $$f' : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & f'(x). \end{array}$$

- On note $\mathscr{D}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Interprétation graphique :
Soit $\mathrm{A}\,(a\,;f(a))$ un point de la courbe représentative, donnons nous un autre point $\mathrm{M}\,(x\,;f(x))$ avec $x \in \mathscr{D}_f$, un point variable « pas trop éloigné » de A.
On considère alors les droites (AM), sécantes en A et M à $\mathscr{C}_f$.
Le taux d'accroissement $\tau_{a,f}(x)$ désigne le coefficient directeur de la corde (AM).

$$\tau_{a,f} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

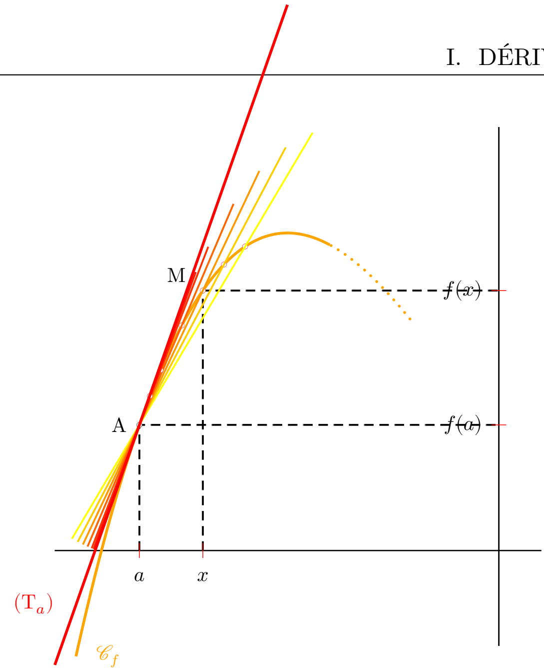


Figure XVI.1 – Tangente à une courbe vue comme limite de ses sécantes.

Dire que f est dérivable en a revient à dire que la fonction

$$\tau_{a,f} : \begin{array}{ccc} \mathrm{I}\setminus\{a\} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

admet un prolongement par continuité en a.

Remarques :

— La dérivation est une notion :

- locale et non ponctuelle : la fonction f doit être définie dans un voisinage de a et pas seulement en a.
- locale et non globale : elle ne dépend que de la restriction de f à un voisinage de a quel qu'il soit et non de sa description globale.

⌊4⌋. **Karl Theodor Wilhelm Weierstrass**, habituellement appelé Karl Weierstrass, orthographié Weierstraß en allemand, né le 31 octobre 1815 à Ostenfelde (Westphalie), mort le 19 février 1897 à Berlin, était un mathématicien allemand, lauréat de la médaille Copley en 1895.

Karl Weierstrass est souvent cité comme le « père de l'analyse moderne ». Il consolida des travaux de Cauchy sur les nombres irrationnels et leur amena une nouvelle compréhension. Ses travaux les plus connus portent sur les fonctions elliptiques.

C'est lui qui le premier rendit public un exemple de fonction continue nulle part dérivable.

Weierstrass étudia la fiabilité de l'analyse, dont il propose une construction logique rigoureuse. À cette époque, les démonstrations de l'analyse s'appuyaient sur des définitions ambiguës, d'où la nécessité de nouvelles définitions. Tandis que Bolzano avait développé une définition suffisamment rigoureuse des limites dès 1817 (et peut-être même auparavant), ses travaux restèrent quasi inconnus de la communauté mathématique pendant des années, et d'autres mathématiciens éminents, comme Cauchy, n'avaient que de vagues définitions de la limite et de la continuité d'une fonction.

En 1861, Weierstrass définit la continuité comme suit :

f est continue en x_0 si, pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel δ strictement positif tel que, si x est à une distance de x_0 strictement inférieure à δ, alors la valeur de la fonction f en x est à une distance strictement inférieure à ε de la valeur de la fonction f en x_0.

$$\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\delta > 0 / |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Weierstrass formula également une définition de la limite et de la dérivée « en $(\varepsilon,\ \delta)$ », telle qu'on l'enseigne généralement aujourd'hui.

Avec ces nouvelles définitions, il put donner des démonstrations rigoureuses de plusieurs théorèmes qui reposent sur des propriétés des nombres réels jusqu'alors tenues pour intuitives, tels le théorème des *valeurs intermédiaires*, le théorème de *Bolzano-Weierstrass* et le théorème de *Borel-Lebesgue*.

— Par définition, le nombre dérivé en a, s'il existe, est donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe en au point d'abscisse a.

- Si f est dérivable en a, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est alors définie comme la droite d'équation

$$(\mathrm{T}_a) : \ y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

- Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ alors la (demi-)tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est la droite d'équation $x = a$.

Exercice 1 (Dérivée usuelle) : Retrouver les fonctions dérivées des fonctions usuelles suivantes et préciser leur domaine de dérivabilité :

1. Les fonctions constantes.
2. $x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbb{Z}$.
3. $x \longmapsto \sin(x)$.

Exemples 1 :

- La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ de nombre dérivé respectivement égal à -1 et 1 en tout point de ces intervalles.

  Or, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|-|0|}{x-0}$.

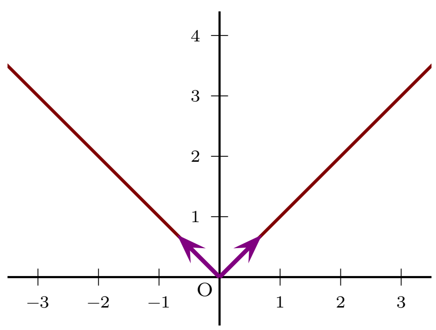
  Donc $x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.
- La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

  De plus, $\forall\, a, x \in \mathbb{R}_+$ et $a \neq x$, on a :

$$\tau_{a,\sqrt{}}(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \xrightarrow[x\to a]{} \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{a}} & \text{si } a \neq 0 \\ +\infty & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

  La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

  D'une manière générale, ce sera le cas pour toutes les réciproques de fonctions dont la dérivée s'annule en ce point (cf. théorème (6)).



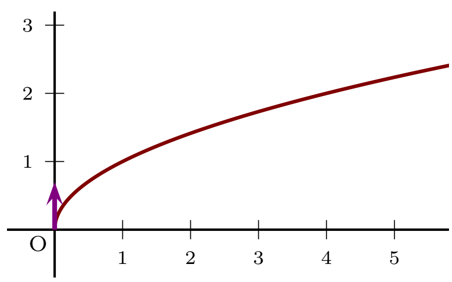


Figure XVI.2 – Les fonctions valeur absolue $x \longmapsto |x|$ et racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ ne sont pas dérivables en 0.

Théorème 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Par la contraposée, une fonction non continue au voisinage d'un point ne peut y être dérivable.

Preuve : Soit $a \in \mathrm{I}$ quelconque.

Pour tout $x \in \mathrm{I} \setminus \{a\}$, on peut toujours écrire :

$$f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a) + f(a).$$

Comme f est dérivable en a, le membre de droite a bien une limite quand x tend vers a, qui est $f(a)$.

Ainsi, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$: f est continue en $a \in \mathrm{I}$ donc sur I.

Ce théorème explique simplement que la notion de dérivabilité est plus forte que celle de continuité comme l'était déjà la notion de continuité par rapport à celle de définition. On pourra donc trouver des fonctions continues sans qu'elles soient dérivable mais pas l'inverse.

D'une manière générale, retenez que :

— la représentation graphique d'une fonction continue est en un seul morceau.

— la représentation graphique d'une fonction dérivable admet une tangente en chacun de ses points (*cf.* proposition (3)).

ATTENTION La réciproque de ce théorème est fausse. Pour s'en rendre compte, on peut s'appuyer sur les représentations graphiques de la valeur absolue, de la racine carrée ou, globalement, de celle de la figure (XVI.3) .

I.2 Dérivées à droite et à gauche

De même que pour les limites ou la continuité, on définit les deux dérivées directionnelles à gauche et à droite :

Définition 2 (Dérivabilité à gauche/à droite en un point) : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{I}$.

Dérivabilité à gauche : On dit que f est *dérivable à gauche* en a si $f_{|\mathrm{I} \cap]-\infty;a]}$ est dérivable en a *i.e.* si la limite $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Cette limite est notée $f'_g(a)$.

Dérivabilité à droite : On dit que f est *dérivable à droite* en a si $f_{|\mathrm{I} \cap [a;+\infty[}$ est dérivable en a *i.e.* si la limite $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Cette limite est notée $f'_d(a)$.

Dans les cas d'existence, $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ s'appellent respectivement les nombres dérivés à gauche et à droite de f en a.

