XVII

Systèmes linéaires

Contenu

I Systèmes linéaires et matrices

I.1 Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition I (Système linéaire) : On appelle système linéaire à m équations et n inconnues x_1, x_2, ...x_n tout système $(\mathcal{S})$ de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right. \qquad (\mathcal{S})$$

En posant $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{K})$, le système $(\mathcal{S})$ s'écrit alors sous la forme matricielle :

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B}. \qquad (\mathcal{S})$$

Remarques et Vocabulaire :

— La matrice A s'appelle la matrice du système et on considère parfois sa matrice, dite *augmentée*,

$$\tilde{\mathrm{A}} = \left(\mathrm{A}|\mathrm{B}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{2,m} & b_m \end{array}\right).$$

— On identifie $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *i.e.* on confond usuellement le vecteur ligne d'inconnue $\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \in \mathbb{K}^n$ avec la colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exemples I :

- Le système 2×2, $\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & - & 3y & = & 5 \\ 5x & - & 4y & = & 1 \end{array}\right.$ s'écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- De même, le système 2×3 :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & 5y & & & = & 1 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Et le système 3×2 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 5 \\ 3x & - & 4y & = & 1 \\ -5x & + & 6y & = & 1 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

+

Définition 2 : On conserve les notations de la définition (1) .

- On dit que le système $(\mathcal{S})$ est *homogène* si $\mathrm{B} = (0)_{\mathbb{K}^m}$ et on note $(\mathcal{S}_0)$ le système homogène associé à $(\mathcal{S})$ obtenu en remplaçant B par $(0)_{\mathbb{K}^m}$.
- *Résoudre* le système $(\mathcal{S})$ c'est trouver l'ensemble des vecteurs $\mathrm{X} \in \mathbb{K}^n$ vérifiant $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$. Le système est alors dit *compatible* dans ce cas, *incompatible* sinon.
- Deux systèmes sont dits *équivalents* lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.

Remarques :

- Tout système homogène admet, au moins, le vecteur nul comme solution.
- $\varnothing$ est un ensemble solution tout à fait acceptable.

Exemples 2 :

- Les systèmes $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & & & = & 1 \\ -3x & + & 6y & + & z & = & -2 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+2\lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & 1 \end{array}\right.$ sont équivalents.
- $(1\,;0\,;1)$, $(-1\,;-1\,;1)$ et, plus généralement $(1+2t\,;t\,;1)$ pour $t \in \mathbb{R}$ sont solution des systèmes précédents qui admettent donc une infinité de triplets solutions.
- $\left\{\begin{array}{rcr} 3x-5y & = & 1 \\ -6x+10y & = & -2 \end{array}\right.$ admet tout couple de réels $(x\,;y)$ comme solution.
- $\left\{\begin{array}{rcr} 3x-5y & = & 1 \\ -6x+10y & = & 1 \end{array}\right.$ est incompatible.
- $\left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 3 \\ & y & & = & 1 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right.$ admet $(3\,;1\,;0)$ comme unique solution. La matrice associée à ce système est l'identité.

I.2 Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Soient $n \in \mathbb{N}$, i, $j \in [\![1\,;n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note :

- $$\mathrm{L}_{i,j,n} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 &&&& 1 &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& \ddots &&&&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& 1 &&&& 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \quad & \uparrow \\ i & \quad & j \end{matrix} & \end{array}$$
- $$\mathrm{H}_{i,n}(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \lambda &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow \\ i \end{matrix} & \end{array}$$

- $$\mathrm{T}_{i,j,n}(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \ddots &&& \\ && \lambda && 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} \quad & \quad & \uparrow j & \quad & \quad & \quad & \quad \end{array} & \end{array}$$

Proposition 1 (Effet d'une matrice d'opérations élémentaires sur les lignes) : Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Multiplier A par $\mathrm{L}_{i,j,n}$ à gauche revient à permuter les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes de A.

  On note $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$ cette opération.
- Multiplier A par $\mathrm{H}_{i,n}(\lambda)$ à gauche revient à multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par λ.

  On note $\mathrm{L}_i \leftarrow \lambda \mathrm{L}_i$ cette opération.
- Multiplier A par $\mathrm{T}_{i,j,n}(\lambda)$ à gauche revient à additionner la $j^{\text{ème}}$ ligne de A multipliée par λ à la $i^{\text{ème}}$ (avec $i \neq j$).

  On note $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \lambda \mathrm{L}_j$ cette opération.

Vocabulaire :

— Les matrices $\mathrm{L}_{i,j,n}$ s'appellent des *matrices de permutation*.
— Les matrices $\mathrm{H}_{i,n}$ s'appellent des *matrices de dilatation*.
— Les matrices $\mathrm{T}_{i,j,n}$ s'appellent des *matrices de transvection*.

Proposition 2 (Effet d'une matrice d'opérations élémentaires sur les colonnes) : Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Multiplier A par $\mathrm{L}_{i,j,p}$ à droite revient à permuter les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ colonnes de A.

  On note $\mathrm{C}_i \leftrightarrow \mathrm{C}_j$ cette opération.
- Multiplier A par $\mathrm{H}_{i,p}(\lambda)$ à droite revient à multiplier la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par λ.

