Continuité et Dérivabilité

1 Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 1 (Théorème des valeurs intermédiaires) :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Plus précisément, soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$ et $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,;\mathbb{R})$.

Tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède un antécédent par f dans $[a\,;b]$.

2 Énoncer le théorème des bornes atteintes.

Théorème 2 (Théorème des bornes atteintes) : Toute fonction continue sur un SEGMENT y est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists\, c, d \in [a\,;b] \quad \text{tels que} \quad f(c) = \min_{x\in[a;b]} f(x) \quad \text{et} \quad f(d) = \max_{x\in[a;b]} f(x).$$

3 Énoncer la proposition faisant le lien entre dérivabilité et développement limité.

Proposition 3 (Développement limité d'ordre 1) : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

f est dérivable en a si, et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) = f(a) + (x-a)\,\ell + (x-a)\varepsilon(x) \quad \text{avec} \ \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0. \tag{XV.1}$$

De plus, si ℓ existe alors $f'(a) = \ell$:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x). \tag{XV.2}$$

4 Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

Montrer que le produit de deux fonctions dérivables en a est une fonction dérivable en a et donner son nombre dérivé.

Soient $f, g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ dérivables en $a \in \mathrm{I}$ et soit $x \in \mathrm{I} \setminus \{a\}$.

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} &= \frac{[f(x)g(x) - f(a)g(x)] + [f(a)g(x) - f(a)g(a)]}{x-a} \\ &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\, g(x) + f(a)\,\frac{g(x)-g(a)}{x-a}.\end{aligned}$$

Or,

– g étant dérivable en a, elle y est continue i.e. $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$.

De plus, $\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$.

– f étant dérivable en a, on a, de même, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.

En conclusion,

$$\lim_{x \to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

La fonction $f \times g$ est donc dérivable en a et $(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

5 Étudier les limites suivantes :

(a) $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$ en 1.

$\forall\, x \neq 1$, $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2} = -\dfrac{1}{1+x} \xrightarrow[x \to 1]{} -\dfrac{1}{2}$.

(b) $\sqrt{x^2 + 2x} - x$ en $+\infty$.

$\forall\, x > 0$, $\sqrt{x^2 + 2x} - x = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \dfrac{2}{\sqrt{1 + \dfrac{2}{x}} + 1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \dfrac{2}{2} = 1$.

(c) $\dfrac{x + \cos(x)}{x + \sin(x)}$ en $+\infty$.

Avec le théorème d'encadrement $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$.

D'où, $\forall\, x > 1$, $\dfrac{x + \cos(x)}{x + \sin(x)} = \dfrac{1 + \dfrac{\cos(x)}{x}}{1 + \dfrac{\sin(x)}{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$.

6 Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin(x) \ln|x|$.

Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

Comme $x \longmapsto |x|$ est à valeurs dans $\mathbb{R}+$, d'après les théorèmes généraux sur les produits et composées de fonctions continues, f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, $\forall\, x \neq 0$, $\sin(x) \ln|x| = \dfrac{\sin(x)}{x} \times x \ln|x|$.

En reconnaissant deux limites finies de croissances comparées en 0, on en déduit :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

La fonction f est donc prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier en posant $f(0) = 0$.

7 Donner la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x(1-x)}\right)$.

Par définition de $\sqrt{\cdot}$, la fonction f ne peut être définie que sur $[0\,;1]$. Sur cet intervalle $x + \sqrt{x(1-x)} \geqslant 0$ s'annulant pour $x = 0$.

D'après les théorèmes généraux on en déduit, successivement, pour tout $x \in \,]0\,;1[$:

– $x \longmapsto x(1-x)$ est dérivable à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
– $x \longmapsto x + \sqrt{x(1-x)}$ est dérivable à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
– $x \longmapsto f(x)$ est dérivable et on a :

$$f'(x) = \frac{1 + \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}}{x + \sqrt{x(1-x)}}$$

8 Soit $\varphi : x \longmapsto x + \mathrm{e}^x$.

(a) Montrer que φ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble J à déterminer.
(b) Justifier que φ^{-1} est dérivable sur J.
(c) Déterminer $\left(\varphi^{-1}\right)'(1)$.

(a) D'après les théorèmes sur les sommes de fonctions continues, il est clair que φ est continue sur l'intervalle ouvert $\mathbb{R}$. Somme de fonctions strictement monotones sur $\mathbb{R}$, elle l'est également sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de la bijection, φ établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son intervalle image qui est de même nature $f(\mathbb{R}) = \left] \lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) \,;\, \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) \right[= \mathbb{R}$.

(b) D'après la question précédente φ est donc une bijection entre les deux intervalles $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{J} = \mathbb{R}$. Elle y est clairement dérivable et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \varphi'(x) = 1 + \mathrm{e}^x > 0.$$

Sa fonction réciproque est donc dérivable sur J et on a :

$$\forall\, y \in \mathrm{J},\ \left(\varphi^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{\varphi^{-1}(y)}}.$$

(c) Comme $\varphi(0) = 1$, on obtient $\left(\varphi^{-1}\right)'(1) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^0} = \dfrac{1}{2}$.