Remarques :

— Dans les cas d'existence, pour $a \in \mathrm{I}$, on a :

$$f'_d(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

et

$$f'_g(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

— Dire que f est dérivable à gauche ou à droite en a revient à dire que la fonction

$$\tau_{a,f}: \begin{array}{ccc} \mathrm{I}\setminus\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

admet une limite à gauche et à droite respectivement.

— Parce qu'elle n'est qu'un cas particulier de la dérivabilité en général, la dérivabilité à gauche (resp. à droite) implique la continuité à gauche (resp. à droite).

— Évidemment, la première condition pour que la dérivée à gauche (resp. à droite) existe est que cette limite ait un sens, donc que f soit bien définie en a et dans un voisinage à gauche (resp. à droite) de a.

Proposition 2 (Caractérisation de la dérivabilité par f'_d et f'_g) : Soit $a \in \mathrm{I}$, non égal à une des bornes de I.

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche en } a \\ f \text{ est dérivable à droite en } a \\ f'_g(a) = f'_d(a). \end{cases}$$

Dans ce cas, $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Preuve :

$$\begin{aligned} f \text{ est dérivable en } a &\iff \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ existe et est finie} \\ &\iff \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ et } \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ existent,} \\ &\quad\ \text{sont finies et égales} \\ &\iff f \text{ est dérivable à gauche et à droite en } a \text{ et } f'_g(a) = f'_d(a). \end{aligned}$$

Si f admet une dérivée à droite et à gauche en a tel que $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ alors $\mathrm{A}\,(a\,;f(a))$ est appelé *point anguleux*, en lequel la courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux demies-tangentes (représentées traditionnellement par des demi-flèches) non parallèles d'équation respective :

$$(\mathrm{T}_{a,g}) : \ y = f'_g(a)(x-a) + f(a),\ \forall\, x \leqslant a \quad \text{et} \quad (\mathrm{T}_{a,d}) : \ y = f'_d(a)(x-a) + f(a),\ \forall\, x \geqslant a.$$

En particulier, la fonction f n'est pas dérivable en a.

Exemples 2 :

- La fonction $x \mapsto |x|$, bien que dérivable à gauche et à droite en 0, n'est pas dérivable en 0.
- La fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ est dérivable en 0.

Exercice 2 : Montrer que la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \sin(x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$

est dérivable en 0.

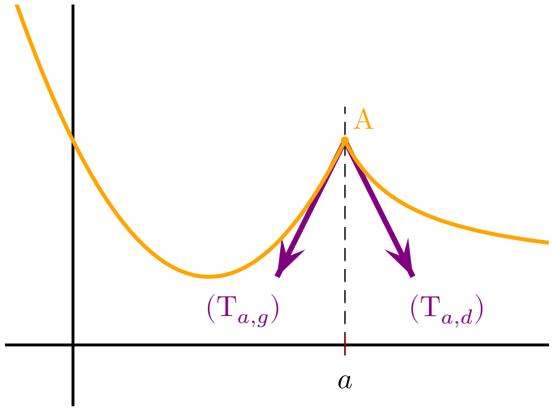


Figure XVI.3 – En un point anguleux, la fonction est continue sans être dérivable.

Correction : Il est clair que f est dérivable à gauche et à droite en 0.

De plus, $f_g'(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} = 1 = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{\sin(x) - \ln(1)}{x} = f_d'(0)$.

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

ATTENTION

Une fonction peut n'être ni dérivable à gauche ni dérivable à droite en un point.

C'est le cas de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$

En effet, $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0, ni à gauche ni à droite.

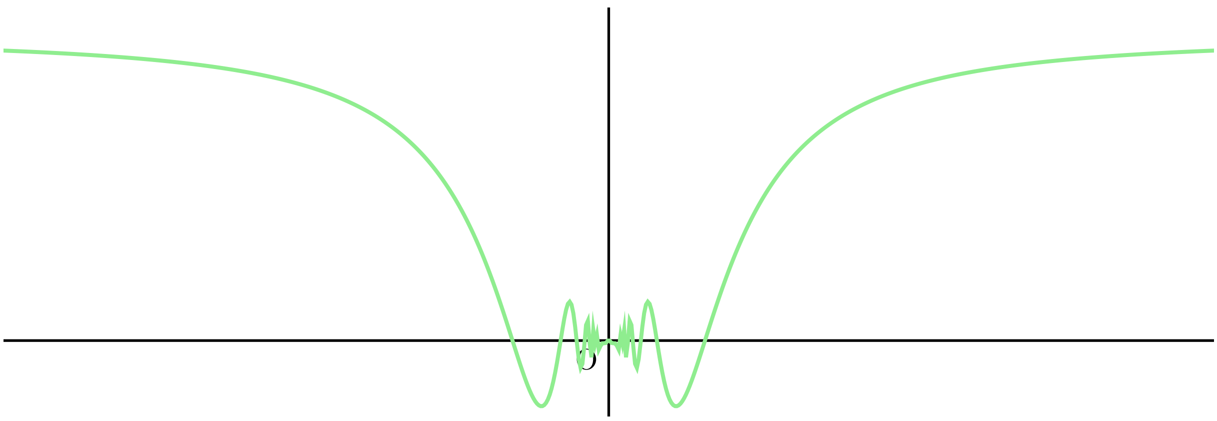


Figure XVI.4 – Une fonction peut être continue sans être dérivable ni à gauche, ni à droite.

Remarque : Quid de la dérivabilité sur un fermé ?

Définition 2 (Dérivabilité sur un intervalle fermé) : Soit f définie sur un intervalle **fermé** $\mathrm{I} = [a\,;b]$.

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable sur $\mathring{\mathrm{I}} =]a\,;b[$, dérivable à droite en a et à gauche en b.

Adaptation immédiate à des intervalles semi-ouverts.

Pour peu que f soit dérivable sur I, on peut ainsi étendre la définition (1) à un intervalle $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ fermé mais alors, il n'est pas équivalent de dire que f est dérivable sur J et que la restriction de f est dérivable sur J.

Par exemple, si $\mathrm{I} = [0\,;2]$ et $\mathrm{J} = [0\,;1]$, la dérivabilité de f sur I stipule la dérivabilité de f en 1 (donc la dérivabilité à la fois à gauche et à droite), alors que la dérivabilité de la restriction de f à $[0\,;1]$ n'impose que la dérivabilité à gauche en 1.

Remarquez que les problèmes ont toujours lieu en des bornes fermées de J, qui ne sont pas des bornes de I. Ainsi, on pourrait contourner le problème en se restreignant à la dérivabilité sur des intervalles du type $\mathrm{I} \cap \mathrm{U}$, où U est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

I.3 Dérivabilité et approximation affine

Proposition 3 (Développement limité d'ordre 1) : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

f est dérivable en a si, et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\; f(x) = f(a) + (x-a)\,\ell + (x-a)\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0. \tag{XVI.1}$$

De plus, si ℓ existe alors $f'(a) = \ell$:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x). \tag{XVI.2}$$

Preuve : Supposons f dérivable en a. Posons, pour tout $x \in \mathrm{I}\backslash\{a\}$,

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a).$$

Comme f est dérivable en a, $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, et on peut prolonger ε à I tout entier en posant $\varepsilon(a) = 0$.

Par construction, la fonction ε tend vers 0 en a, et on a, pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$f(x) - f(a) = (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x).$$

On a donc (XVI.1) avec $\ell = f(a)$.

Réciproquement, supposons (XVI.1) vérifiée.

Pour tout $x \in \backslash\{a\}$, on a :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell + \varepsilon(x).$$

Ainsi, lorsque x tend vers a, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \longrightarrow \ell$. La fonction f est donc dérivable en a, et $f'(a) = \ell$.

— La relation (XVI.2) est appelée *développement limité à l'ordre* 1 *de* f *en* a.

  La fonction f est donc dérivable en a si, et seulement si elle admet un développement limité d'ordre 1 en a.

— L'application affine $x \longmapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ est appelée l'approximation affine de f en a. Sa courbe représentative est la tangente de f au point d'abscisse a.

— On peut montrer que cette approximation affine est la meilleure au point a.

  On verra plus tard comment contrôler l'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par $f(a)+(x-a)f'(a)$.

Graphiquement, cela revient à approcher le point M de $\mathscr{C}_f$ par le point M′ de la tangente en a.