  On note $\mathrm{C}_i \leftarrow \lambda \mathrm{C}_i$ cette opération.
- Multiplier A par $\mathrm{T}_{i,j,p}(\lambda)$ à droite revient à additionner la $j^{\text{ème}}$ colonne de A multipliée par λ à la $i^{\text{ème}}$ (avec $i \neq j$).

  On note $\mathrm{C}_i \leftarrow \mathrm{C}_i + \lambda \mathrm{C}_j$ cette opération.

Définition 3 (Opérations élémentaires sur les lignes) : On appelle *opérations élémentaires* sur les lignes d'un système, les opérations ci-dessous :

Permutation : $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$, permuter les lignes i et j

Dilatation $(\lambda \neq 0)$: $\mathrm{L}_i \leftarrow \lambda \mathrm{L}_i$, multiplier la ligne i par λ.

Transvection : $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \lambda \mathrm{L}_j$ et, par extension, $\mathrm{L}_i \leftarrow \mu \mathrm{L}_i + \lambda \mathrm{L}_j$, remplacer la ligne i par une combinaison linéaire des lignes i et j.

Effectuer de telles opérations sur un système revient donc à multiplier la matrice augmentée du système à gauche par les matrices d'opérations élémentaires correspondantes.

Théorème 3 :

1. Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrices sont bijectives.
2. Deux systèmes linéaires qui se déduisent l'un de l'autre par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les **lignes** sont équivalents.

   On note généralement :

$$(\mathcal{S}) \sim_{\mathrm{L}} (\mathcal{S}), \qquad \tilde{\mathrm{A}} \sim_{\mathrm{L}} \tilde{\mathrm{A}}' \quad \text{ou} \quad \mathrm{A} \sim_{\mathrm{L}} \mathrm{A}'.$$

Remarque : L'équivalence par ligne est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

D'un point de vue matriciel,

Corollaire 3.1 : Les matrices de permutation et de transvection ainsi que celles de dilatation pour $\lambda \neq 0$ sont inversibles.

Méthode 1 (Travailler sur la matrice du système) :

- *Il revient au même de travailler par opérations élémentaires sur le système ou sur sa matrice augmentée. On notera* $\tilde{\mathrm{M}} \sim_{\mathrm{O}} \tilde{\mathrm{M}}'$ *pour préciser l'opération* O *effectuée sur les lignes.*
- *Travailler sur la matrice permet d'avoir des notations plus concises tout en conservant toutes les informations nécessaires à la résolution.*
- *Dans le cas des systèmes homogènes, il suffit de travailler sur la matrice* A *au lieu de la matrice augmentée* $\tilde{\mathrm{A}} = (\mathrm{A} \mid 0)$ *car les opérations élémentaires laissent la colonne du second membre invariante à* 0.

Exemple 3 : Résolution d'un système linéaire à l'aide d'opérations élémentaires sur ses lignes.

$$(\mathcal{S}_3) : \left\{\begin{array}{rcl} x+3y-z &=& -6 \\ 2x+5y+z &=& 4 \\ 3x \quad\quad +2z &=& 16 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x+3y-z &=& -6 & \\ -y+3z &=& 16 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ -9y+5z &=& 34 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 3\mathrm{L}_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} x+3y-z &=& -6 & \\ -y+3z &=& 16 & \\ -22z &=& -110 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 9\mathrm{L}_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} x+3y-z &=& -6 & \\ -y+3z &=& 16 & \\ z &=& 5 & \mathrm{L}_3 \leftarrow -\dfrac{1}{22}\mathrm{L}_3 \end{array}\right.$$

On dit qu'on a *échelonné* le système (disposition en escalier). Ce dernier système est très facile à résoudre, et le théorème (3) permet d'affirmer qu'il a le même ensemble de solutions que $(\mathcal{S}_3)$.

Exemple 4 : On peut choisir de travailler en matrice augmentée.

Pour le système de l' exemple (3) , on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 16 \end{array}\right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 16 \\ 0 & -9 & 5 & 34 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 - 3L_1 \end{array}$$

$$\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & -22 & -110 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2$$

$$\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow -\frac{1}{22}L_3$$

On dit que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est *échelonnée par lignes.*

I.3 Systèmes échelonnés

L'idée : Si la matrice du système est diagonale *i.e.* si le système linéaire associé s'écrit :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} \alpha_1 x_1 & & & & = b_1 \\ & \alpha_2 x_2 & & & = b_2 \\ & & \ddots & & = \vdots \\ & & & \alpha_n x_n & = b_n \end{cases}$$

i.e. si le système est dit *échelonné réduit*, il est facile de le résoudre.

Proposition 4 : Un système diagonal $(\alpha_i x_i = b_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est compatible si, et seulement si :

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \alpha_i = 0 \implies b_i = 0.$$

Sous ces conditions, il se résout en divisant par α_i le cas échéant.

Définition 4 (Système triangulaire supérieur) : Un système $(\mathscr{S})$ est dit *triangulaire* supérieur si sa matrice $A \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure :

$$\forall\, ij \in [\![1\,;n]\!]\,,\quad i > j \implies a_{ij} = 0.$$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & \ddots & & & \vdots & = & \vdots \\ & & & & a_{n-1,n-1}x_{n-1} & + & a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\ & & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Méthode 2 (Résoudre un système triangulaire par remontée) :
Pour résoudre de tels systèmes, on procède par « remontée » :

1. L_n est de la forme $a_{n,n}x_n = b_n$ et permet d'exprimer x_n si $a_{n,n} \neq 0$. On peut alors éliminer l'inconnue x_n des lignes 1 à $n-1$ par soustraction.

