

Systemes lineaires

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 17



- 1 Systèmes linéaires et matrices
 - Écriture matricielle d'un système linéaire
 - Systèmes équivalents et opérations élémentaires
 - Systèmes échelonnés
- 2 Résolution pratique
 - Algorithme de Gauss
 - Point de vue matriciel
 - Opérations élémentaires et matrices inversibles
- 3 Ensemble des solutions
 - Linéarité et conséquences
 - Rang d'un système linéaire
- 4 Systèmes linéaires et matrices inversibles
 - Systèmes de Cramer
 - Inversibilité





Avant de rentrer

dans le vif du sujet en algèbre linéaire, un chapitre plus orienté calcul.

Il s'agit voir le lien entre les matrices et les systèmes d'équations linéaires, pour lesquels nous verrons une méthode de résolution systématique.



I. Systèmes linéaires et matrices

- 1 Systèmes linéaires et matrices
 - Écriture matricielle d'un système linéaire
 - Systèmes équivalents et opérations élémentaires
 - Systèmes échelonnés
- 2 Résolution pratique
- 3 Ensemble des solutions
- 4 Systèmes linéaires et matrices inversibles



I. Systèmes linéaires et matrices

1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition 1 (Système linéaire) :

On appelle système linéaire à m équations et n inconnues x_1, x_2, \dots, x_n tout système (\mathcal{S}) de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots + \vdots + \ddots + \vdots = \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (\mathcal{S})$$



I. Systèmes linéaires et matrices

1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition 1 (Système linéaire) :

On appelle système linéaire à m équations et n inconnues x_1, x_2, \dots, x_n tout système (\mathcal{S}) de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots + \vdots + \ddots + \vdots = \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \quad (\mathcal{S})$$

En posant $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$, le système (\mathcal{S}) s'écrit alors sous la forme

I. Systèmes linéaires et matrices

1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition 1 (Système linéaire) :

On appelle système linéaire à m équations et n inconnues x_1, x_2, \dots, x_n tout système (\mathcal{S}) de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots + \vdots + \ddots + \vdots = \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (\mathcal{S})$$

$$AX = B. \quad (\mathcal{S})$$



I. Systèmes linéaires et matrices

1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Remarques et Vocabulaire :

- La matrice A s'appelle la matrice du système et on considère parfois sa matrice, dite **augmentée**,

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{2,m} & b_m \end{array} \right).$$



I. Systèmes linéaires et matrices

1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Remarques et Vocabulaire :

- La matrice A s'appelle la matrice du système et on considère parfois sa matrice, dite **augmentée**,

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right).$$

- On identifie \mathbb{K}^n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *i.e.* on confond usuellement le vecteur ligne d'inconnue

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \text{ avec la colonne } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$



I. Systèmes linéaires et matrices

1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Exemples I :

- Le système 2×2 , $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5x - 4y = 1 \end{cases}$ s'écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I. Systèmes linéaires et matrices

1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Exemples I :

- Le système 2×2 , $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5x - 4y = 1 \end{cases}$ s'écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- De même, le système 2×3 :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I. Systèmes linéaires et matrices

1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Exemples 1 :

- Le système 2×2 , $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5x - 4y = 1 \end{cases}$ s'écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- De même, le système 2×3 :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Et le système 3×2 :

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x - 4y = 1 \\ -5x + 6y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I. Systèmes linéaires et matrices

1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition 2 :

On conserve les notations de la **définition (1)** .

- On dit que le système (\mathcal{S}) est **homogène** si $B = (0)_{\mathbb{K}^m}$ et on note (\mathcal{S}_0) le système homogène associé à (\mathcal{S}) obtenu en remplaçant B par $(0)_{\mathbb{K}^m}$.



I. Systèmes linéaires et matrices

1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition 2 :

On conserve les notations de la **définition (1)** .

- On dit que le système (\mathcal{S}) est **homogène** si $B = (0)_{\mathbb{K}^m}$ et on note (\mathcal{S}_0) le système homogène associé à (\mathcal{S}) obtenu en remplaçant B par $(0)_{\mathbb{K}^m}$.
- **Résoudre** le système (\mathcal{S}) c'est trouver l'ensemble des vecteurs $X \in \mathbb{K}^n$ vérifiant $AX = B$. Le système est alors dit **compatible** dans ce cas, **incompatible** sinon.



I. Systèmes linéaires et matrices

1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition 2 :

On conserve les notations de la **définition (1)** .

- On dit que le système (\mathcal{S}) est **homogène** si $B = (0)_{\mathbb{K}^m}$ et on note (\mathcal{S}_0) le système homogène associé à (\mathcal{S}) obtenu en remplaçant B par $(0)_{\mathbb{K}^m}$.
- **Résoudre** le système (\mathcal{S}) c'est trouver l'ensemble des vecteurs $X \in \mathbb{K}^n$ vérifiant $AX = B$. Le système est alors dit **compatible** dans ce cas, **incompatible** sinon.
- Deux systèmes sont dits **équivalents** lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.



I. Systèmes linéaires et matrices

1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition 2 :

On conserve les notations de la **définition (1)** .

- On dit que le système (\mathcal{S}) est **homogène** si $B = (0)_{\mathbb{K}^m}$ et on note (\mathcal{S}_0) le système homogène associé à (\mathcal{S}) obtenu en remplaçant B par $(0)_{\mathbb{K}^m}$.
- **Résoudre** le système (\mathcal{S}) c'est trouver l'ensemble des vecteurs $X \in \mathbb{K}^n$ vérifiant $AX = B$. Le système est alors dit **compatible** dans ce cas, **incompatible** sinon.
- Deux systèmes sont dits **équivalents** lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.

Remarques :

- Tout système homogène admet, au moins, le vecteur nul comme solution.



I. Systèmes linéaires et matrices

1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition 2 :

On conserve les notations de la **définition (1)** .

- On dit que le système (\mathcal{S}) est **homogène** si $B = (0)_{\mathbb{K}^m}$ et on note (\mathcal{S}_0) le système homogène associé à (\mathcal{S}) obtenu en remplaçant B par $(0)_{\mathbb{K}^m}$.
- **Résoudre** le système (\mathcal{S}) c'est trouver l'ensemble des vecteurs $X \in \mathbb{K}^n$ vérifiant $AX = B$. Le système est alors dit **compatible** dans ce cas, **incompatible** sinon.
- Deux systèmes sont dits **équivalents** lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.

Remarques :

- Tout système homogène admet, au moins, le vecteur nul comme solution.
- \emptyset est un ensemble solution tout à fait acceptable.



I. Systèmes linéaires et matrices

1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Exemples 2 :

- Les systèmes $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -3x + 6y + z = -2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ sont équivalents.



I. Systèmes linéaires et matrices

1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Exemples 2 :

- Les systèmes $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -3x + 6y + z = -2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ sont équivalents.
- $(1; 0; 1)$, $(-1; -1; 1)$ et, plus généralement $(1 + 2t; t; 1)$ pour $t \in \mathbb{R}$ sont solution des systèmes précédents qui admettent donc une infinité de triplets solutions.



I. Systèmes linéaires et matrices

1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Exemples 2 :

- Les systèmes $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -3x + 6y + z = -2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ sont équivalents.
- $(1; 0; 1)$, $(-1; -1; 1)$ et, plus généralement $(1 + 2t; t; 1)$ pour $t \in \mathbb{R}$ sont solution des systèmes précédents qui admettent donc une infinité de triplets solutions.
- $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ -6x + 10y = -2 \end{cases}$ admet tout couple de réels $(x; y)$ comme solution.



I. Systèmes linéaires et matrices

1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Exemples 2 :

- Les systèmes $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -3x + 6y + z = -2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ sont équivalents.
- $(1; 0; 1)$, $(-1; -1; 1)$ et, plus généralement $(1 + 2t; t; 1)$ pour $t \in \mathbb{R}$ sont solution des systèmes précédents qui admettent donc une infinité de triplets solutions.
- $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ -6x + 10y = -2 \end{cases}$ admet tout couple de réels $(x; y)$ comme solution.
- $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ -6x + 10y = 1 \end{cases}$ est incompatible.