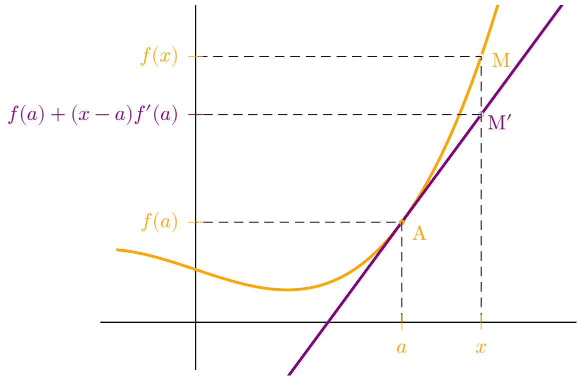


Figure XVI.5 – La tangente est la meilleure approximation affine de f au point a.

Exemple 3 : Par approximation affine

$$\sqrt{4,001} = \sqrt{4+0,001} \simeq \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}0,001 = 2,00025.$$

La calculatrice donne $\sqrt{4,001} \simeq 2,0002499$.

II Fonctions dérivables

II.1 Stabilité algébrique

Proposition 4 : Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

1. Toute combinaison linéaire $\lambda f+g$ de fonctions dérivables en a est une fonction dérivable en a et
$$(\lambda f+g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a).$$
2. Le produit de deux fonctions dérivables en a est une fonction dérivable en a et
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
3. L'inverse d'une fonction dérivable en a et *ne s'annulant pas en a* est une fonction dérivable en a et
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}.$$
4. Le quotient de deux fonctions dérivables en a dont *le dénominateur ne s'annule pas en a* est une fonction dérivable en a et
$$\left(\frac{f}{g}\right)(a)' = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Preuve : Soient $f,\ g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ dérivables en $a \in \mathrm{I}$ et soit $x \in \mathrm{I} \setminus \{a\}$.

(i) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\frac{(\lambda f+g)(x)-(\lambda f+g)(a)}{x-a} = \lambda\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$

Comme f et g sont toutes deux dérivables en a, en a :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a).$$

La limite étant stable par combinaisons affines, on obtient alors :

$$\lim_{x\to a}\frac{(\lambda f+g)(x)-(\lambda f+g)(a)}{x-a} = \lambda\, f'(a)+g'(a).$$

La fonction $\lambda f+g$ est donc dérivable en a et $(\lambda f+g)'(a) = \lambda f'(a)+g'(a)$.

(ii) De même, on a :

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} &= \frac{[f(x)g(x)-f(a)g(x)]+[f(a)g(x)-f(a)g(a)]}{x-a}\\ &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,g(x)+f(a)\,\frac{g(x)-g(a)}{x-a}.\end{aligned}$$

Or,

- g étant dérivable en a, elle y est continue i.e. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$.

  De plus, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$.
- f étant dérivable en a, on a, de même, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

En conclusion,

$$\lim_{x\to a}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = f'(a)g(a)+f(a)g'(a).$$

La fonction $f\times g$ est donc dérivable en a et $(f\times g)'(a) = f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.

(iii) f étant continue en a, et non nulle en a, il existe un voisinage un voisinage U de a sur lequel elle ne s'annule pas.

La fonction $\dfrac{1}{f}$ est donc bien définie sur U et, $\forall\, x\in \mathrm{U}\cap(\mathrm{I}\setminus\{a\})$, on a :

$$\frac{\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{1}{f(a)}}{x-a} = \frac{-\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{f(a)f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}.$$

Remarque : On a encore utilisé la continuité de f en a pour écrire $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} f(a)$.

La fonction $\dfrac{1}{f}$ est donc dérivable en a et $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(a) = -\dfrac{f'(a)}{f^2(a)}$.

(iv) Simple application de 2 et 3 : $\dfrac{f}{g} = f\times\dfrac{1}{g}$...

Exercice 3 : Soit $a\in\mathbb{R}$ et h :
$$\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R}\\ x & & \begin{cases}-(x-a)^2 & \text{si } x<a\\ (x-a)^2 & \text{si } x\geqslant a\end{cases}\end{array}$$

1. Démontrer que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction h' est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Correction :

1. D'après les théorèmes généraux, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} -(x-a)^2 = 0 = h(a) = (a-a)^2 = 0$. La fonction f est donc continue en a donc sur $\mathbb{R}$.

Pour $x<a$, on a $\dfrac{h(x)-h(a)}{x-a} = -(x-a)$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} \dfrac{h(x)-h(a)}{x-a} = 0$. La fonction h est donc dérivable en a par valeurs inférieures et $h'_g(a)=0$.

Pour $x>a$, on a aussi $\dfrac{h(x)-h(a)}{x-a} = x-a$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\geqslant a}} \dfrac{h(x)-h(a)}{x-a} = 0$. La fonction h est donc aussi dérivable en a par valeurs supérieures et $h'_d(a)=0$.

Comme $h'_g(a)=h'_d(a)$, la fonction h est donc dérivable en a donc sur $\mathbb{R}$. En particulier, sa dérivée est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est donc de classe $\mathscr{C}^1$.

2. Il est assez clair que h est au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$.

De plus, $h' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{a\} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \begin{cases} -2(x-a) & \text{si } x<a \\ 2(x-a) & \text{si } x\geqslant a \end{cases} \end{array}$

Pour $x<a$, on a $\dfrac{h'(x)-h'(a)}{x-a} = -2$. La fonction h' est donc dérivable en a par valeurs inférieures et $h''_g(a) = -2$.

Pour $x>a$, on a aussi $\dfrac{h'(x)-h'(a)}{x-a} = 2$. La fonction h' est donc aussi dérivable en a par valeurs supérieures et $h''_d(a) = 2 \neq h''_g(a)$. La fonction h' n'est donc pas dérivable en a donc sur $\mathbb{R}$.

II.2 Dérivabilité d'une composée

Proposition 5 : Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $a\in \mathrm{I}$.

La composée d'une fonction dérivable f en a et d'une fonction dérivable g en $f(a)$ est une fonction dérivable en a et
$$(g\circ f)'(a) = f'(a)\times(g'\circ f)(a).$$

Preuve : Soient $f:\mathrm{I}\longmapsto\mathbb{R}$ dérivable en $a\in\mathrm{I}$, $g:\mathrm{J}\longmapsto\mathbb{R}$ dérivable en $f(a)\in\mathrm{J}=f(\mathrm{I})$ et soit $x\in\mathrm{I}\setminus\{a\}$.

Les fonctions f et g étant dérivables, elles admettent des développements limités d'ordre 1 respectivement d'après la proposition (3) .

en a pour f : $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon_1(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

en $\mathrm{A}=f(a)$ pour g : $g(x) = g(\mathrm{A}) + (x-\mathrm{A})g'(\mathrm{A}) + (x-\mathrm{A})\varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to \mathrm{A}]{} 0$.

On pose de plus $\varepsilon_1(a) = \varepsilon_2(\mathrm{A}) = 0$ si bien que ε_1 et ε_2 sont continues respectivement en a et $\mathrm{A}=f(a)$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\Big(\underbrace{f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x)}_{X_a}\Big)$$

Comme $\lim\limits_{x \to a} X_a = A$,

$$= g(A) + (X_a - A)g'(A) + (X_a - a)\varepsilon_2(X_a).$$

Or, $X_a - A = (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x)$,

$$= (g \circ f)(a) + (x-a)f'(a)g'(A) + (x-a)g'(A)\varepsilon_1(x) + (X_a - a)\varepsilon_2(X_a).$$
$$= (g \circ f)(a) + (x-a)f'(a)g'(A) + (x-a)\Big(\underbrace{g'(A)\varepsilon_1(x) + (f'(a) + \varepsilon_1(x))\varepsilon_2(X_a)}_{\varepsilon_3(x)}\Big).$$

Comme $\lim\limits_{x \to a} X_a = A$, par continuité de ε_2 en A, $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_2(X_a) = 0$, puis $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_3(x) = 0$.

Donc, $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(a) + (x-a)f'(a)g'(f(a)) + (x-a)\varepsilon_3(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_3(x) = 0$.

Par conséquent, $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.

Exercice 4 : Étudier la dérivabilité de la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x(1-x)}\right).$$

Donner sa dérivée le cas échéant.

II.3 Dérivabilité de la réciproque

Théorème 6 (Continuité et dérivabilité de la réciproque) : Soit $f : I \longmapsto J$ une bijection où I et J sont deux **intervalles** de $\mathbb{R}$.

Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et on a :

$$\forall\, b \in J,\ \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)} \quad \text{où } b = f(a).$$

Preuve : Soient $b = f(a) \in J$, $y \in J \setminus \{b\}$ et $x \in I$, l'unique antécédent de y par f.

On a :

$$\lim_{\substack{y \to b \\ y \neq b}} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{\lim\limits_{\substack{y \to b \\ y \neq b}} \dfrac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}},$$

où $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b)$ par injectivité de f^{-1}.

De plus, par continuité de f^{-1} sur J, $f^{-1}(y) = x$ tend vers $f^{-1}(b) = a$ quand y tend vers b :

$$= \frac{1}{\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}},$$

où $f(x) \neq f(a)$ par injectivité de f.