2. La nouvelle ligne $n-1$ est de la forme $\mathrm{L}_{n-1} : a_{n-1,n-1}x_{n-1} = b'_{n-1}$ permet d'exprimer x_{n-1} en fonction de b'_{n-1} si $a_{n-1,n-1} \neq 0$ et d'éliminer x_{n-1} des lignes 1 à $n-2$.
...
3. On traite ainsi successivement les lignes par ordre décroissant.
4. Si un coefficient diagonal $a_{i,i}$ est nul, il faut examiner la compatibilité de la i-ème ligne qui doit être une équation de la forme $0 = 0$, sinon le système n'a pas de solution.
5. On finit par traiter une 1ère ligne de la forme $\tilde{\mathrm{L}}_1 : a_{1,1}x_1 = \tilde{b}_1$.

Exemple 5 : Reprenons le système de l' exemple (3) :

$$(\mathcal{S}_3) : \left\{\begin{array}{rcr} x+3y-z &=& -6 \\ -y+3z &=& 16 \\ z &=& 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lllcr} x & +3y & & = & -1 \\ & -y & & = & 1 \\ & & z & = & 5 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 3\mathrm{L}_3 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lllcr} x & & & = & 2 \\ & -y & & = & 1 \\ & & z & = & 5 \end{array}\right. \quad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + 3\mathrm{L}_2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} x &=& 2 \\ y &=& -1 \\ z &=& 5. \end{array}\right. \quad \text{et} \quad (\mathcal{S}_3) = \{\,(2\,;-1\,;5)\,\}.$$

Exemple 6 : À partir de la matrice augmentée de l' exemple (4) , on obtient également :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim_{\mathrm{L}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 3\mathrm{L}_3 \end{array}$$

$$\sim_{\mathrm{L}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + 3\mathrm{L}_2$$

$$\sim_{\mathrm{L}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad \mathrm{L}_2 \leftarrow -\mathrm{L}_2$$

Cette matrice correspond au système diagonal $\left\{\begin{array}{lllcr} x & & & = & 2 \\ & y & & = & -1 \\ & & z & = & 5 \end{array}\right.$ dont l'ensemble des solutions est transparent !

On dit que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est *échelonnée réduite par lignes.*

Exercice 1 : Résoudre les systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{r} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_2 - 6x_3 = 4 \\ 3x_3 = 6 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{r} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_3 = 4 \\ -3x_3 = 6 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{r} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_3 = 5 \\ -3x_3 = 6 \end{array}\right.$

Définition 5 (Pivot, système échelonné) :

- Dans un système linéaire ou une matrice, on appelle *pivot* d'une ligne non nulle le premier de ses coefficients non nuls.
- On dit que $(\mathcal{S})$ est *échelonné par lignes* lorsque :
  1. Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi.
  2. À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le pivot a un indice de colonne strictement à supérieur à celui de la ligne précédente.
- Dans un système échelonné, on dit qu'une inconnue est
  - *principale* si son coefficient est un pivot sur une des lignes du système ;
  - *secondaire* sinon.

Exemples 7 (Systèmes échelonnés) :

1. $$\left\{\begin{array}{rrrrcl} 1x & 2y & -z & +2t & = & 4 \\ & -1y & +2z & & = & 3 \\ & & & 5t & = & 1 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{rcl} 5x+y+2t-u & = & -2 \\ 2u & = & 3 \end{array}\right.$$

3. $$\left\{ 1x+y+2z-1t = 2 \right.$$

4. $$\left\{\begin{array}{rrrrrcl} 5x & +y & & +2t & -u & = & -2 \\ & 1y & +z & -t & 3u & = & 3 \\ & & 3z & -2t & +5u & = & 6 \\ & & & & -1u & = & 1 \end{array}\right.$$

5. $$\left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x & & & & = & 1 \\ & -3y & & & = & 3 \\ & & 1z & & = & 6 \\ & & & -6u & = & 12 \end{array}\right.$$

Ce système est dit échelonné *réduit.*

Exemples 8 (Systèmes non échelonnés) :

1. $$\left\{\begin{array}{rrrrcl} x & 2y & -z & +2t & = & 4 \\ x & -y & & 2t & = & 3 \\ & & & 5t & = & 1 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{rcl} 5x+y+2t-u & = & -2 \\ -4y+t-2u & = & 3 \\ 5y+2t+u & = & 0 \end{array}\right.$$

3. $$\left\{\begin{array}{rrrrrcl} 5x & +y & & +2t & -u & = & -2 \\ & y & +z & -t & +3u & = & 3 \\ & & 3z & -2t & +5u & = & 6 \\ & & z & +t & & = & -1 \\ & & & -t & & = & 1 \end{array}\right.$$

II Résolution pratique

II.1 Algorithme de Gauss

L'objectif de l'*algorithme de Gauss* est donc de transformer tout système linéaire en un système échelonné **équivalent** par des opérations élémentaires décrites au paragraphe (I.2) .

Considérons un système quelconque où chaque point $\bullet$ représente un coefficient du système, éventuellement 0.

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

Nous allons faire disparaître progressivement ces coefficients en les annulant et obtenir finalement la forme *échelonnée* du système étudié.