I. Systèmes linéaires et matrices

1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Exemples 2 :

- Les systèmes $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -3x + 6y + z = -2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ sont équivalents.
- $(1; 0; 1)$, $(-1; -1; 1)$ et, plus généralement $(1 + 2t; t; 1)$ pour $t \in \mathbb{R}$ sont solution des systèmes précédents qui admettent donc une infinité de triplets solutions.
- $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ -6x + 10y = -2 \end{cases}$ admet tout couple de réels $(x; y)$ comme solution.
- $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ -6x + 10y = 1 \end{cases}$ est incompatible.
- $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ admet $(3; 1; 0)$ comme unique solution. La matrice associée à ce système est l'identité.



I. Systèmes linéaires et matrices

2. Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Soient $n \in \mathbb{N}$, $i, j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note :

$$\bullet L_{i,j,n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ \cdots & & & & 0 & & & 1 & \cdots \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 1 & \\ \cdots & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdots \\ \leftarrow i \\ \cdots \\ \leftarrow j \\ \cdots \end{matrix}$$

\uparrow i \uparrow j



I. Systèmes linéaires et matrices

2. Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Soient $n \in \mathbb{N}$, $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note :

$$\bullet H_{i,n}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & & \lambda & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i$$



I. Systèmes linéaires et matrices

2. Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Soient $n \in \mathbb{N}$, $i, j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note :

$$\bullet \mathbf{T}_{i,j,n}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ \hline & & & & & & 1 \\ & & & & & & \lambda \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

\updownarrow
 j



I. Systèmes linéaires et matrices

2. Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Proposition 1 (Effet d'une matrice d'opérations élémentaires sur les lignes) :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Multiplier A par $L_{i,j,n}$ à gauche revient à permuter les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes de A .

On note $L_i \leftrightarrow L_j$ cette opération.



I. Systèmes linéaires et matrices

2. Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Proposition 1 (Effet d'une matrice d'opérations élémentaires sur les lignes) :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Multiplier A par $L_{i,j,n}$ à gauche revient à permuter les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes de A .
On note $L_i \leftrightarrow L_j$ cette opération.
- Multiplier A par $H_{i,n}(\lambda)$ à gauche revient à multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par λ .
On note $L_i \leftarrow \lambda L_i$ cette opération.



I. Systèmes linéaires et matrices

2. Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Proposition 1 (Effet d'une matrice d'opérations élémentaires sur les lignes) :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Multiplier A par $L_{i,j,n}$ à gauche revient à permuter les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes de A .
On note $L_i \leftrightarrow L_j$ cette opération.
- Multiplier A par $H_{i,n}(\lambda)$ à gauche revient à multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par λ .
On note $L_i \leftarrow \lambda L_i$ cette opération.
- Multiplier A par $T_{i,j,n}(\lambda)$ à gauche revient à additionner la $j^{\text{ème}}$ ligne de A multipliée par λ à la $i^{\text{ème}}$ (avec $i \neq j$).
On note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ cette opération.



I. Systèmes linéaires et matrices

2. Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Vocabulaire :

- Les matrices $L_{i,j,n}$ s'appellent des **matrices de permutation**.



I. Systèmes linéaires et matrices

2. Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Vocabulaire :

- Les matrices $L_{i,j,n}$ s'appellent des **matrices de permutation**.
- Les matrices $H_{i,n}$ s'appellent des **matrices de dilatation**.



I. Systèmes linéaires et matrices

2. Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Vocabulaire :

- Les matrices $L_{i,j,n}$ s'appellent des **matrices de permutation**.
- Les matrices $H_{i,n}$ s'appellent des **matrices de dilatation**.
- Les matrices $T_{i,j,n}$ s'appellent des **matrices de transvection**.



I. Systèmes linéaires et matrices

2. Systèmes équivalents et opérations élémentaires

De même à droite avec les colonnes :

Proposition 2 (Effet d'une matrice d'opérations élémentaires sur les colonnes) :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Multiplier A par $L_{i,j,p}$ à droite revient à permuter les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ colonnes de A .
On note $C_i \leftrightarrow C_j$ cette opération.
- Multiplier A par $H_{i,p}(\lambda)$ à droite revient à multiplier la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par λ .
On note $C_i \leftarrow \lambda C_i$ cette opération.
- Multiplier A par $T_{i,j,p}(\lambda)$ à droite revient à additionner la $j^{\text{ème}}$ colonne de A multipliée par λ à la $i^{\text{ème}}$ (avec $i \neq j$).
On note $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ cette opération.



I. Systèmes linéaires et matrices

2. Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Définition 3 (Opérations élémentaires sur les lignes) :

On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système, les opérations ci-dessous :

Permutation : $L_i \leftrightarrow L_j$, permuter les lignes i et j

Effectuer de telles opérations sur un système revient donc à multiplier la matrice augmentée du système à gauche par les matrices d'opérations élémentaires correspondantes.



I. Systèmes linéaires et matrices

2. Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Définition 3 (Opérations élémentaires sur les lignes) :

On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système, les opérations ci-dessous :

Permutation : $L_i \leftrightarrow L_j$, permuter les lignes i et j

Dilatation ($\lambda \neq 0$) : $L_i \leftarrow \lambda L_i$, multiplier la ligne i par λ .

Effectuer de telles opérations sur un système revient donc à multiplier la matrice augmentée du système à gauche par les matrices d'opérations élémentaires correspondantes.



I. Systèmes linéaires et matrices

2. Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Définition 3 (Opérations élémentaires sur les lignes) :

On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système, les opérations ci-dessous :

Permutation : $L_i \leftrightarrow L_j$, permuter les lignes i et j

Dilatation ($\lambda \neq 0$) : $L_i \leftarrow \lambda L_i$, multiplier la ligne i par λ .

Transvection : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et, par extension, $L_i \leftarrow \mu L_i + \lambda L_j$, remplacer la ligne i par une combinaison linéaire des lignes i et j .

Effectuer de telles opérations sur un système revient donc à multiplier la matrice augmentée du système à gauche par les matrices d'opérations élémentaires correspondantes.



I. Systèmes linéaires et matrices

2. Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Théorème 3 :

- ❶ Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrices sont bijectives.



I. Systèmes linéaires et matrices

2. Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Théorème 3 :

- ❶ Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrices sont bijectives.
- ❷ Deux systèmes linéaires qui se déduisent l'un de l'autre par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les **lignes** sont équivalents.

On note généralement :

$$(\mathcal{S}) \sim_L (\mathcal{S}'), \quad \tilde{A} \sim_L \tilde{A}' \quad \text{ou} \quad A \sim_L A'.$$



I. Systèmes linéaires et matrices

2. Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Théorème 3 :

- ❶ Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrices sont bijectives.
- ❷ Deux systèmes linéaires qui se déduisent l'un de l'autre par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les **lignes** sont équivalents.

On note généralement :

$$(\mathcal{S}) \sim_L (\mathcal{S}'), \quad \tilde{A} \sim_L \tilde{A}' \quad \text{ou} \quad A \sim_L A'.$$

Remarque : L'équivalence par ligne est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.



I. Systèmes linéaires et matrices

2. Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Théorème 3 :

- ❶ Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrices sont bijectives.
- ❷ Deux systèmes linéaires qui se déduisent l'un de l'autre par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les **lignes** sont équivalents.

On note généralement :

$$(\mathcal{S}) \sim_L (\mathcal{S}'), \quad \tilde{A} \sim_L \tilde{A}' \quad \text{ou} \quad A \sim_L A'.$$

Remarque : L'équivalence par ligne est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

D'un point de vue matriciel,

Corollaire 3.1 :

Les matrices de permutation et de transvection ainsi que celles de dilatation pour $\lambda \neq 0$ sont inversibles.