Comme f est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a) \neq 0$, on obtient :

$$= \frac{1}{f'(a)}.$$

f^{-1} est donc dérivable en b et $\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

La dérivabilité étant une notion locale, si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et on a :

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Définition 3 (Difféomorphisme) : On appelle *difféomorphisme* toute bijection dérivable entre deux ouverts de $\mathbb{R}$ dont la bijection réciproque est dérivable.

Le théorème (6) affirme donc que les fonctions dérivables entre deux intervalles dont la dérivée ne s'annule pas sur un intervalle I sont des difféomorphismes sur I.

Exemple 4 : La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée $\exp' = \exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et est strictement monotone.

La fonction exp est donc bijective et sa réciproque $\ln :]0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\exp^{-1} x)} = \frac{1}{\exp(\exp^{-1} x)} = \frac{1}{x}.$$

Remarques :

— Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à $\Delta : y = x$.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ en a a pour coefficient directeur $f'(a)$, celle à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ en $b = f(a)$ a pour coefficient directeur $\frac{1}{f'(a)}$.

Les tangentes sont donc, elles-aussi symétriques par rapport à $\Delta : y = x$.

— Moyen mnémotechnique :

Comme $f \circ f^{-1} = \mathrm{I}_d$ alors en utilisant la formule de dérivation d'une fonction composée, $(f^{-1})' \times f' \circ f^{-1} = 1$ et donc $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Ce moyen permet de retrouver la formule, mais ne démontre pas la dérivabilité de f^{-1}.

— Si $f'(a) = 0$, alors, la démonstration précédente prouve que f^{-1} **n'est pas dérivable en** b.

Graphiquement, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point $\mathrm{M}(a\,;b)$ où $b = f(a)$. Par symétrie, on en déduit que $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admet une tangente verticale au point $\mathrm{M}(b\,;a)$.

Exemple 5 : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longmapsto & \mathbb{R}_+ \\ x & & x^2 \end{array}$ est bijective et continue sur $\mathbb{R}_+$. Sa réciproque $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longmapsto & \mathbb{R}_+ \\ x & & \sqrt{x} \end{array}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car $f'(x) = 2x$ s'annule pour $x = 0$.

D'après le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque f^{-1} est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{f(0)\}$, et pour $y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Exercice 5 : Soit $\varphi : x \longmapsto x + \mathrm{e}^x$.

1. Montrer que φ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble J à déterminer.
2. Justifier que φ^{-1} est dérivable sur J.
3. Déterminer $(\varphi^{-1})'(1)$.

II.4 Dérivée d'ordre supérieur

Une fonction peut être plus ou moins « régulière ». La régularité d'une fonction se mesure à l'aide des propriétés de continuité et de dérivabilité.

Plus on peut dériver une fonction, plus celle-ci sera régulière. Intuitivement, plus une fonction est régulière, plus son graphe est lisse.

Définition 4 (Dérivée n-ième) : Soient I une réunion d'intervalles et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{K}$. On définit récursivement :

- $f^{(0)} = f$
- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ est dérivable, $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.

Si, pour tout $l \leqslant n$, la fonction $f^{(k)}$ existe, on dit que f est n fois dérivable sur I et on appelle $f^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f sur I.

On note $\mathscr{D}^n\,(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions définies et n fois dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarque : Pour pouvoir définir la dérivée n-ième de f en a, il faut pouvoir dériver $f^{(n-1)}$ en a, et il faut donc que $f^{(n-1)}$ soit définie sur tout un voisinage de a et non seulement en a.

Définition 5 (Fonction de classe $\mathscr{C}^n$) : Une fonction f est dite :

- de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I si elle est n fois dérivable sur I et que $f^{(n)}$ est continue.
- de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle I si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On dit aussi parfois que f est n fois continument dérivable sur I.

Notation et remarques : Soit I une réunion d'intervalles non triviaux et $n \in \mathbb{N}$.

— Les fonctions de classe $\mathscr{D}^0$ sont les fonctions définies sur I.
— Les fonctions de classe $\mathscr{C}^0$ sont les fonctions continues sur I.
— Les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sont les fonctions (définies, continues,) dérivables sur I et de dérivées (définies et) continues sur I.

Remarquez que la dérivabilité ne suffit pas à obtenir la classe $\mathscr{C}^1$.

— On note $\mathscr{D}^\infty(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$ les fonctions n fois dérivables pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il est facile de montrer que

$$\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}\,;\mathbb{K}) = \mathscr{D}^\infty(\mathrm{I}\,;\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}\,;\mathbb{K}) = \bigcap_{k\geqslant 0} \mathscr{C}^k(\mathrm{I}\,;\mathbb{K}).$$

— Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a la suite d'inclusions ensemblistes :

$$\mathscr{C}^\infty \subsetneq \ldots \subsetneq \mathscr{C}^{k+1} \subsetneq \mathscr{D}^{k+1} \subsetneq \mathscr{C}^k \subsetneq \mathscr{D}^k \subsetneq \ldots \subsetneq \mathscr{C}^1 \subsetneq \mathscr{D}^1 \subsetneq \mathscr{C}^0 \subsetneq \mathscr{D}^0 \subsetneq \mathbb{K}^{\mathrm{I}} = \mathscr{F}(\mathrm{I}\,;\mathbb{K}).$$

Les inclusions sont strictes.

Exemple 6 : L'exponentielle, les fonctions sinus, cosinus, les polynômes, les fractions rationnelles, le logarithme sur leur ensemble de définition sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.

De manière générale, la plupart des fonctions que l'on nomme « usuelles » ou « de référence » sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition ou, à défaut, sur l'intérieur de celui-ci.

Exercice 6 : Soit $f : x \longmapsto x^n$ et $k \in \mathbb{N}$.

Pour tout $k \leqslant n$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$.

Proposition 7 (Stabilité de $\mathscr{C}^n(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$) : Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et I, J des réunions d'intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$.

$\mathscr{C}^n(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$ est stable par combinaisons linéaires :

$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, f, g \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$,

$$\lambda f + g \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}\,;\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\quad (\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}.$$

$\mathscr{C}^n(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$ est stable par produit :

$\forall\, f, g \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$,

$$f \times g \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}\,;\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}.$$

(Formule de Leibniz)

$\mathscr{C}^n(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$ est « stable » par quotient et composition :

- $\forall\, f, g \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$, si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$.
- $\forall\, f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}\,;\mathrm{J})$ et $g \in \mathscr{C}^n(\mathrm{J}\,;\mathbb{K})$, $\quad g \circ f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$.

$\mathscr{C}^n(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$ est presque stable par réciprocité :

Soient I un **intervalle** et $f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ une bijection de I sur $f(\mathrm{J})$.

Si f' ne s'annule pas sur I alors $f^{-1} \in \mathscr{C}^n(\mathrm{J}\,;\mathrm{I})$.

Tous les assertions précédentes restent vraies si l'on remplace $\mathscr{C}^k$ par $\mathscr{D}^k$.

Preuve : On raisonne ensuite par récurrence sur n, avec des initialisations toutes triviales ou déjà démontrées.

Combinaisons linéaires : Le cas des combinaisons linéaires tombe sous le sens.
Produit : Pour l'hérédité, on suppose le résultat vrai au rang k.

Soient $f, g \in \mathscr{C}^{k+1}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$. Les fonctions f et g sont au moins de classe $\mathscr{C}^1$, donc fg aussi et $(fg)' = f'g + fg'$, mais $f'g$ et fg' sont de classe $\mathscr{C}^k$ par hypothèse de récurrence, donc $(fg)'$ aussi, ce qui prouve que fg est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$.

Ensuite :

$$\begin{aligned}(fg)^{(k+1)} = (f'g)^{(k)} + (fg')^{(k)} &\underset{\text{HDR}}{=} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p+1)} g^{(k-p)} + \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p+1)} \\ &= \sum_{p=1}^{k+1} \binom{k}{p-1} f^{(p)} g^{(k-p+1)} + \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p+1)} \\ &= \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k}{p-1} f^{(p)} g^{(k-p+1)} + \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p+1)} \\ &\underset{\text{Formule de Pascal}}{=} \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} f^{(p)} g^{(k+1-p)} \text{ et l'hérédité. ...}\end{aligned}$$

Quotient : Pour l'hérédité, on suppose le résultat vrai au rang k.

Soient $f, g \in \mathscr{C}^{k+1}(\mathrm{I}, \mathbb{K}), g$ ne s'annulant pas sur I. Les fonctions f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$, donc $\dfrac{f}{g}$ aussi et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$, mais $f'g - fg'$ et g^2 sont de classe $\mathscr{C}^k$ par produit, donc $\left(\dfrac{f}{g}\right)'$ aussi par hypothèse de récurrence, ce qui prouve que $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$.