Étape 1 : On choisit dans le système un coefficient non nul $\checkmark$ appelé *pivot*. Bien sûr, si tous les coefficients sont nuls, le système est résolu ! S'il n'y est pas déjà, on peut toujours placer ce pivot en position $(1, 1)$ en permutant deux équations et/ou deux inconnues. Le système initial :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \quad \text{devient} \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

après une éventuelle opération $L_i \leftrightarrow L_j$ et un éventuel échange d'inconnues.

ATTENTION Permuter les inconnues n'est pas une opération élémentaire sur les colonnes, mais simplement une réindexation.

Remarque : Dans la mesure du possible, privilégiez un coefficient de pivot de valeur 1, vos calculs ultérieurs s'en trouveront simplifiés. Afin d'éviter les quotients, réservez l'opération $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\lambda_i} L_i$ à la fin de l'algorithme.

Étape 2 : Grâce au pivot, on annule par des opérations $L_i \leftarrow L_i - \lambda_i L_1$ ou $L_i \leftarrow \lambda_1 L_i - \lambda_i L_1$ tous les coefficients de la première colonne sous le pivot.

Le système devient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

Remarque : Évitez les divisions et si une ligne nulle apparaît à cette étape, on la supprime sans ménagement.

Reprise des étapes 1 et 2 : On reprend les étapes 1 et 2 avec le sous-système obtenu par oubli de la ligne 1.

Le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \checkmark & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \text{devient} \left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \text{puis} \left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

Et on recommence : On poursuit l'algorithme jusqu'à la $m^{\text{ème}}$ ligne ou jusqu'à n'avoir que des lignes nulles.

Le résultat final est appelé une forme échelonnée du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

Remontée : On annule à présent tous les coefficients situés au-dessus des symboles $\checkmark$.

La méthode est la même que précédemment, on utilise les pivots et des opérations $L_i \leftarrow \lambda_j L_i + \lambda_i L_j$.

Le système échelonné devient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \text{ puis } \left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

Et c'est fini ! Sur l'exemple choisi, on peut exprimer les inconnues *principales* 1, 2 et 3 en fonction des inconnues *secondaires* 4 et 5, ce qui achève la résolution du système.

Exemple 9 :

$$(\mathcal{S}_9) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 3z & + & t & = & 3 \\ x & - & 2y & + & 3z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ & & y & + & z & - & t & = & -1 \\ & - & y & + & 2z & - & 2t & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 + \frac{1}{3}L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ & & y & + & z & - & t & = & -1 \\ & & & & z & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & & & + & 2t & = & 3 \\ & & y & & & & & = & 0 \\ & & & & z & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & & & + & 2t & = & 3 \\ & & y & & & & & = & 0 \\ & & & & z & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 3 & - & 2t \\ y & = & 0 & & \\ z & = & -1 & + & t \\ t & = & & & t \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Pour bien faire apparaître le rôle des inconnues secondaires en tant que paramètre, on notera plutôt les solutions sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda.\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{K}.$$

D'un point de vue matriciel, $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$.

Méthode 3 (Résoudre un système échelonné) :

Pour résoudre un système échelonné :

1. *Par remontée, on élimine avec des opérations élémentaires les inconnues principales dans les lignes où elles ne sont pas en position de pivot.*

2. S'il y a des inconnues secondaires, on les considère comme des paramètres prenant librement toute valeur possible dans $\mathbb{K}$: on exprime les inconnues principales en fonction des ces paramètres.
3. On rajoute finalement des lignes $x_i = 0 + \cdots + 1 \cdot x_i + \cdots + 0$ pour les inconnues secondaires.

L'ensemble de solutions peut alors s'écrire sous la forme de solutions paramétriques :

$$(\mathcal{S}) = \left\{ \mathrm{X}_p + t_1 \mathrm{X}_1 + t_2 \mathrm{X}_2 + \cdots + t_j \mathrm{X}_j \mid t_1, \dots, t_j \in \mathbb{K} \right\},$$

où $\mathrm{X}_p \in \mathbb{K}^n$ est une solution particulière de $(\mathcal{S})$, $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_j$ sont les inconnues secondaires.

Remarque : Tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ de la forme $t_1\mathrm{X}_1 + t_2\mathrm{X}_2 + \cdots + t_j\mathrm{X}_j$ où $t_1, \dots, t_j \in \mathbb{K}$ est solution du système $(\mathrm{A} \mid 0)$ linéaire homogène associé.

Exemple 10 :

$$(\mathcal{S}_{10}) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{\mathrm{L}_2 \leftarrow \frac{1}{2}\mathrm{L}_1 - \frac{1}{2}\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_4}}{\iff} \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\underset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 2\mathrm{L}_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & + & z & + & t & = & 3 \\ & y & & & + & t & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & 3 & - & z & - & t \\ y & = & -1 & & & - & t \\ z & = & & & z & & \\ t & = & & & & & t \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda . \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu . \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ (\lambda ; \mu) \in \mathbb{K}^2.$$

D'un point de vue matriciel, $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim_{\mathrm{L}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$.

Exercice 2 : Déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 2 \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Méthode 4 (Solutions d'un système linéaire échelonné) :

1. Un système linéaire échelonné est compatible si, et seulement si il ne comporte pas de pivot sur la colonne des seconds membres i.e. un coefficient non nul à droite dans la matrice augmentée du système.