I. Systèmes linéaires et matrices

2. Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Méthode 1 :

- Il revient au même de travailler par opérations élémentaires sur le système ou sur sa matrice augmentée. On notera $\tilde{M} \sim_O \tilde{M}'$ pour préciser l'opération O effectuée sur les lignes.



I. Systèmes linéaires et matrices

2. Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Méthode 1 :

- Il revient au même de travailler par opérations élémentaires sur le système ou sur sa matrice augmentée. On notera $\tilde{M} \sim_O \tilde{M}'$ pour préciser l'opération O effectuée sur les lignes.
- Travailler sur la matrice permet d'avoir des notations plus concises tout en conservant toutes les informations nécessaires à la résolution.



I. Systèmes linéaires et matrices

2. Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Méthode 1 :

- Il revient au même de travailler par opérations élémentaires sur le système ou sur sa matrice augmentée. On notera $\tilde{M} \sim_O \tilde{M}'$ pour préciser l'opération O effectuée sur les lignes.
- Travailler sur la matrice permet d'avoir des notations plus concises tout en conservant toutes les informations nécessaires à la résolution.
- Dans le cas des systèmes homogènes, il suffit de travailler sur la matrice A au lieu de la matrice augmentée $\tilde{A} = (A | 0)$ car les opérations élémentaires laissent la colonne du second membre invariante à 0.



I. Systèmes linéaires et matrices

2. Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Exemple 3 :

Résolution d'un système linéaire à l'aide d'opérations élémentaires sur ses lignes.

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_3) : \begin{cases} x + 3y - z & = & -6 \\ 2x + 5y + z & = & 4 \\ 3x & + 2z & = & 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z & = & -6 \\ -y + 3z & = & 16 \\ -9y + 5z & = & 34 \end{cases} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z & = & -6 \\ -y + 3z & = & 16 \\ -22z & = & -110 \end{cases} L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z & = & -6 \\ -y + 3z & = & 16 \\ z & = & 5 \end{cases} L_3 \leftarrow -\frac{1}{22}L_3 \end{aligned}$$

On dit qu'on a **échelonné** le système (disposition en escalier). Ce dernier système est très facile à résoudre, et le **théorème (3)** permet d'affirmer qu'il a le même ensemble de solutions que (\mathcal{S}_3) .



I. Systèmes linéaires et matrices

2. Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Exemple 4 :

On peut choisir de travailler en matrice augmentée.

Pour le système de l'exemple (3), on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 16 \end{array} \right) &\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 16 \\ 0 & -9 & 5 & 34 \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \\ &\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & -22 & -110 \end{array} \right) & L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2 \\ &\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) & L_3 \leftarrow -\frac{1}{22}L_3 \end{aligned}$$

On dit que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est **échelonnée par lignes**.



I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

L'idée : Si la matrice du système est diagonale *i.e.* si le système linéaire associé s'écrit :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} \alpha_1 x_1 & & & = & b_1 \\ & \alpha_2 x_2 & & = & b_2 \\ & & \ddots & = & \vdots \\ & & & \alpha_n x_n & = & b_n \end{cases}$$

i.e. si le système est dit **échelonné réduit**, il est facile de le résoudre.

En effet, ici, on aura très facilement et à l'unique condition que $\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $\alpha_i \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{\alpha_1} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{\alpha_n} \end{pmatrix}.$$



I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Proposition 4 :

Un système diagonal $(\alpha_i x_i = b_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est compatible si, et seulement si :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \alpha_i = 0 \implies b_i = 0.$$

Sous ces conditions, il se résout en divisant par α_i le cas échéant.



I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Définition 4 (Système triangulaire supérieur) :

Un système (\mathcal{S}) est dit **triangulaire** supérieur si sa matrice $A \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure :

$$\forall ij \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad i > j \implies a_{ij} = 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ & & & & & & a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\ & & & & a_{n-1,n-1}x_{n-1} & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$



I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Méthode 2 :

Pour résoudre de tels systèmes, on procède par « remontée » :

- 1 L_n est de la forme $a_{n,n}x_n = b_n$ et permet d'exprimer x_n si $a_{n,n} \neq 0$. On peut alors éliminer l'inconnue x_n des lignes 1 à $n-1$ par soustraction.

I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Méthode 2 :

Pour résoudre de tels systèmes, on procède par « remontée » :

- 1 L_n est de la forme $a_{n,n}x_n = b_n$ et permet d'exprimer x_n si $a_{n,n} \neq 0$. On peut alors éliminer l'inconnue x_n des lignes 1 à $n-1$ par soustraction.
- 2 La nouvelle ligne $n-1$ est de la forme $L_{n-1} : a_{n-1,n-1}x_{n-1} = b'_{n-1}$ permet d'exprimer x_{n-1} en fonction de b'_{n-1} si $a_{n-1,n-1} \neq 0$ et d'éliminer x_{n-1} des lignes 1 à $n-2$.

I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Méthode 2 :

Pour résoudre de tels systèmes, on procède par « remontée » :

- 1 L_n est de la forme $a_{n,n}x_n = b_n$ et permet d'exprimer x_n si $a_{n,n} \neq 0$. On peut alors éliminer l'inconnue x_n des lignes 1 à $n-1$ par soustraction.
- 2 La nouvelle ligne $n-1$ est de la forme $L_{n-1} : a_{n-1,n-1}x_{n-1} = b'_{n-1}$ permet d'exprimer x_{n-1} en fonction de b'_{n-1} si $a_{n-1,n-1} \neq 0$ et d'éliminer x_{n-1} des lignes 1 à $n-2$.

...

I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Méthode 2 :

Pour résoudre de tels systèmes, on procède par « remontée » :

- 1 L_n est de la forme $a_{n,n}x_n = b_n$ et permet d'exprimer x_n si $a_{n,n} \neq 0$. On peut alors éliminer l'inconnue x_n des lignes 1 à $n-1$ par soustraction.
- 2 La nouvelle ligne $n-1$ est de la forme $L_{n-1} : a_{n-1,n-1}x_{n-1} = b'_{n-1}$ permet d'exprimer x_{n-1} en fonction de b'_{n-1} si $a_{n-1,n-1} \neq 0$ et d'éliminer x_{n-1} des lignes 1 à $n-2$.
- ...
- 3 On traite ainsi successivement les lignes par ordre décroissant.

I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Méthode 2 :

Pour résoudre de tels systèmes, on procède par « remontée » :

- 1 L_n est de la forme $a_{n,n}x_n = b_n$ et permet d'exprimer x_n si $a_{n,n} \neq 0$. On peut alors éliminer l'inconnue x_n des lignes 1 à $n-1$ par soustraction.
- 2 La nouvelle ligne $n-1$ est de la forme $L_{n-1} : a_{n-1,n-1}x_{n-1} = b'_{n-1}$ permet d'exprimer x_{n-1} en fonction de b'_{n-1} si $a_{n-1,n-1} \neq 0$ et d'éliminer x_{n-1} des lignes 1 à $n-2$.
- ...
- 3 On traite ainsi successivement les lignes par ordre décroissant.
- 4 Si un coefficient diagonal $a_{i,i}$ est nul, il faut examiner la compatibilité de la i -ème ligne qui doit être une équation de la forme $0 = 0$, sinon le système n'a pas de solution.

I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Méthode 2 :

Pour résoudre de tels systèmes, on procède par « remontée » :

- 1 L_n est de la forme $a_{n,n}x_n = b_n$ et permet d'exprimer x_n si $a_{n,n} \neq 0$. On peut alors éliminer l'inconnue x_n des lignes 1 à $n-1$ par soustraction.
- 2 La nouvelle ligne $n-1$ est de la forme $L_{n-1} : a_{n-1,n-1}x_{n-1} = b'_{n-1}$ permet d'exprimer x_{n-1} en fonction de b'_{n-1} si $a_{n-1,n-1} \neq 0$ et d'éliminer x_{n-1} des lignes 1 à $n-2$.
- ...
- 3 On traite ainsi successivement les lignes par ordre décroissant.
- 4 Si un coefficient diagonal $a_{i,i}$ est nul, il faut examiner la compatibilité de la i -ème ligne qui doit être une équation de la forme $0 = 0$, sinon le système n'a pas de solution.
- 6 On finit par traiter une 1^{ère} ligne de la forme $\tilde{L}_1 : a_{1,1}x_1 = \tilde{b}_1$.