Composition : Pour l'hérédité, on suppose le résultat vrai au rang k.

Soient $f \in \mathscr{C}^{k+1}(\mathrm{I}, \mathrm{J})$ et $g \in \mathscr{C}^{k+1}(\mathrm{J}, \mathbb{K})$. Les fonctions f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$, donc $g \circ f$ aussi et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$, mais $g' \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ par hypothèse de récurrence, donc $(g \circ f)'$ aussi par produit, ce qui prouve que $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$.

Réciproque : Pour l'hérédité, on suppose le résultat vrai au rang k.

Soit $f \in \mathscr{C}^{k+1}(\mathrm{I}, \mathrm{J})$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$, bijective et dont la dérivée ne s'annule pas sur I. D'après le théorème (6) de la dérivabilité d'une fonction réciproque, $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f'}$. Comme f' ne s'annule pas sur I et est de classe $\mathscr{C}^k$ par hypothèse de récurrence, $(f^{-1})'$ est aussi de classe $\mathscr{C}^k$, ce qui prouve que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur J.

Remarques :

— Il existe une formule explicite pour la dérivée d'ordre n d'une composition (formule de Faà di Bruno), mais cette formule est fort complexe et tout à fait inutile à retenir en PTSI.

$$(f \circ g)^{(n)} = \sum_{\substack{(m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n \\ 1m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n = n}} \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k)}}{k!}\right) \times g^{(m_1+m_2+\dots m_n)} \circ f.$$

— Une bijection de classe $\mathscr{C}^k$ dont la bijection réciproque est aussi de classe $\mathscr{C}^k$ est appelée un $\mathscr{C}^k$-*difféomorphisme*.

Exemples 7 :

- La fonction $\exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}\,;]0\,;+\infty[)$ et, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0$.

  La fonction exp établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\exp(\mathbb{R}) =]0\,;+\infty[$.

  Sa bijection réciproque, la fonction ln, est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.
- La fonction $\tan_{|]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[} \in \mathcal{C}^\infty\left(\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\,;\mathbb{R}\right)$ et, $\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$.

  La fonction $\tan_{|]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[}$ établit donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\tan_{|]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[}\left(\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$.

  Sa bijection réciproque, la fonction arctan, est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\cos_{|]0\,;\pi[} \in \mathcal{C}^\infty(]0\,;\pi[\,;\mathbb{R})$ et, $\forall\, x \in]0\,;\pi[$, $\cos'(x) = -\sin(x) \neq 0$.

  La fonction $\cos_{|]0\,;\pi[}$ établit donc une bijection de $]0\,;\pi[$ dans $\tan_{|]0\,;\pi[}(]0\,;\pi[) =]-1\,;1[$.

  Sa bijection réciproque, la fonction arccos, est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$.

III Théorème des accroissements finis

III.1 Extrema

Théorème 8 (Condition nécessaire d'extremum) : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable en un point intérieur $c \in]a\,;b[$.

Si f admet un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$.

On dit alors que c est un *point critique* ou *stationnaire* (de f).

Preuve : Comme c est intérieur à $[a\,;b]$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]c-\alpha\,;c+\alpha[\subset]a\,;b[$.

Supposons que f présente un maximum local en c. Quitte à réduire α, on peut supposer que c est un maximum sur $]c-\alpha\,;c+\alpha[\subset]a\,;b[$ i.e.

$$x \in]c-\alpha\,;c+\alpha[\implies f(x) \leqslant f(c) \iff f(x) - f(c) \leqslant 0.$$

- À gauche en c i.e. $c - \alpha < x < c$, on a $x - c < 0$ et $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0$.

  La fonction f étant dérivable en c, par passage à la limite en c on a :

$$f'(c) = \lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0.$$

- À droite en c i.e. $c < x < c + \alpha$, on a $x - c > 0$ et $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0$.

  La fonction f étant dérivable en c, par passage à la limite en c, on a :

$$f'(c) = \lim_{\substack{x\to c\\ x>c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0.$$

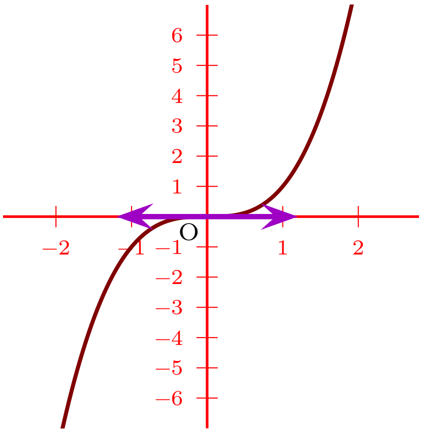
Par conséquent, $f'(c) = 0$.

En un point critique, la courbe représentative de la fonction admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

ATTENTION

La réciproque de ce théorème est fausse : l'annulation de la dérivée n'est qu'une condition **nécessaire**.

La fonction cube $f : x \longmapsto x^3$ admet un point critique en 0 sans que ce ne soit un extremum.



ATTENTION

L'existence d'un extremum n'entraîne en rien la dérivabilité en ce point.

La valeur absolue admet un minimum en 0 où elle n'est pas dérivable.

ATTENTION

C'est évidemment faux si c n'est pas intérieur (cas d'un extremum sur le bord).

Par exemple la fonction $x \longmapsto 1+x$ admet un maximum sur $[0\,;1]$ en $c=1$ mais $f'(c)=1\neq 0$.

C'est un peu pour cela que l'on préfère regarder des intervalles ouverts lorsqu'on parle de dérivabilité.

Exercice 7 : Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction

$$f : x \longmapsto \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad (\alpha > 0).$$

III.2 Théorème de Rolle

Théorème 9 (Théorème de Rolle [5]) : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ est continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$. $\quad (a<b)$

Si $f(a)=f(b)$, alors il existe $c\in\,]a\,;b[$ tel que $f'(c)=0$.

Ce théorème exprime simplement que la courbe d'une fonction dérivable passant par deux points de même abscisse possède une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Preuve : Si f est constante alors tout élément de $]a\,;b[$ convient.
Sinon, $f(\,[a\,;b]\,)=[m\,;\mathrm{M}]$ avec $m<\mathrm{M}$ d'après le théorème des bornes atteintes car f est continue sur le segment $[a\,;b]$.

1. Si $f(a)\neq \mathrm{M}$, alors $f(b)\neq\mathrm{M}$ également.

   Il existe donc $c\in[a\,;b]$ tel que $f(c)=\mathrm{M}$ et même $c\in\,]a\,;b[$ qui est un extremum f intérieur à $[a\,;b]$.

[5]. **Michel Rolle**, né à Ambert le 21 avril **1652** et mort à Paris le 8 novembre **1719**, est un mathématicien français.
Il est principalement connu pour avoir établi, en 1691, dans le cas particulier des polynômes réels à une variable, une première version du théorème qui porte maintenant son nom.
Il inventa aussi, pour désigner la racine n-ième d'un réel x, la notation normalisée : $\sqrt[n]{x}$.

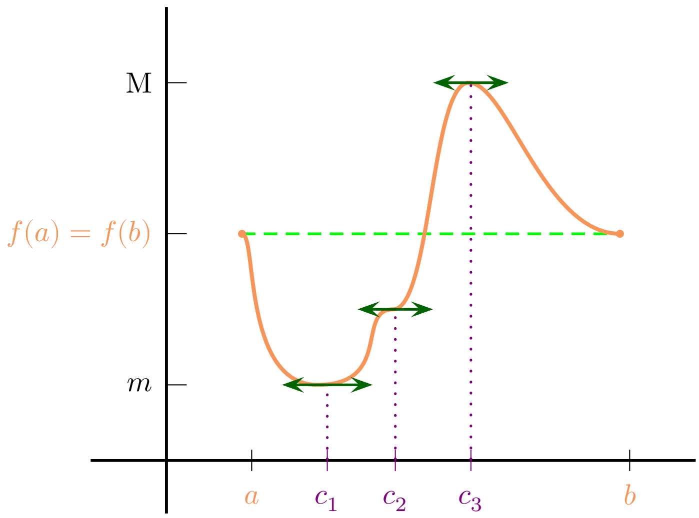


Figure XVI.6 – La courbe d'une fonction dérivable prenant une même valeur en deux points admet une tangente horizontale entre ces derniers.

D'après le théorème (8), on a donc $f'(c) = 0$.