   Le fait de ne pas avoir de pivot sur la colonne du second membre donne lieu à des conditions de compatibilité. (cf. exemple (11))

2. Pour un système échelonné compatible, on a l'alternative suivante :

   a. Soit il n'a que des inconnues principales et alors il admet une unique solution.

   b. Soit on peut paramétrer l'ensemble des solutions à l'aide des inconnues secondaires et dans ce cas, il possède une infinité de solutions.

Exemples 11 : Soit $a \in \mathbb{K}$.

- $(\mathcal{S}) : \begin{cases} x+y+z &= 4 \\ y-z &= 2 \\ z &= a^2+a-2 \end{cases}$ dont la matrice augmentée est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a^2+a-2 \end{array}\right)$ est compatible.
- $(\mathcal{S}') : \begin{cases} x+y+z &= 4 \\ y-z &= 2 \\ 0z &= a^2+a-2 \end{cases}$ dont la matrice augmentée est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+a-2 \end{array}\right)$ est compatible si, et seulement si $a \in \{-2; 1\}$.

II.2 Point de vue matriciel

On obtient déjà un résultat d'importance :

Théorème 5 :

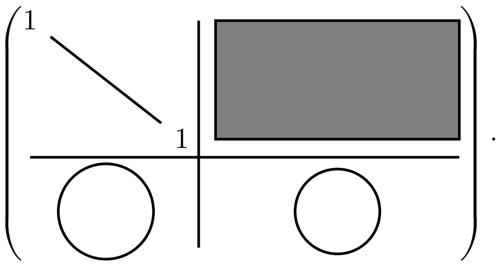
Tout système linéaire est équivalent à un système échelonné réduit.

i.e.

Pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, il existe une matrice E, produit de matrices de transformations élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite en lignes R telle que :

$$\mathrm{A} = \mathrm{ER}.$$

Toute matrice A est donc équivalente (par lignes) à une matrice de la forme :



Pour plus de commodités et par abus de langage, on étend le vocabulaire des systèmes à la matrice associée :

Définition 6 :

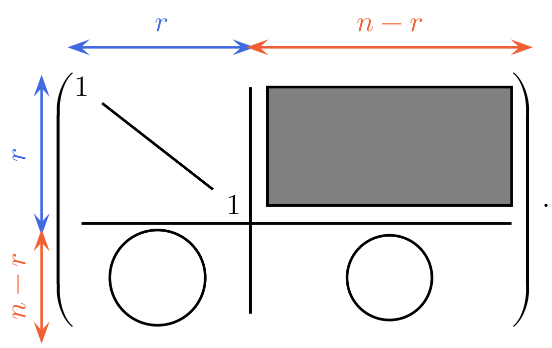
- Une matrice est dite *échelonnée* en lignes si le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne augmente strictement ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste éventuellement plus que des zéros.
- Le premier coefficient non nul de chaque ligne est appelé *pivot*.
- Une matrice échelonnée est dite matrice *échelonnée réduite*, ou matrice canonique en lignes, si les pivots valent 1 et si les autres coefficients dans les colonnes des pivots sont nuls.

Définition 7 (Rang d'une matrice) : Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle *rang* d'une matrice, le nombre de lignes (*resp.* colonnes) non nulles dans sa forme échelonnées en lignes (*resp.* en colonnes).

Remarques :

— Le rang n'étant pas changé par le produit de matrices d'opérations élémentaires, lorsqu'il ne s'agit que de trouver le rang d'une matrice et non son inverse, on peut effectuer des opérations sur les lignes et sur les colonnes en même temps.

— L'algorithme de la méthode (5) en « remontant », on montre ainsi que toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut être transformée en une matrice échelonnée réduite où le rang r est clairement lisible :



II.3 Opérations élémentaires et matrices inversibles

L'inversibilité d'une matrice est un travail ardu lorsque la dimension augmente. Les opérations élémentaires vont grandement nous simplifier la tâche à travers l'algorithme de Gauss-Jordan.

Fixons donc $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont nous voulons savoir si elle est inversible ou non et calculer son inverse ou, à défaut, son rang.

— Effectuer des opérations élémentaires sur A, on l'a vu, revient à la multiplier par des matrices inversibles, et si A est elle-même inversible, le résultat de ces multiplications sera toujours une matrice inversible. Si donc à un moment on obtient une matrice NON inversible en cours de calcul, c'est le signe certain que A N'était PAS inversible.

— À présent, faisons l'hypothèse que nous avons réussi à transformer A en I_n par des opérations élémentaires E_1, ..., E_r sur les LIGNES, dans cet ordre.

  Matriciellement, cela revient à dire que : $E_r \dots E_1 A = I_n$ **!! multiplications à GAUCHE !!** ou encore que A est inversible de matrice inverse $E_r \dots E_1 = A^{-1}$.

  Conclusion inattendue, l'égalité précédente peut aussi s'écrire trivialement

$$E_r \dots E_1 \mathbf{I_n} = A^{-1}.$$

  Les mêmes opérations qui ont transformé A en I_n permettent de transformer I_n en A^{-1}. Ceci nous fournit un algorithme pratique d'échelonnement/réduction ou d'inversion suivant les cas (*confer* exemple (12)).