I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Exemple 5 :

Reprenons le système de l'exemple (3) :

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_3) : \begin{cases} x + 3y - z & = & -6 \\ -y + 3z & = & 16 \\ z & = & 5 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y & = & -1 \\ -y & = & 1 \\ z & = & 5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 2 \\ -y & = & 1 \\ z & = & 5 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 2 \\ y & = & -1 \\ z & = & 5. \end{cases} \quad \text{et } (\mathcal{S}_3) = \{(2; -1; 5)\}. \end{aligned}$$



I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Exemple 6 :

À partir de la matrice augmentée de l'exemple (4), on obtient également :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array}$$

$$\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$$

$$\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

Cette matrice correspond au système diagonal $\begin{cases} x & = & 2 \\ y & = & -1 \\ z & = & 5 \end{cases}$ dont l'ensemble des solutions est transparent !

On dit que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est **échelonnée réduite par lignes**.

I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Exercice I :

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{1} & & \textcircled{2} & & \textcircled{3} \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_2 - 6x_3 = 4 \\ 3x_3 = 6 \end{array} \right. & & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_3 = 4 \\ -3x_3 = 6 \end{array} \right. & & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_3 = 5 \\ -3x_3 = 6 \end{array} \right. \end{array}$$



I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Les systèmes diagonaux ou triangulaires sont des cas particuliers de systèmes, dits échelonnés :

Définition 5 (Pivot, système échelonné) :

- Dans un système linéaire ou une matrice, on appelle **pivot** d'une ligne non nulle le premier de ses coefficients non nuls.



I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Les systèmes diagonaux ou triangulaires sont des cas particuliers de systèmes, dits échelonnés :

Définition 5 (Pivot, système échelonné) :

- Dans un système linéaire ou une matrice, on appelle **pivot** d'une ligne non nulle le premier de ses coefficients non nuls.
- On dit que (S) est **échelonné par lignes** lorsque :



I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Les systèmes diagonaux ou triangulaires sont des cas particuliers de systèmes, dits échelonnés :

Définition 5 (Pivot, système échelonné) :

- Dans un système linéaire ou une matrice, on appelle **pivot** d'une ligne non nulle le premier de ses coefficients non nuls.
- On dit que (S) est **échelonné par lignes** lorsque :
 - ① Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi.



I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Les systèmes diagonaux ou triangulaires sont des cas particuliers de systèmes, dits échelonnés :

Définition 5 (Pivot, système échelonné) :

- Dans un système linéaire ou une matrice, on appelle **pivot** d'une ligne non nulle le premier de ses coefficients non nuls.
- On dit que (S) est **échelonné par lignes** lorsque :
 - ① Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi.
 - ② À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le pivot a un indice de colonne strictement à supérieur à celui de la ligne précédente.



I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Les systèmes diagonaux ou triangulaires sont des cas particuliers de systèmes, dits échelonnés :

Définition 5 (Pivot, système échelonné) :

- Dans un système linéaire ou une matrice, on appelle **pivot** d'une ligne non nulle le premier de ses coefficients non nuls.
- On dit que (S) est **échelonné par lignes** lorsque :
 - ① Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi.
 - ② À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le pivot a un indice de colonne strictement à supérieur à celui de la ligne précédente.
- Dans un système échelonné, on dit qu'une inconnue est



I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Les systèmes diagonaux ou triangulaires sont des cas particuliers de systèmes, dits échelonnés :

Définition 5 (Pivot, système échelonné) :

- Dans un système linéaire ou une matrice, on appelle **pivot** d'une ligne non nulle le premier de ses coefficients non nuls.
- On dit que (S) est **échelonné par lignes** lorsque :
 - ① Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi.
 - ② À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le pivot a un indice de colonne strictement à supérieur à celui de la ligne précédente.
- Dans un système échelonné, on dit qu'une inconnue est
 - ◇ **principale** si son coefficient est un pivot sur une des lignes du système ;



I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Les systèmes diagonaux ou triangulaires sont des cas particuliers de systèmes, dits échelonnés :

Définition 5 (Pivot, système échelonné) :

- Dans un système linéaire ou une matrice, on appelle **pivot** d'une ligne non nulle le premier de ses coefficients non nuls.
- On dit que (S) est **échelonné par lignes** lorsque :
 - ① Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi.
 - ② À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le pivot a un indice de colonne strictement à supérieur à celui de la ligne précédente.
- Dans un système échelonné, on dit qu'une inconnue est
 - ◇ **principale** si son coefficient est un pivot sur une des lignes du système ;
 - ◇ **secondaire** sinon.



I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Exemples 7 (Systèmes échelonnés) :

$$\bullet \left\{ \begin{array}{rclcl} 1x & 2y & -z & +2t & = 4 \\ -1y & +2z & & & = 3 \\ & & & 5t & = 1 \end{array} \right.$$



I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Exemples 7 (Systèmes échelonnés) :

$$1 \left\{ \begin{array}{l} 1x + 2y - z + 2t = 4 \\ -1y + 2z = 3 \\ 5t = 1 \end{array} \right.$$

$$2 \left\{ \begin{array}{l} 5x + y + 2t - u = -2 \\ 2u = 3 \end{array} \right.$$



I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Exemples 7 (Systèmes échelonnés) :

$$① \begin{cases} ①x + 2y - z + 2t = 4 \\ -①y + 2z = 3 \\ ⑤t = 1 \end{cases}$$

$$② \begin{cases} ⑤x + y + 2t - u = -2 \\ ②u = 3 \end{cases}$$

$$③ \begin{cases} ①x + y + 2z - 1t = 2 \end{cases}$$



I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Exemples 7 (Systèmes échelonnés) :

$$\textcircled{1} \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{5}x + y + 2t - u = -2 \\ \textcircled{1}y + z - t + 3u = 3 \\ \textcircled{3}z - 2t + 5u = 6 \\ \textcircled{-1}u = 1 \end{array} \right.$$

$$\textcircled{2} \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{2}x = 1 \\ \textcircled{-3}y = 3 \\ \textcircled{1}z = 6 \\ \textcircled{-6}u = 12 \end{array} \right.$$

réduit.

Ce système est dit échelonné



I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Exemples 8 (Systèmes non échelonnés) :

$$\bullet \begin{cases} x & 2y & -z & +2t & = & 4 \\ x & -y & & 2t & = & 3 \\ & & & 5t & = & 1 \end{cases}$$



I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Exemples 8 (Systèmes non échelonnés) :

$$\textcircled{1} \begin{cases} x & 2y & -z & +2t & = & 4 \\ x & -y & & 2t & = & 3 \\ & & & 5t & = & 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 5x + y + 2t - u & = & -2 \\ -4y + t - 2u & = & 3 \\ 5y + 2t + u & = & 0 \end{cases}$$



I. Systèmes linéaires et matrices

3. Systèmes échelonnés

Exemples 8 (Systèmes non échelonnés) :

$$① \begin{cases} x & 2y & -z & +2t & = & 4 \\ x & -y & & 2t & = & 3 \\ & & & 5t & = & 1 \end{cases}$$

$$② \begin{cases} 5x + y + 2t - u & = & -2 \\ -4y + t - 2u & = & 3 \\ 5y + 2t + u & = & 0 \end{cases}$$

$$③ \begin{cases} 5x & +y & & +2t & -u & = & -2 \\ & y & +z & -t & +3u & = & 3 \\ & & 3z & -2t & +5u & = & 6 \\ & & z & +t & & = & -1 \\ & & & -t & & = & 1 \end{cases}$$



II. Résolution pratique

- 1 Systèmes linéaires et matrices
- 2 Résolution pratique
 - Algorithme de Gauss
 - Point de vue matriciel
 - Opérations élémentaires et matrices inversibles
- 3 Ensemble des solutions
- 4 Systèmes linéaires et matrices inversibles



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

L'objectif de l'**algorithme de Gauss** est donc de transformer tout système linéaire en un système échelonné **équivalent** par des opérations élémentaires décrites au **paragraphe (2)** .