2 Si $f(a) = \mathrm{M}$ alors $f(a) \neq m$ et le même raisonnement s'applique avec le minimum.

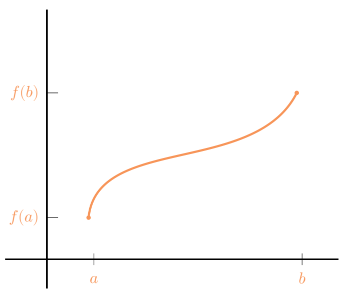


Figure XVI.7 – La condition $f(a) = f(b)$ est nécessaire.

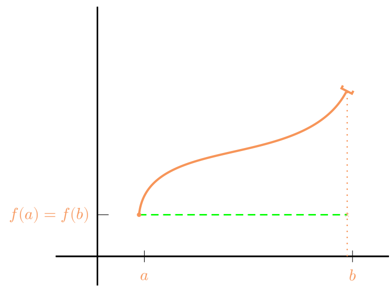


Figure XVI.8 – La continuité est nécessaire.

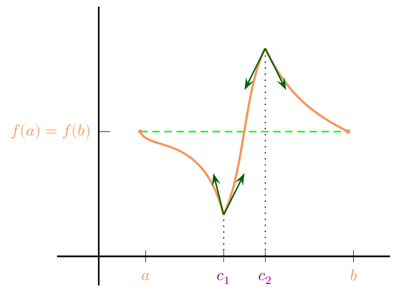


Figure XVI.9 – La dérivabilité est nécessaire.

Remarques :

— Ce théorème est faux si f n'est pas continue en a ou en b. On ne peut se contenter de la dérivabilité sur $]a\,;b[$ qui entraîne seulement la continuité de f sur $]a\,;b[$ ouvert.

Il suffit de prendre $f(x) = x$ sur $[0\,;1[$ et $f(1) = 0$.

— Ce théorème est faux si f est à valeurs complexes car l'ingrédient principal est le *théorème des valeurs intermédiaires* .

Par exemple $t \longmapsto f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$ vérifie $f(0) = f(2\pi)$ mais $f'(t) = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$ ne s'annule jamais sur $[0\,;2\pi]$.

Exemple 8 : Si $f \in \mathscr{C}^2([a\,;b]\,;\mathbb{R})$ et $f(a) = f(b) = f'(a) = 0$ alors f'' s'annule sur $]a\,;b[$.
Cf. l' exemple (??) pour une généralisation.

Exercice 8 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$ $(a < b)$.

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dfrac{(b-a)^2}{2} f''(c)$.

III.3 Théorème des accroissements finis

Théorème 10 (Égalité des accroissements finis) : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$. $\quad (a < b)$

Alors, il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Le théorème des accroissements finis généralise donc le théorème de Rolle.

Graphiquement, il exprime, quant à lui, pour une fonction dérivable, qu'il existe un point de la courbe représentative où la tangente est parallèle à la corde passant par les points d'abscisse a et b.

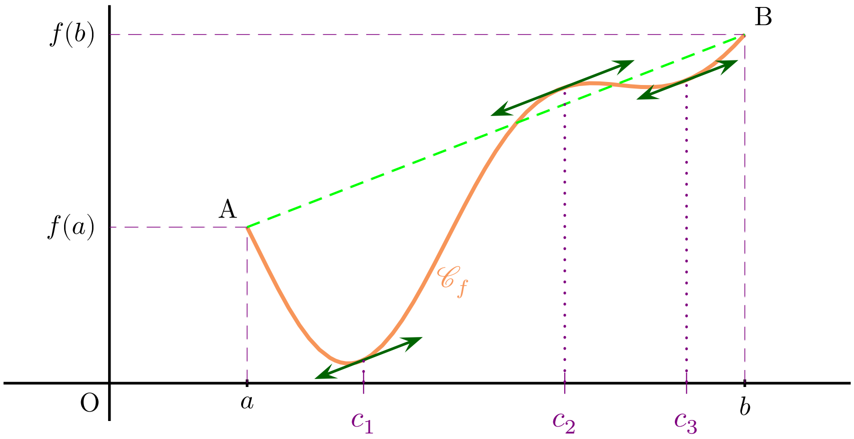


Figure XVI.10 – La courbe d'une fonction dérivable passant par deux points A et B admet une tangente parallèle à la droite (AB) entre ces derniers.

Ce théorème un peu étrange sert très peu en tant que tel, mais ses applications fondamentales en font un des piliers de l'analyse mathématique.

Typiquement, toute majoration/minoration de f' peut être convertie en une majoration/minoration sur f ce que traduit le théorème (11) et c'est notamment à l'aide du théorème des accroissements finis qu'on démontrera le lien entre signe de la dérivée et variations d'une fonction au théorème (14).

Preuve : Soit φ la fonction définie par :

$$\varphi(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) - f(x).$$

Alors :

- $\varphi(b) = \varphi(a)$,
- φ est clairement continue sur $[a\,;b]$,
- et φ est dérivable sur $]a\,;b[$.

D'après le théorème de Rolle, il existe donc $c \in\,]a\,;b[$ tel que :

$$\varphi'(c) = 0 \iff \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(c) = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Théorème 11 (Inégalité des accroissements finis) : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$.

S'il existe deux réels m et M tels que $\forall\, x \in\,]a\,;b[,\quad m \leqslant f'(x) \leqslant \mathrm{M}$ alors

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \mathrm{M}(b-a).$$

Un peu de physique [6] : Ces inégalités ont une interprétation cinématique assez évidente : si on court, par exemple, deux heures avec une vitesse oscillant entre 7 et 12 kilomètres par heure, on aura sûrement parcouru entre 14 et 24 kilomètres.

Exercice 9 : Trouver un majorant de l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{10001}$ par 100.

Le théorème (11) est souvent employé en se contentant de l'hypothèse que f' est bornée sur $[a\,;b]$:

$$\exists\, \mathrm{M} \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, x \in [a\,;b]\,,\quad |f'(x)| \leqslant \mathrm{M}.$$

Ceci donne de l'importance à une certaine classe de fonctions :

Exemple 9 (Fonctions lipschitziennes) : Soit $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ alors f est lipschitzienne de rapport k sur I si :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{I}^2 \,/\, x \neq y,\quad \left|\frac{f(y)-f(x)}{x-y}\right| \leqslant k.$$

Or, $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{I}^2$, tels que $x \neq y$, $\dfrac{f(y)-f(x)}{x-y}$ représente la pente de la corde passant par les points $\mathrm{M}\,(x\,;f(x))$ et $\mathrm{N}\,(y\,;f(y))$.

Ainsi, f est lipschitzienne si les pentes de toutes les cordes de $\mathscr{C}_f$ sont bornées.

En gros, pas de trop grandes variations des images pour une variation donnée des antécédents. Les fonctions lipschitziennes ont une croissance somme toute modérée.

Exemples 10 :

- Une fonction constante sur un intervalle I est 0-lipschitzienne sur I.
- Grâce à l'inégalité triangulaire, $f : x \longmapsto |x|$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x, $\sin'(x) = \cos(x)$ et donc $|\sin'(x)| \leqslant 1$.

  On en déduit que pour tous réels x et y,

  $$|\sin(x) - \sin(y)| \leqslant |x-y|.$$

  De la même façon, on montre que $|\cos(x) - \cos(y)| \leqslant |x-y[$.

  Les fonctions cos et sin sont 1-lipschitziennes.
- Pour tout x, y de $[1\,;+\infty[$, on a :

  $$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|.$$

  La fonction $\sqrt{\ }$ est donc $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1\,;+\infty[$.

Exercice 10 : Montrer que la fonction $x \longmapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Proposition 12 : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ est continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$.

f' est bornée sur $]a\,;b[$ si, et seulement si f est k-lipschitzienne sur $[a\,;b]$.

[6]. Pas trop compliquée

Preuve : *L'implication directe est donnée par le* théorème (11).

Réciproquement, si f est k-lipschitzienne sur un intervalle $[a\,;b]$, alors tous les taux d'accroissements sont majorés en valeur absolue par k, et donc par passage à la limite, $\forall\, x \in \left]a\,;b\right[,\ |f'(x)| \leqslant k$.

Exemple II : Sur tout voisinage de zéro, la dérivée de $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas bornée donc elle ne peut y être lipschitzienne.

En conséquence, si $f \in \mathscr{C}^1([a\,;b]\,;\mathbb{R})$ alors $|f(b)-f(a)| \leqslant \underbrace{\max_{t\in[a;b]} |f'(t)|}_{k} \cdot |b-a|$.

Corollaire 12.1 : Toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un **segment** est lipschitzienne sur ce segment.