ATTENTION

Je rappelle encore ici que le produit matriciel N'est PAS commutatif donc on ne peut s'amuser à travailler sur les lignes qui correspond à un produit à gauche puis ou et sur les colonnes ce qui correspond à un produit à droite.

Moralité : lorsque que vous commencerez avec des opérations sur les lignes, vous ne manipulerez plus que les lignes jusqu'à l'obtention de l'inverse et idem pour les colonnes au risque de trouver une matrice qui n'aura rien à voir avec l'inverse recherchée.

Exemple 12 : Montrons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et donnons son inverse.

On applique simultanément l'algorithme de Gauss à notre matrice A et à la matrice identité :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \qquad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_3}$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

Transformation de A en I_3 par des opérations élémentaires sur les lignes

Transformation de I_3 en A^{-1} par report des opérations élémentaires qui ont changé A en I_3.

Donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 : Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

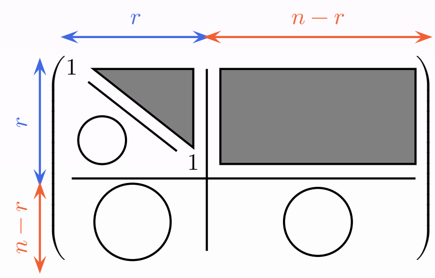
Méthode 5 (Algorithme d'élimination de Gauss-Jordan) :
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice non nulle.

1. Quitte à prendre la transposée de A, il existe au moins un coefficient non nul dans la première colonne de A. On peut supposer que c'est a_{11} en multipliant à gauche A par une matrice de permutation si ce n'était pas le cas et en effectuant l'opération
$$L_1 \leftrightarrow L_i.$$
En multipliant par une matrice de dilatation i.e. $L_1 \leftarrow \dfrac{1}{a_{11}} L_1$, on peut même supposer $a_{11} = 1$.
C'est le premier pivot.

2. En multipliant à gauche par des matrices de transvection, on annule tous les coefficients de la première colonne à partir de la deuxième ligne par des opérations élémentaires de la forme :
$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1.$$
La matrice A est alors transformée en une matrice de la forme :
$$\begin{pmatrix} 1 & \bullet & \dots & \bullet \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{np} \end{pmatrix}.$$

3. Si la matrice $\begin{pmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n2} & \dots & a'_{np} \end{pmatrix}$ n'est pas nulle, on poursuit l'algorithme.

4. L'algorithme s'arrête lorsque l'on a atteint la dernière ligne ou lorsque toutes les lignes qui restent sont nulles i.e. la matrice A est alors transformée en une matrice échelonnée (réduite) de la forme :



Remarque : Les opérations sont les mêmes sur les colonnes en multipliant, cette fois, à droite par les matrices d'opérations élémentaires.

Figure XVII.1 – Algorithme de Gauss-Jordan d'un point de vue matriciel.

III Ensemble des solutions

III.1 Linéarité et conséquences

Résoudre $(\mathscr{S})$ c'est déterminer les antécédents de B pour l'application

$$\mathscr{A}: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longmapsto & \mathbb{K}^m \\ \mathrm{X} & & \mathrm{AX} \end{array}$$

L'application $\mathscr{A}$ est linéaire et le principe de superposition s'applique.

Proposition 6 (Principe de superposition) : Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Si X_1 est solution de $\mathrm{AX} = \mathrm{B}_1$ et X_2 de $\mathrm{AX} = \mathrm{B}_2$, alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $\lambda_1\mathrm{X}_1 + \lambda_2\mathrm{X}_2$ est solution de $\mathrm{AX} = \lambda_1\mathrm{B}_1 + \lambda_2\mathrm{B}_2$.

Théorème 7 (Structure de l'ensemble des solutions) : Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathbb{K}^m$. On considère le système linéaire $(\mathcal{S})$ sous sa forme matricielle $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ où $\mathrm{X} \in \mathbb{K}^n$ et $(\mathcal{S}_0)$ son système homogène associé.

1. $(\mathcal{S}_0)$ est non vide et stable par combinaisons linéaires. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
2. Si $(\mathcal{S})$ est compatible, la solution générale du système est la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène :

Solution générale	=	Solution particulière	+	Solution de l'équation homogène.
$(\mathcal{S})$	=	X_p	+	$(\mathcal{S}_0)$.

Vocabulaire : On dit que l'ensemble des solutions du système $(\mathcal{S})$ est un espace affine dirigé par l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.

Exemple 13 : Soit le système $(\mathcal{S}_{13}) : \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 5y + z = 4 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ d'inconnue $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(\mathcal{S}_{13}) \iff \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ \phantom{x+{}} y + 3z = 10 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ \phantom{x+{}} y - 2z = -5 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ \phantom{x+{}} y + 3z = 10 \\ \phantom{x+y+{}} 5z = 15 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

L'unique solution de $(\mathcal{S}_{13})$ est donc le triplet $\underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{Solution particulière}} + \underbrace{(0)_{\mathbb{R}^3}}_{\text{Solution homogène}}$.

Exemple 14 : Enlevons une équation au système précédent. La résolution est identique :

$$(\mathcal{S}_{14}) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ 2x & + & 5y & + & z & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ & & y & + & 3z & = & 10 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -23 & + & 7z \\ y & = & 10 & - & 3z \\ z & = & & & z \end{array}\right. .$$

Remarque : Les inconnues x et y sont les inconnues *principales* et l'inconnue z est l'inconnue *secondaire*.