Considérons un système quelconque où chaque point • représente un coefficient du système, éventuellement 0.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad = \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad = \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad = \quad \bullet \end{array} \right.$$

Nous allons faire disparaître progressivement ces coefficients en les annulant et obtenir finalement la forme **échelonnée** du système étudié.



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Étape 1 : On choisit dans le système un coefficient non nul ✓ appelé **pivot**. Bien sûr, si tous les coefficients sont nuls, le système est résolu ! S'il n'y est pas déjà, on peut toujours placer ce pivot en position (1, 1) en permutant deux équations et/ou deux inconnues. Le système initial :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array} \right. \text{ devient } \left\{ \begin{array}{cccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array} \right.$$

après une éventuelle opération $L_i \leftrightarrow L_j$ et un éventuel échange d'inconnues.

ATTENTION

Permuter les inconnues n'est pas une opération élémentaire sur les colonnes, mais simplement une réindexation.



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Étape 2 : Grâce au pivot, on annule par des opérations $L_i \leftarrow L_i - \lambda_i L_1$ ou $L_i \leftarrow \lambda_1 L_i - \lambda_i L_1$ tous les coefficients de la première colonne sous le pivot.

Le système devient :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array} \right.$$

Remarque : Évitez les divisions et si une ligne nulle apparaît à cette étape, on la supprime sans ménagement.



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Reprise des étapes 1 et 2 : On reprend les étapes 1 et 2 avec le sous-système obtenu par oubli de la ligne 1.

Le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \checkmark \quad \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} = \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right. \text{ devient } \left\{ \begin{array}{l} \checkmark \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet = \bullet \\ \checkmark \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet = \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet = \bullet \end{array} \right.$$

$$\text{puis } \left\{ \begin{array}{l} \checkmark \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet = \bullet \\ \checkmark \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet = \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet = \bullet \end{array} \right.$$



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Et on recommence : On poursuit l'algorithme jusqu'à la $m^{\text{ème}}$ ligne ou jusqu'à n'avoir que des lignes nulles.

Le résultat final est appelé une forme échelonnée du système :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array} \right.$$



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Remontée : On annule à présent tous les coefficients situés au-dessus des symboles ✓.

La méthode est la même que précédemment, on utilise les pivots et des opérations $L_i \leftarrow \lambda_j L_i + \lambda_i L_j$.

Le système échelonné devient :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array} \right. \text{ puis } \left\{ \begin{array}{cccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & = & \bullet \end{array} \right.$$



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Remontée : On annule à présent tous les coefficients situés au-dessus des symboles ✓.

La méthode est la même que précédemment, on utilise les pivots et des opérations $L_i \leftarrow \lambda_j L_i + \lambda_i L_j$.

Le système échelonné devient :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array} \right. \text{ puis } \left\{ \begin{array}{cccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array} \right.$$

Et c'est fini ! Sur l'exemple choisi, on peut exprimer les inconnues **principales** 1, 2 et 3 en fonction des inconnues **secondaires** 4 et 5, ce qui achève la résolution du système.



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exemple 9 :

$$(\mathcal{S}_9) : \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ 2x - y + 3z + t = 3 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases}$$



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exemple 9 :

$$(\mathcal{S}_9) : \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ 2x - y + 3z + t = 3 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \iff \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exemple 9 :

$$(S_9) : \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ 2x - y + 3z + t = 3 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases}$$
$$\begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ y + z - t = -1 \\ -y + 2z - 2t = -2 \end{cases}$$



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exemple 9 :

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_9) : & \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ 2x - y + 3z + t = 3 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases} \\ \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} & \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ y + z - t = -1 \\ -y + 2z - 2t = -2 \end{cases} \\ \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 + \frac{1}{3}L_2 \end{matrix} & \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ y + z - t = -1 \\ z - t = -1 \end{cases} \end{aligned}$$



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exemple 9 :

$$(\mathcal{S}_9) : \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ 2x - y + 3z + t = 3 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ y + z - t = -1 \\ -y + 2z - 2t = -2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 + \frac{1}{3}L_2 \end{array} \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ y + z - t = -1 \\ z - t = -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \begin{cases} x - y + 2t = 3 \\ y = 0 \\ z - t = -1 \end{cases}$$



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exemple 9 :

$$(\mathcal{S}_9) : \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ 2x - y + 3z + t = 3 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ y + z - t = -1 \\ -y + 2z - 2t = -2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 + \frac{1}{3}L_2 \end{array} \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ y + z - t = -1 \\ z - t = -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \begin{cases} x - y + 2t = 3 \\ y = 0 \\ z - t = -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \end{array} \begin{cases} x + 2t = 3 \\ y = 0 \\ z - t = -1 \end{cases}$$

II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exemple 9 :

$$(\mathcal{S}_9) : \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ 2x - y + 3z + t = 3 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow_{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{cases} x + 2t = 3 \\ y = 0 \\ z - t = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 0 \\ z = -1 + t \\ t = t \end{cases}$$



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exemple 9 :

$$(\mathcal{S}_9) : \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ 2x - y + 3z + t = 3 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} x & & & + 2t & = & 3 \\ & y & & & = & 0 \\ & & z & - t & = & -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 0 \\ z = -1 + t \\ t = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exemple 9 :

$$(\mathcal{S}_9) : \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ 2x - y + 3z + t = 3 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow_{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{cases} x + 2t = 3 \\ y = 0 \\ z - t = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{K}.$$



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exemple 9 :

$$(\mathcal{S}_9) : \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ 2x - y + 3z + t = 3 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \end{array} \begin{cases} x & & & + 2t = 3 \\ & y & & = 0 \\ & & z - t = -1 \end{cases}$$

D'un point de vue matriciel, $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right).$



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Méthode 3 :

Pour résoudre un système échelonné :

- 1 Par remontée, on élimine avec des opérations élémentaires les inconnues principales dans les lignes où elles ne sont pas en position de pivot.



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Méthode 3 :

Pour résoudre un système échelonné :

- 1 Par remontée, on élimine avec des opérations élémentaires les inconnues principales dans les lignes où elles ne sont pas en position de pivot.
- 2 Si il y a des inconnues secondaires, on les considère comme des paramètres prenant librement toute valeur possible dans \mathbb{K} : on exprime les inconnues principales en fonction des ces paramètres.



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Méthode 3 :

Pour résoudre un système échelonné :

- 1 Par remontée, on élimine avec des opérations élémentaires les inconnues principales dans les lignes où elles ne sont pas en position de pivot.
- 2 Si il y a des inconnues secondaires, on les considère comme des paramètres prenant librement toute valeur possible dans \mathbb{K} : on exprime les inconnues principales en fonction des ces paramètres.
- 3 On rajoute finalement des lignes $x_i = 0 + \dots + 1 \cdot x_i + \dots + 0$ pour les inconnues secondaires.



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Méthode 3 :

L'ensemble de solutions peut alors s'écrire sous la forme de solutions paramétriques :

$$(\mathcal{S}) = \left\{ X_p + t_1 X_1 + t_2 X_2 + \dots + t_j X_j \mid t_1, \dots, t_j \in \mathbb{K} \right\},$$

où $X_p \in \mathbb{K}^n$ est une **solution particulière** de (\mathcal{S}) , X_1, \dots, X_j sont les inconnues secondaires.



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Méthode 3 :

L'ensemble de solutions peut alors s'écrire sous la forme de solutions paramétriques :

$$(\mathcal{S}) = \left\{ X_p + t_1 X_1 + t_2 X_2 + \dots + t_j X_j \mid t_1, \dots, t_j \in \mathbb{K} \right\},$$

où $X_p \in \mathbb{K}^n$ est une **solution particulière** de (\mathcal{S}) , X_1, \dots, X_j sont les inconnues secondaires.