Preuve : *f' est continue sur le segment, donc elle est bornée. On applique la proposition précédente.*

Exercice II :

1. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire la nature des suites de terme général :
$$\mathrm{S}_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \text{ et } \mathrm{T}_n = \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \text{ (pour } k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \text{ fixé).}$$
3. Déterminer de même le comportement de : $\left(\displaystyle\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p\ln p}\right)_{n\geqslant 2}$

IV APPLICATIONS

Les constantes de primitivation et de résolution des équations différentielles linéaires sont toutes issues du théorème qui suit, il était temps que nous le démontrions !

IV.1 Caractérisation de la monotonie

Théorème 13 (Caractérisation des fonctions constantes dérivables) : Soient I un **intervalle** et $f \in \mathscr{D}(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.

$$f \text{ est constante sur I si, et seulement si } f' \text{ est identiquement nulle sur } \mathring{\mathrm{I}}.$$

Ce théorème, comme on le verra s'étend aux fonctions à valeurs complexes contrairement au suivant intimement lié à la relation d'ordre.

Preuve : *Soit donc $f \in \mathscr{D}(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.*

- *Si f est constante sur I, alors pour tout $a \in \mathrm{I}$: $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0 \xrightarrow[x\to a]{} 0$ donc $f'(a) = 0$.*
- *Réciproquement, supposons f' nulle sur I et donnons-nous $x,\ y \in \mathrm{I}$ avec $x < y$.*

ATTENTION

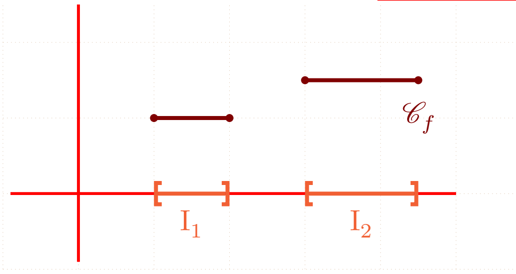


Figure XVI.11 – f est constante sur I_1 et I_2 mais n'est pas constante sur $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2$.

Comme f est continue sur $[x\,;y]$ et dérivable sur $]x\,;y[$, $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c) = 0$ pour un certain $c \in]x\,;y[$ d'après le théorème des accroissements finis i.e.

$$f(x) = f(y).$$

La fonction f est donc constante sur I.

Théorème 14 (Caractérisation des fonctions monotones dérivables) : Soient I un intervalle contenant au moins deux points distincts et f une fonction dérivable sur I à valeurs **réelles**.

1. f est croissante sur I si, et seulement si f' est positive ou nulle sur $\mathring{\mathrm{I}}$.
2. f est strictement croissante I si, et seulement si f' est positive ou nulle et qu'il n'existe aucun intervalle $[a\,;b] \subset \mathring{\mathrm{I}}$ avec $a < b$ sur lequel f' est identiquement nulle.

On dispose bien sûr d'un résultat analogue sur les fonctions décroissantes.

Toute la puissance et la beauté de ce résultat étant de ramener l'étude des variations d'une fonctions à une simple étude de signes… de sa dérivé.

Remarque : En particulier si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathring{\mathrm{I}}$ sauf peut-être en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.

Pas de réciproque ! La fonction $x \longmapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors que sa dérivée n'y est pas strictement positive et s'annule en 0.

Dans les cas les plus fréquents, l'ensemble des points où la dérivée s'annule sera fini, mais attention à des fonctions comme la partie entière. On peut faire bien pire !

ATTENTION

L'hypothèse « I est un intervalle » est indispensable ici. Le théorème est faux si I est une réunion d'intervalles.

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$.

Or, la fonction f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$: $f(-1) < f(1)$.

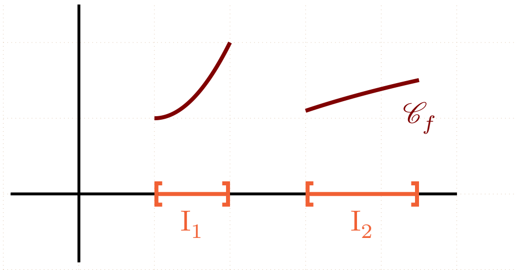


Figure XVI.12 – f est croissante sur I_1 et I_2 donc $f' \geqslant 0$ mais n'est pas croissante sur $I = I_1 \cup I_2$.

ATTENTION

On lit parfois dans la bibliographie, l'énoncé :

Si f' est strictement positive sur I, *sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule alors la fonction f est strictement croissante sur* I.

Remarquez bien qu'il s'agit ici d'une simple implication au contraire de l'équivalence du théorème ci-dessus.

En effet, il existe des fonctions monotones ayant une dérivée s'annulant en une infinité de points.

Preuve : Soit donc $f \in \mathscr{D}(I ; \mathbb{R})$.

(*i*) La démonstration est identique à celle du **théorème** (17) :

- Si f est croissante I, alors pour tout x, $y \in I$ tels que $x < y$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0.$$

Or, f étant dérivable sur I, $\lim_{x \to y} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x)$.

Par passage à la limite sur $x \to y$, on en déduit $f'(x) \geqslant 0$.

- Réciproquement, supposons f' est positive sur I et donnons-nous x, $y \in I$ avec $x < y$.

Comme f est continue sur $[x ; y]$ et dérivable sur $]x ; y[$,

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c) \geqslant 0$$

pour un certain $c \in]x ; y[$ d'après le théorème des accroissements finis. On en déduit immédiatement que

$$f(x) \leqslant f(y).$$

La fonction f est donc croissante sur I.

(*ii*)
- Supposons d'abord f strictement croissante sur I. D'après 1, f' est positive ou nulle sur I.

Si f' est identiquement nulle sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a < b$, alors f y est constante et $f(a) = f(b)$ puis $a = b$ par stricte monotonie ce qui contredit l'hypothèse initiale.

f' ne peut donc être identiquement nulle sur aucun sous-intervalle non vide $[a ; b]$ de I.

- Réciproquement, supposons que f' est positive ou nulle sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle $[a ; b]$ avec $a < b$.

D'après 1, f est croissante sur I. Montrons qu'elle l'est strictement.

Soient $x,\ y \in \mathrm{I}$ avec $x < y$. Comme f est croissante, on a $f(x) \leqslant f(y)$.
Si $f(x) = f(y)$ alors, f étant toujours croissante, elle est nécessairement constante sur $[x\,;y]$ et f' y serait alors identiquement nulle ce qui contredit l'hypothèse initiale.

On a donc $f(x) < f(y)$ et la stricte croissance de f sur I.

ATTENTION

On peut avoir $f'(a) > 0$ en un point a sans que f soit strictement croissante au voisinage de a.

C'est le cas de $f : x \longmapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{x}{2}$.

— On peut prolonger continument f par 0 en 0
— Bien sûr, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et en revenant au taux d'accroissement de f, on montre aisément que $f'(0) = \dfrac{1}{2} > 0$.
— Pourtant $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{2}$.

pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, f' change donc de signe régulièrement au voisinage de 0, donc f change de sens de variation régulièrement au voisinage de 0. [7]

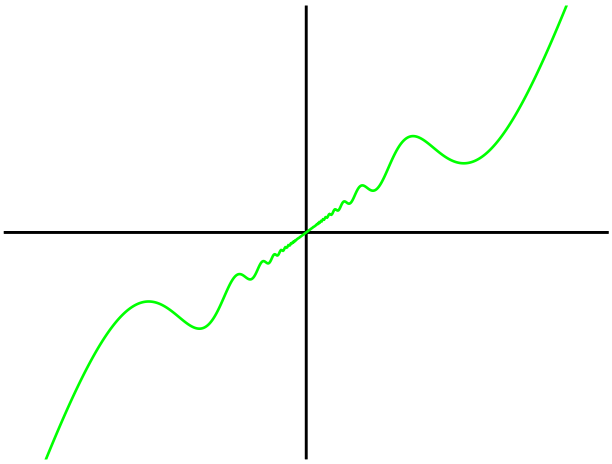


Figure XVI.13 – Une fonction dérivable peut avoir une dérivée strictement positive en un point sans être monotone sur un voisinage de celui-ci.

[7]. Brièvement la preuve:le terme $x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est petit au voisinage de 0 et négligeable devant le terme $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ qui prend une infinité de fois les valeurs 1 et -1. f' prend donc une infinité de fois au voisinage de 0 des valeurs proches de $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$ et change de signe autant de fois sur ces voisinages non réduits à un point. f en fait donc autant avec sa monotonie.

IV.2 Prolongement de classe $\mathscr{C}^1$

Rien ne permet a priori d'affirmer que les limites $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ sont égales.

Conceptuellement, ces limites sont très différentes. Le théorème ci-dessous donne une réponse affirmative dans le cas où ces limites existent et que la fonction est continue en a.