Les solutions de $(\mathcal{S}_{14})$ sont donc tous les triplets $\begin{pmatrix} -23+7\lambda \\ 10-3\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\lambda . \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution particulière

Solution homogène

III.2 Rang d'un système linéaire

Définition 8 (Rang d'un système linéaire) :

On appelle *rang* d'un système linéaire, le nombre de ses inconnues principales.

Exemples 15 :

- $(\mathcal{S}_3)$ est de rang 3.
- $(\mathcal{S}_{13})$ est de rang 3.
- $(\mathcal{S}_{14})$ est de rang 2.

Corollaire 7.1 : Le rang d'un système linéaire est égal au nombre de ses pivots après échelonnement.

On retrouve ici la définition (7) .

Exemples 16 : En reprenant les systèmes de l' exemple (7) on a :

1. Rang 3.
2. Rang 2.
3. Rang 1.
4. Rang 4.
5. Rang 4.

Exemple 17 : Supprimons encore une équation à $(\mathcal{S}_{14})$ pour former $(\mathcal{S}_{17})$:

$$(\mathcal{S}_{17}) : \left\{ x + 2y - z = -3 \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & = & -3 & - & 2y & + & z \\ y & = & & & y & & \\ z & = & & & & & z \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & = & -3 & - & 2\lambda & + & \mu \\ y & = & & & \lambda & & \\ z & = & & & & & \mu \end{array} \right. , \qquad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Les solutions de $(\mathcal{S}_{17})$ sont donc tous les triplets de la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\lambda.\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{ où } \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière

Solution homogène

x est la seule inconnue principale donc le système $(\mathcal{S}_{17})$ est de rang 1.

Remarque : On aurait tout aussi bien pu choisir y ou z comme inconnue principale.

Définition 9 (Espace vectoriel engendré par une partie) : Soient X_1, ..., $\mathrm{X}_r \in \mathbb{K}^n$.
L'ensemble des combinaisons linéaires de X_1, ..., X_r est noté $\mathrm{vect}\,(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_r)$:

$$\mathrm{Vect}(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_r) = \Big\{\lambda_1 \mathrm{X}_1 + \dots + \lambda_r \mathrm{X}_r\Big\}_{\lambda_1,\dots,\lambda_r \in \mathbb{K}}$$

Exemples 18 : En reprenant les exemples précédents :

- Les solutions de $(\mathcal{S}_{10})$ s'écrivent $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
- Les solutions de $(\mathcal{S}_{9})$ s'écrivent $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
- Les solutions de $(\mathcal{S}_{14})$ s'écrivent $\begin{pmatrix} -23 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
- Les solutions de $(\mathcal{S}_{17})$ s'écrivent $\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Définition 10 (Notion de dimension d'un SEV) : On appelle *dimension* de l'ensemble $\mathrm{E} = \mathrm{vect}\,(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_r)$, notée $\dim(\mathrm{E})$, le nombre de vecteurs indépendants de E.

Remarque : La dimension d'un vect n'est pas forcément égale au nombre de ses vecteurs.

Exemples 19 :

- Deux vecteurs sont indépendants si, et seulement si ils ne sont pas colinéaires.
- Trois vecteurs le sont s'ils ne sont pas coplanaires.

Exemples 20 (Dimension de sev dans $\mathbb{R}^2$) :

- $\mathrm{A} = \operatorname{vect}((2\,;3)) = \{(2x\,;3x)\}_{x\in\mathbb{R}}$. C'est la droite d'équation $y = \dfrac{3}{2}x$.
$$\dim(\mathrm{A}) = 1.$$
- $\mathrm{B} = \operatorname{vect}((1\,;0),\,(0\,;1)) = \{x\,(1\,;0) + y\,(0\,;1)\}_{x,\,y\in\mathbb{R}} = \{(x\,;y)\}_{x,\,y\in\mathbb{R}}$.
C'est le plan $(x\mathrm{O}y)$ et $\dim(\mathrm{B}) = 2$.
- $\mathrm{C} = \{(2+2x\,;1+y-x)\}_{x,\,y,\in\mathbb{R}} = \left\{\begin{pmatrix} 2+2x \\ 1-x+y \end{pmatrix}\right\}$
$$= \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}_{x,\,y\in\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
C'est le plan passant par le point $(2\,;1)$ et dirigé par les deux vecteurs indépendants $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
i.e. c'est le plan $\mathbb{R}^2$ lui-même et $\dim(\mathrm{C}) = 2$.

Exemples 21 (Dimension de sev dans $\mathbb{R}^3$) :

- Soit D le plan passant par l'origine du repère et dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\dim(\mathrm{D}) = 2$ et on a :
$$\mathrm{D} = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}} = \{(\lambda+\mu\,;2\lambda\,;\mu)\}_{\lambda,\,\mu\in\mathbb{R}}.$$
Remarque : $2x = y + 2z$ donc D est aussi le plan d'équation $2x - y - 2z = 0$.
- $\mathrm{E} = \{(x+y-z\,;2x-y\,;3y+z)\}_{x,\,y,\,z\in\mathbb{R}} = \left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}_{x,\,y,\,z\in\mathbb{R}}$
$$= \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
Les trois vecteurs étant indépendants, c'est l'espace $\mathbb{R}^3$ lui-même : $\dim(\mathrm{E}) = 3$.
- $\mathrm{F} = \{(3+x\,;3x+7\,;1+2x)\}_{x\in\mathbb{R}} = \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}_{x\in\mathbb{R}}$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$
C'est la droite passant par le point $(3\,;7\,;1)$ et dirigé par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$: $\dim(\mathrm{F}) = 1$.