Remarque : Tout vecteur de \mathbb{K}^n de la forme $t_1 X_1 + t_2 X_2 + \dots + t_j X_j$ où $t_1, \dots, t_j \in \mathbb{K}$ est solution du système $(A \mid 0)$ linéaire homogène associé.



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exemple 10 :

$$(\mathcal{S}_{10}) : \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ x + z + t = 3 \\ y + t = -1 \\ x + y + z + t = 2 \end{cases}$$



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exemple 10 :

$$(\mathcal{S}_{10}) : \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ x + z + t = 3 \\ y + t = -1 \\ x + y + z + t = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \\ &L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\ &L_4 \leftarrow L_1 - L_4 \end{aligned}$$



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exemple 10 :

$$(\mathcal{S}_{10}) : \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ x + z + t = 3 \\ x + y + z + t = -1 \\ x + y + z + t = 2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ y + t = -1 \\ y + t = -1 \\ y + t = -1 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 - \frac{1}{2}L_2$
 $L_4 \leftarrow L_1 - L_4$



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exemple 10 :

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{10}) : & \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ x + z + t = 3 \\ x + y + z + t = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ y + t = -1 \\ y + t = -1 \end{cases} \\ \begin{matrix} L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_1 - L_4 \end{matrix} & \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ y + t = -1 \\ y + t = -1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ y + t = -1 \end{cases} \end{aligned}$$



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exemple 10 :

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{10}) : & \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ x + z + t = 3 \\ y + t = -1 \\ x + y + z + t = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ y + t = -1 \\ y + t = -1 \\ y + t = -1 \end{cases} \\ & \begin{matrix} L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_1 - L_4 \end{matrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ y + t = -1 \end{cases} \\ & \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \end{matrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + z + t = 3 \\ y + t = -1 \end{cases} \end{aligned}$$



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exemple 10 :

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{10}) : & \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ x + z + t = 3 \\ y + t = -1 \\ x + y + z + t = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ y + t = -1 \\ y + t = -1 \\ y + t = -1 \end{cases} \\ & \begin{matrix} L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_1 - L_4 \end{matrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ y + t = -1 \end{cases} \\ & \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \end{matrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + z + t = 3 \\ y + t = -1 \end{cases} \end{aligned}$$



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exemple 10 :

$$(\mathcal{S}_{10}) : \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ x + z + t = 3 \\ y + t = -1 \\ x + y + z + t = 2 \end{cases}$$
$$\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + z + t = 3 \\ y + t = -1 \end{cases}$$

D'un point de vue matriciel, $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exemple 10 :

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{10}) : & \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ x + z + t = 3 \\ x + y + z + t = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 & \begin{cases} x + z + t = 3 \\ y + t = -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 3 - z - t \\ y = -1 - t \\ z = z \\ t = t \end{cases} \end{aligned}$$



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exemple 10 :

$$(\mathcal{S}_{10}) : \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ x + z + t = 3 \\ x + y + z + t = -1 \\ x + y + z + t = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - z - t \\ y = -1 - t \\ z = z \\ t = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exemple 10 :

$$(\mathcal{S}_{10}) : \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ x + z + t = 3 \\ x + y + z + t = -1 \\ x + y + z + t = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - z - t \\ y = -1 - t \\ z = z \\ t = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2.$$



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exercice 2 :

Déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire

$$\begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ x + z + t = 3 \\ x + y + z + 2t = 2 \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Méthode 4 :

- 1 Un système linéaire échelonné est compatible si, et seulement si il ne comporte pas de pivot sur la colonne des seconds membres i.e. un coefficient non nul à droite dans la matrice augmentée du système.

Le fait de ne pas avoir de pivot sur la colonne du second membre donne lieu à des conditions de compatibilité. (cf. **exemple (11)**)



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Méthode 4 :

- 1 Un système linéaire échelonné est compatible si, et seulement si il ne comporte pas de pivot sur la colonne des seconds membres i.e. un coefficient non nul à droite dans la matrice augmentée du système.
Le fait de ne pas avoir de pivot sur la colonne du second membre donne lieu à des conditions de compatibilité. (cf. **exemple (11)**)
- 2 Pour un système échelonné compatible, on a l'alternative suivante :



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Méthode 4 :

- 1 Un système linéaire échelonné est compatible si, et seulement si il ne comporte pas de pivot sur la colonne des seconds membres i.e. un coefficient non nul à droite dans la matrice augmentée du système.

Le fait de ne pas avoir de pivot sur la colonne du second membre donne lieu à des conditions de compatibilité. (cf. **exemple (11)**)

- 2 Pour un système échelonné compatible, on a l'alternative suivante :
 - 1 Soit il n'a que des inconnues principales et alors il admet une unique solution.



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Méthode 4 :

- 1 Un système linéaire échelonné est compatible si, et seulement si il ne comporte pas de pivot sur la colonne des seconds membres i.e. un coefficient non nul à droite dans la matrice augmentée du système.

Le fait de ne pas avoir de pivot sur la colonne du second membre donne lieu à des conditions de compatibilité. (cf. **exemple (11)**)

- 2 Pour un système échelonné compatible, on a l'alternative suivante :
 - 1 Soit il n'a que des inconnues principales et alors il admet une unique solution.
 - 2 Soit on peut paramétrer l'ensemble des solutions à l'aide des inconnues secondaires et dans ce cas, il possède une infinité de solutions.



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exemples II :

Soit $a \in \mathbb{K}$.

■ $(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + y + z = 4 \\ y - z = 2 \\ z = a^2 + a - 2 \end{cases}$ dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a^2 + a - 2 \end{array} \right) \text{ est compatible.}$$



II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

Exemples II :

Soit $a \in \mathbb{K}$.

$$\blacksquare (\mathcal{S}) : \begin{cases} x + y + z = 4 \\ y - z = 2 \\ z = a^2 + a - 2 \end{cases} \quad \text{dont la matrice augmentée est}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a^2 + a - 2 \end{array} \right) \text{ est compatible.}$$

$$\blacksquare (\mathcal{S}') : \begin{cases} x + y + z = 4 \\ y - z = 2 \\ 0z = a^2 + a - 2 \end{cases} \quad \text{dont la matrice augmentée est}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 + a - 2 \end{array} \right) \text{ est compatible si, et seulement si } a \in \{-2; 1\}.$$



II. Résolution pratique

2. Point de vue matriciel

Méthode 5 :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice non nulle.

- 1 Quitte à prendre la transposée de A , il existe au moins un coefficient non nul dans la première colonne de A . On peut supposer que c'est a_{11} en multipliant à gauche A par une matrice de permutation si ce n'était pas le cas et en effectuant l'opération

$$L_1 \leftrightarrow L_i.$$

En multipliant par une matrice de dilatation i.e. $L_1 \leftarrow \frac{1}{a_{11}}L_1$, on peut même supposer $a_{11} = 1$.

C'est le premier pivot.

Figure 1 – Algorithme de Gauss-Jordan d'un point de vue matriciel.



II. Résolution pratique

2. Point de vue matriciel

Méthode 5 :

- ② En multipliant à gauche par des matrices de transvection, on annule tous les coefficients de la première colonne à partir de la deuxième ligne par des opérations élémentaires de la forme :

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1.$$

La matrice A est alors transformée en une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & \bullet & \dots & \bullet \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{np} \end{pmatrix}.$$

Figure 1 – Algorithme de Gauss-Jordan d'un point de vue matriciel.

II. Résolution pratique

2. Point de vue matriciel

Méthode 5 :

⑤ Si la matrice $\begin{pmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n2} & \dots & a'_{np} \end{pmatrix}$ n'est pas nulle, on poursuit l'algorithme.

Figure 1 – Algorithme de Gauss-Jordan d'un point de vue matriciel.