Théorème 15 (Théorème de la limite de la dérivée) : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$.

$$\text{Si } \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{alors} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell.$$

1. Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a avec $f'(a) = \ell$ *i.e.* f est dérivable sur I tout entier et f' est continue en a.
2. Si $\ell = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a mais sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse a.

Exemple 12 : La fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exemple 13 : arcsin est dérivable sur $]-1\,;1[$ et $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dont la limite en $x = \pm 1$ est $+\infty$.

On retrouve ainsi que arcsin n'est pas dérivable en ± 1 et qu'il y a une tangente verticale en ces point pour la courbe.

ATTENTION Si f' n'a pas de limite en a alors on ne peut rien dire.

Preuve : Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et a qui n'est pas une borne de I.

On suppose que f est continue sur I et dérivable sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$ ce qui permettra d'appliquer le théorème (10).

Comme $f'(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall\, \mathrm{X} \in \mathrm{I} \setminus \{a\}, \quad |\mathrm{X} - a| \leqslant \eta \implies |f'(\mathrm{X}) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

- Soit $x \in\,]a\,; a+\eta] \cap \mathrm{I}$.
  On applique le théorème (10) à f sur $[a\,; x]$: il existe $c_x \in\,]a\,; a+\eta[$ tel que :
  $$f'(c_x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$
  Comme $c_x \in\,]a\,; a+\eta[\implies |c_x - a| \leqslant \eta$ on a aussi $|f'(c_x) - \ell| = \left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.
- De même, à gauche avec $x \in\,]a-\eta\,; a] \cap \mathrm{I}$.

On applique encore le théorème (10) à f sur $[x\,;a]$: il existe $c'_x \in]a-\eta\,;a[$ tel que :

$$f'(c'_x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

D'où, $|f'(c'_x) - \ell| = \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$

Finalement, $\forall\, x \in \mathrm{I} \setminus \{a\},\ |x-a| \leqslant \eta \implies \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$

Remarque : L'avantage de cette preuve est qu'elle s'adapte au cas où a est une borne de I. Dans le cas contraire, si a est intérieur à I, il est inutile de regarder la dérivabilité à droite et à gauche séparément : $x \in]a-\eta\,;a+\eta] \cap \mathrm{I}$ suffit à la preuve.

Dans tous les cas, on a donc, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$ i.e. la fonction f est bien dérivable en ℓ et $f'(a) = \ell$.

Remarques :

— La continuité en a est une hypothèse nécessaire.

Exemple 14 : La fonction $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$ est dérivable et continue sur $\mathbb{R}^*$.

On a, de plus, $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ mais f n'est pas dérivable en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{x}$ n'existe pas.

— Le théorème de la limite de la dérivée exprime simplement les conditions d'existence d'un prolongement par continuité de la dérivée en a. *confer* le corollaire (15.1) .

— Si a est une extrémité de I, la limite du taux d'accroissement et la dérivabilité éventuelle sont obtenues à droite ou à gauche en a comme dans la preuve.

— Ce résultat est intéressant pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point où les théorèmes généraux ne s'appliquent pas sans revenir au taux d'accroissement. Par exemple, lorsque l'on prolonge une fonction par continuité et que l'on veut déterminer si le prolongement effectué est dérivable ou non, de classe $\mathscr{C}^1$ ou non.

Il évite de revenir au calcul du taux d'accroissement (qui est toutefois rarement plus complexe).

Exemple 15 : Considérons la fonction $f : x \longmapsto x^2 \ln(x)$.

Cette fonction est définie et $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et peut se prolonger par continuité en posant $f(0) = 0$.

Par ailleurs, $\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\ f'(x) = 2x\ln(x) + x$ a certainement aussi une limite nulle en 0.

Le théorème de prolongement de la dérivée permet alors d'affirmer que la fonction prolongée est dérivable en 0, et que $f'(0) = 0$: de classe $\mathscr{C}^1$ donc.

Cette information est essentielle pour tracer une allure précise de la courbe au voisinage de 0.

— Le résultat reste vrai pour $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{C})$ dérivable sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$ et f' ayant une limite (finie) $\ell \in \mathbb{C}$ mais est hors-programme.

Exercice 12 : On définit $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ par $g(0) = 0$ et, $\forall\, x \neq 0,\ g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner l'expression de g'.
2. La fonction g' a-t-elle une limite en 0 ?
3. Quelle est la classe de g ?

Corollaire 15.1 (Prolongement de classe $\mathscr{C}^1$) : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ continue sur I et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$.

$$\text{Si } \lim_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R} \text{ alors } f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur I et } f'(a) = \ell.$$

Ce théorème peut se généraliser à $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{I} \setminus \{a\}$ si les dérivées $f^{(j)}$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ ont toutes une limite finie en a.

V Fonctions à valeurs complexes

ATTENTION

Comme on l'a vu, beaucoup de propriétés vraies pour les fonctions à valeurs réelles ne le sont plus pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ notamment :

- L'image d'un intervalle par une fonction continue n'est pas un intervalle.
- Le théorème des valeurs intermédiaires n'est plus vrai.
- Le théorème de Rolle n'est plus vrai.
- Le théorème des accroissements finis non plus.

Bien triste constat mais cela provient d'une non homogénéité entre la source et le but.

Alors que reste-t-il ?

Théorème 16 (Inégalité des accroissements finis) : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{C}$ continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$.

S'il existe un réel positif M tel que $\forall\, x \in \,]a\,;b[,\quad |f'(x)| \leqslant \mathrm{M}$ alors

$$\Big|f(b) - f(a)\Big| \leqslant \mathrm{M}|b-a|.$$

Preuve : On va se ramener au cas réel : Notons θ un argument de $f(b) - f(a)$, de sorte que $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}(f(b) - f(a)) = |f(b) - f(a)|$.

On pose $g : \begin{array}{ccc} [a\,;b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} f(x)\right) \end{array}$, continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$ en tant que partie réelle d'une fonction qui l'est et pour $x \in \,]a\,;b[$,

$$|g'(x)| = \left|\mathrm{Re}\left((\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} f'(x)\right)\right| \leqslant \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} f'(x)\right| = |f'(x)| \leqslant \mathrm{M}.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis réelle, g est M-lipschitzienne sur $[a\,;b]$.

Ainsi $|g(b) - g(a)| \leqslant \mathrm{M}|b-a|$.

Or, $|g(b)-g(a)| = \left|\mathrm{Re}\left(\underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}(f(b)-f(a))}_{\in\mathbb{R}}\right)\right| = \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}(f(b)-f(a))\right|.$

$$= \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\right| \left|f(b)-f(a)\right| = \left|f(b)-f(a)\right|$$

Ainsi, on a bien $\left|f(b)-f(a)\right| \leqslant \mathrm{M}|b-a|$.

Exemple 16 : La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$ est 1-lipschitzienne.
En particulier, pour tout $a,\ b\in\mathbb{R}$, $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,b}| \leqslant |a-b|$.

La notion de fonctions monotones pour des fonctions à valeurs complexes n'a aucun sens mais on peut, cependant, caractériser les fonctions constantes :

Théorème 17 (Caractérisation des fonctions constantes dérivables) : Soient I un **intervalle** et $f\in\mathscr{D}(\mathrm{I}\,;\mathbb{C})$.

f est constante sur I si, et seulement si f' est identiquement nulle sur $\mathring{\mathrm{I}}$.

Preuve : Si f est constante, son taux d'accroissement en tout point de I est nul, et donc f' est nulle sur I.
Réciproquement, si f a une dérivée nulle sur I, alors f est 0-lipschitzienne sur I de sorte que $f(x)=f(y)$ pour tout $x,\ y\in\mathrm{I}$ i.e. f est constante sur I.

Pour résumer ce qui est vrai ou non pour une fonction à valeurs complexes :

À retenir 1 :

Ce qu'on garde	**Ce qu'on ne garde pas**
Une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$ est bornée au sens que $\lvert f\rvert$ l'est	Le théorème des valeurs intermédiaires
Dérivabilité $\Longrightarrow$ Continuité	Théorème de dérivabilité de la fonction réciproque
Opérations sur les dérivées	Théorème de Rolle
Inégalité des accroissements finis	Théorème des accroissements finis
Dérivée bornée $\Longrightarrow$ f lipschitzienne	Annulation aux extrema locaux
Dérivée nulle sur un intervalle I $\Longrightarrow$ f constante sur I	Lien monotonie et signe de la dérivée
	Théorème de prolongement de la dérivée et prolongement $\mathscr{C}^1$

Exercice 13 : Étudier la dérivabilité et donner la fonction dérivée des fonctions à valeurs complexes $\varphi : t \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}}$ et $\psi : t \longmapsto \mathrm{e}^{\arccos(t)+\mathrm{i}\,\arcsin(t)}$.

Index