Théorème 8 (Rang d'un système) : Le rang d'un système linéaire est égal au nombre d'inconnues retranché de la dimension de l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Exemples 22 : Notons $\mathcal{H}_0$, l'espace vectoriel des solutions du système homogène associé à $(\mathcal{S})$.

- À l' exemple (13) , $\dim \mathcal{H}_0 = 0$ d'où $\operatorname{rg} \mathcal{S}_3 = 3 - 0 = 3$.
- À l' exemple (14) , $\dim \mathcal{H}_0 = 1$ d'où $\operatorname{rg} \mathcal{S}_2 = 3 - 1 = 2$.
- À l' exemple (17) , $\dim \mathcal{H}_0 = 2$ d'où $\operatorname{rg} \mathcal{S}_1 = 3 - 2 = 1$.

Exercice 4 : Résoudre et discuter le système suivant d'inconnue (x, y, z) et de paramètre a :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

IV Systèmes linéaires et matrices inversibles

IV.1 Systèmes de Cramer

Définition 11 (Système de Cramer) : Un système linéaire est dit de *Cramer* si sa matrice est inversible.

En particulier, un système de Cramer est nécessairement carré : autant d'inconnues que d'équations.

Théorème 9 : Tout système de Cramer $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathbb{K}^n$ possède une unique solution :

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}.$$

IV.2 Inversibilité

Théorème 10 (Matrices inversibles et systèmes linéaires) : Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

La matrice A est inversible si, et seulement si $\forall\, \mathrm{Y} \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$ d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathbb{K}^n$ possède une unique solution.

On peut être un peu plus explicite :

Corollaire 10.1 : Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall\, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet une unique solution.
(ii) $\forall\, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet au moins une solution.
(iii) $\operatorname{rg}(\mathrm{A}) = n$.

(iv) $A \sim_L I_n$.
(v) A est inversible.
(vi) Le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle.

Corollaire 10.2 (Inversibilité des matrices triangulaires et diagonales) : Une matrice triangulaire (ou diagonale) est inversible si, et seulement si ses coefficients diagonaux sont **tous** non nuls.

Ce théorème va donc nous permettre à la fois de savoir si oui ou non une matrice est inversible et, le cas échéant, de calculer son inverse. Le mot d'ordre est simple : résoudre un système linéaire !

Exemple 23 : La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

En effet, pour tous $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x+3y+z &= a \\ x+y+2z &= b \\ x+y+z &= c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+2z &= b \\ 2x+3y+z &= a \\ x+y+z &= c \end{cases} \quad L_2 \leftrightarrow L_1 \quad \left(\begin{array}{c}\text{choix d'un pivot} \\ \text{simple de valeur 1}\end{array}\right)$$

$$\iff \begin{cases} x+y+2z &= b \\ y-3z &= a-2b \\ z &= b-c \end{cases} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} x+y &= -b+2c \\ y &= a+b-3c \\ z &= b-c \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \\ \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} x &= -a-2b+5c \\ y &= a+b-3c \\ z &= b-c. \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Nous avons ainsi réussi à résoudre le système linéaire initial pour TOUT second membre (a, b, c). Cela prouve que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

Son inverse $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ apparaît naturellement en fin de résolution.

Méthode 6 (Inversibilité et calcul de l'inverse éventuel) :

Par résolution du système $AX = Y$ pour tout second membre Y : On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et on résout $AX = Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec la méthode du pivot.

1. S'il y a une solution, on l'écrit matriciellement comme $X = BY$: on a alors $B = A^{-1}$.
2. Si le système $AX = Y$ n'est pas compatible pour au moins un Y, alors A n'est pas inversible.

Par la méthode du pivot sur la matrice concaténée $(A \mid \mathbf{I}_n)$: On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice concaténée $(A \mid \mathbf{I}_n)$ selon la méthode du pivot afin d'échelonner A : on aboutit à une matrice du type $(A' \mid *)$ avec A' échelonnée.

1. Si A' a strictement moins de n pivots, alors A n'est pas inversible.
2. Si A' a n pivots, alors A est inversible. On réduit alors A' par opérations élémentaires, pour obtenir une matrice équivalente par lignes $(\mathbf{I}_n \mid B)$.

   On conclut alors que $A^{-1} = B$.

Exercice 5 : Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et donner son inverse.

Corollaire 10.3 (Lire la non inversibilité sur les colonnes) : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A N'est PAS inversible.

(ii) Il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $X \neq (0)_{\mathbb{K}^n}$ et $AX = (0)_{\mathbb{K}^n}$.

(iii) Il existe une combinaison linéaire nulle des colonnes de A avec des coefficients non tous nuls :

$$\exists\, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \cdots, 0)\}, \qquad \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n = 0_{n,1},$$

où $A_1, \dots, A_n$ désignent les colonnes de A.

Exemples 24 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \notin \mathscr{G}l_3(\mathbb{R})$.

Exercice 6 : Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.