II. Résolution pratique

2. Point de vue matriciel

Méthode 5 :

- ④ L'algorithme s'arrête lorsque l'on a atteint la dernière ligne ou lorsque toutes les lignes qui restent sont nulles i.e. la matrice A est alors transformée en une matrice échelonnée (réduite) de la forme :

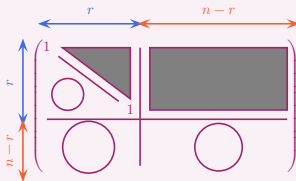


Figure 1 – Algorithme de Gauss-Jordan d'un point de vue matriciel.

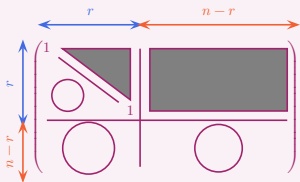


II. Résolution pratique

2. Point de vue matriciel

Méthode 5 :

- ④ L'algorithme s'arrête lorsque l'on a atteint la dernière ligne ou lorsque toutes les lignes qui restent sont nulles i.e. la matrice A est alors transformée en une matrice échelonnée (réduite) de la forme :



Remarque : Les opérations sont les mêmes sur les colonnes en multipliant, cette fois, à droite par les matrices d'opérations élémentaires.

Figure 1 – Algorithme de Gauss-Jordan d'un point de vue matriciel.



II. Résolution pratique

2. Point de vue matriciel

Théorème 5 :

Tout système linéaire est équivalent à un système échelonné réduit.



II. Résolution pratique

2. Point de vue matriciel

Théorème 5 :

Tout système linéaire est équivalent à un système échelonné réduit.

i.e.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, il existe une matrice E , produit de matrices de transformations élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite en lignes R telle que :

$$A = ER.$$



II. Résolution pratique

2. Point de vue matriciel

Théorème 5 :

Tout système linéaire est équivalent à un système échelonné réduit.

i.e.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, il existe une matrice E , produit de matrices de transformations élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite en lignes R telle que :

$$A = ER.$$

Toute matrice A est donc équivalente (par lignes) à une matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \text{rectangle gris} \\ \hline & \text{cercle} \\ \text{cercle} & \text{cercle} \end{array} \right).$$



II. Résolution pratique

2. Point de vue matriciel

Pour plus de commodités et par abus de langage, on étend le vocabulaire des systèmes à la matrice associée :

Définition 6 :

- Une matrice est dite **échelonnée** en lignes si le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne augmente strictement ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste éventuellement plus que des zéros.



II. Résolution pratique

2. Point de vue matriciel

Pour plus de commodités et par abus de langage, on étend le vocabulaire des systèmes à la matrice associée :

Définition 6 :

- Une matrice est dite **échelonnée** en lignes si le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne augmente strictement ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste éventuellement plus que des zéros.
- Le premier coefficient non nul de chaque ligne est appelé **pivot**.



II. Résolution pratique

2. Point de vue matriciel

Pour plus de commodités et par abus de langage, on étend le vocabulaire des systèmes à la matrice associée :

Définition 6 :

- Une matrice est dite **échelonnée** en lignes si le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne augmente strictement ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste éventuellement plus que des zéros.
- Le premier coefficient non nul de chaque ligne est appelé **pivot**.
- Une matrice échelonnée est dite matrice **échelonnée réduite**, ou matrice canonique en lignes, si les pivots valent 1 et si les autres coefficients dans les colonnes des pivots sont nuls.



II. Résolution pratique

2. Point de vue matriciel

Définition 7 (Rang d'une matrice) :

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle **rang** d'une matrice, le nombre de lignes (**resp.** colonnes) non nulles dans sa forme échelonnées en lignes (**resp.** en colonnes).



II. Résolution pratique

2. Point de vue matriciel

Définition 7 (Rang d'une matrice) :

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle **rang** d'une matrice, le nombre de lignes (**resp.** colonnes) non nulles dans sa forme échelonnées en lignes (**resp.** en colonnes).

Remarques :

- Le rang n'étant pas changé par le produit de matrices d'opérations élémentaires, lorsqu'il ne s'agit que de trouver le rang d'une matrice et non son inverse, on peut effectuer des opérations sur les lignes et sur les colonnes en même temps.



II. Résolution pratique

2. Point de vue matriciel

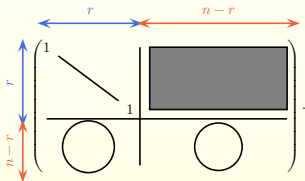
Définition 7 (Rang d'une matrice) :

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle **rang** d'une matrice, le nombre de lignes (resp. colonnes) non nulles dans sa forme échelonnée en lignes (resp. en colonnes).

Remarques :

- L'algorithme de la **méthode (5)** en « remontant », on montre ainsi que toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut être transformée en une matrice échelonnée réduite où le rang r est clairement lisible :



II. Résolution pratique

3. Opérations élémentaires et matrices inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Effectuer des opérations élémentaires sur A , on l'a vu, revient à la multiplier par des matrices inversibles, et si A est elle-même inversible, le résultat de ces multiplications sera toujours une matrice inversible. Si donc à un moment on obtient une matrice NON inversible en cours de calcul, c'est le signe certain que A N'était PAS inversible.



II. Résolution pratique

3. Opérations élémentaires et matrices inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- À présent, faisons l'hypothèse que nous avons réussi à transformer A en I_n par des opérations élémentaires E_1, \dots, E_r sur les LIGNES, dans cet ordre.



II. Résolution pratique

3. Opérations élémentaires et matrices inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- À présent, faisons l'hypothèse que nous avons réussi à transformer A en I_n par des opérations élémentaires E_1, \dots, E_r sur les LIGNES, dans cet ordre. Matriciellement, cela revient à dire que : $E_r \dots E_1 A = I_n$!! **multiplications à GAUCHE !!** ou encore que A est inversible de matrice inverse $E_r \dots E_1 = A^{-1}$.



II. Résolution pratique

3. Opérations élémentaires et matrices inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- À présent, faisons l'hypothèse que nous avons réussi à transformer A en I_n par des opérations élémentaires E_1, \dots, E_r sur les LIGNES, dans cet ordre. Matriciellement, cela revient à dire que : $E_r \dots E_1 A = I_n$!! **multiplications à GAUCHE !!** ou encore que A est inversible de matrice inverse $E_r \dots E_1 = A^{-1}$.
Conclusion inattendue, l'égalité précédente peut aussi s'écrire trivialement

$$E_r \dots E_1 I_n = A^{-1}.$$



II. Résolution pratique

3. Opérations élémentaires et matrices inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- À présent, faisons l'hypothèse que nous avons réussi à transformer A en I_n par des opérations élémentaires E_1, \dots, E_r sur les LIGNES, dans cet ordre. Matriciellement, cela revient à dire que : $E_r \dots E_1 A = I_n$!! **multiplications à GAUCHE !!** ou encore que A est inversible de matrice inverse $E_r \dots E_1 = A^{-1}$.

Conclusion inattendue, l'égalité précédente peut aussi s'écrire trivialement

$$E_r \dots E_1 I_n = A^{-1}.$$

Les mêmes opérations qui ont transformé A en I_n permettent de transformer I_n en A^{-1} . Ceci nous fournit un algorithme pratique d'échelonnement/réduction ou d'inversion suivant les cas (*confer exemple (??)*).



II. Résolution pratique

3. Opérations élémentaires et matrices inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- À présent, faisons l'hypothèse que nous avons réussi à transformer A en I_n par des opérations élémentaires E_1, \dots, E_r sur les LIGNES, dans cet ordre. Matriciellement, cela revient à dire que : $E_r \dots E_1 A = I_n$!! **multiplications à GAUCHE !!** ou encore que A est inversible de matrice inverse $E_r \dots E_1 = A^{-1}$.

Conclusion inattendue, l'égalité précédente peut aussi s'écrire trivialement

$$E_r \dots E_1 I_n = A^{-1}.$$

Je rappelle encore ici que le produit matriciel N'est PAS commutatif donc on ne peut s'amuser à travailler sur les lignes qui correspond à un produit à gauche puis ou et sur les colonnes ce qui correspond à un produit à droite.

ATTENTION

Moralité : lorsque que vous commencerez avec des opérations sur les lignes, vous ne manipulerez plus que les lignes jusqu'à l'obtention de l'inverse et idem pour les colonnes au risque de trouver une matrice qui n'aura rien à voir avec l'inverse recherchée.



II. Résolution pratique

3. Opérations élémentaires et matrices inversibles

Exemple 12 :

Montrons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et donnons son inverse.

On applique simultanément l'algorithme de Gauss à notre matrice A et à la matrice identité :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^A$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_3}$$



II. Résolution pratique

3. Opérations élémentaires et matrices inversibles

Exemple 12 :

Montrons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et donnons son inverse.

On applique simultanément l'algorithme de Gauss à notre matrice A et à la matrice identité :

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^A & & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_3} \\ & \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} & \\ & \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array} & \\ & \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

II. Résolution pratique

3. Opérations élémentaires et matrices inversibles

Exemple 12 :

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$



II. Résolution pratique

3. Opérations élémentaires et matrices inversibles

Exemple 12 :

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$
 $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$



II. Résolution pratique

3. Opérations élémentaires et matrices inversibles

Exemple 12 :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

The diagram illustrates the row operation $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$ applied to the identity matrix I_3 . The operation is shown by a blue arrow pointing from the second row of I_3 to the first row of A^{-1} . The resulting matrix A^{-1} is shown in purple.



II. Résolution pratique

3. Opérations élémentaires et matrices inversibles

Exemple 12 :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I_3

Transformation de A en I_3 par des opérations élémentaires sur les lignes

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_3}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

A^{-1}

Transformation de I_3 en A^{-1} par report des opérations élémentaires qui ont changé A en I_3 .

II. Résolution pratique

3. Opérations élémentaires et matrices inversibles

Exemple 12 :

Donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.



II. Résolution pratique

3. Opérations élémentaires et matrices inversibles

Exercice 3 :

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.



III. Ensemble des solutions

- 1 Systèmes linéaires et matrices
- 2 Résolution pratique
- 3 Ensemble des solutions**
 - Linéarité et conséquences
 - Rang d'un système linéaire
- 4 Systèmes linéaires et matrices inversibles



III. Ensemble des solutions

1. Linéarité et conséquences

Résoudre (\mathcal{S}) c'est déterminer les antécédents de B pour l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} : & \mathbb{K}^n & \longmapsto & \mathbb{K}^m \\ & X & & AX \end{array}$$



III. Ensemble des solutions

1. Linéarité et conséquences

Résoudre (\mathcal{S}) c'est déterminer les antécédents de B pour l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} : & \mathbb{K}^n & \longmapsto & \mathbb{K}^m \\ & X & & AX \end{array}$$

En particulier, $(\mathcal{S}_0) = \mathcal{A}^{-1}((0)_{\mathbb{K}^m})$.



III. Ensemble des solutions

1. Linéarité et conséquences

Résoudre (\mathcal{S}) c'est déterminer les antécédents de B pour l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} : & \mathbb{K}^n & \longmapsto & \mathbb{K}^m \\ & X & & AX \end{array}$$

En particulier, $(\mathcal{S}_0) = \mathcal{A}^{-1}((0)_{\mathbb{K}^m})$.

Par distributivité à droite du produit matriciel, l'application \mathcal{A} vérifie

$$\forall X, X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \mathcal{A}(\lambda X + X') = \lambda \mathcal{A}(X) + \mathcal{A}(X').$$



III. Ensemble des solutions

1. Linéarité et conséquences

Résoudre (\mathcal{S}) c'est déterminer les antécédents de B pour l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} : & \mathbb{K}^n & \longmapsto & \mathbb{K}^m \\ & X & & AX \end{array}$$

En particulier, $(\mathcal{S}_0) = \mathcal{A}^{-1}((0)_{\mathbb{K}^m})$.

Par distributivité à droite du produit matriciel, l'application \mathcal{A} vérifie

$$\forall X, X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \mathcal{A}(\lambda X + X') = \lambda \mathcal{A}(X) + \mathcal{A}(X').$$

L'application \mathcal{A} est **linéaire** et le principe de superposition s'applique.

Proposition 6 (Principe de superposition) :

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Si X_1 est solution de $AX = B_1$ et X_2 de $AX = B_2$, alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ est solution de $AX = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$.

III. Ensemble des solutions

1. Linéarité et conséquences

Théorème 7 (Structure de l'ensemble des solutions) :

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^m$. On considère le système linéaire (\mathcal{S}) sous sa forme matricielle $AX = B$ où $X \in \mathbb{K}^n$ et (\mathcal{S}_0) son système homogène associé.

- ④ (\mathcal{S}_0) est non vide et stable par combinaisons linéaires. C'est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n .

Vocabulaire : On dit que l'ensemble des solutions du système (\mathcal{S}) est un espace affine dirigé par l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.



III. Ensemble des solutions

1. Linéarité et conséquences

Théorème 7 (Structure de l'ensemble des solutions) :

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^m$. On considère le système linéaire (\mathcal{S}) sous sa forme matricielle $AX = B$ où $X \in \mathbb{K}^n$ et (\mathcal{S}_0) son système homogène associé.

- ① (\mathcal{S}_0) est non vide et stable par combinaisons linéaires. C'est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n .
- ② Si (\mathcal{S}) est compatible, la solution générale du système est la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène :

$$\begin{array}{rcccl} \text{Solution} & & \text{Solution} & & \text{Solution de l'équation} \\ \text{générale} & = & \text{particulière} & + & \text{homogène.} \\ (\mathcal{S}) & = & X_p & + & (\mathcal{S}_0). \end{array}$$

Vocabulaire : On dit que l'ensemble des solutions du système (\mathcal{S}) est un espace affine dirigé par l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.



III. Ensemble des solutions

1. Linéarité et conséquences

Exemple 13 :

Soit le système (S_{13}) :
$$\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 5y + z = 4 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$
 d'inconnue $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$.

III. Ensemble des solutions

1. Linéarité et conséquences

Exemple 13 :

$$\text{Soit le système } (\mathcal{S}_{13}) : \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 5y + z = 4 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \text{ d'inconnue } (x; y; z) \in \mathbb{R}^3.$$

$$(\mathcal{S}_{13}) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ y + 3z = 10 \\ y - 2z = -5 \end{cases} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

III. Ensemble des solutions

1. Linéarité et conséquences

Exemple 13 :

$$\text{Soit le système } (\mathcal{S}_{13}) : \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 5y + z = 4 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \text{ d'inconnue } (x; y; z) \in \mathbb{R}^3.$$

$$(\mathcal{S}_{13}) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ y + 3z = 10 \\ y - 2z = -5 \end{cases} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ y + 3z = 10 \\ 5z = 15 \end{cases} L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

III. Ensemble des solutions

1. Linéarité et conséquences

Exemple 13 :

$$\text{Soit le système } (\mathcal{S}_{13}) : \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 5y + z = 4 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \text{ d'inconnue } (x; y; z) \in \mathbb{R}^3.$$

$$(\mathcal{S}_{13}) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ y + 3z = 10 \\ y - 2z = -5 \end{cases} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ y + 3z = 10 \\ 5z = 15 \end{cases} L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

III. Ensemble des solutions

1. Linéarité et conséquences

Exemple 13 :

$$\text{Soit le système } (\mathcal{S}_{13}) : \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 5y + z = 4 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \text{ d'inconnue } (x; y; z) \in \mathbb{R}^3.$$

$$(\mathcal{S}_{13}) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ y + 3z = 10 \\ y - 2z = -5 \end{cases} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ y + 3z = 10 \\ 5z = 15 \end{cases} L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

L'unique solution de (\mathcal{S}_{13}) est donc le triplet $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

III. Ensemble des solutions

1. Linéarité et conséquences

Exemple 13 :

$$\text{Soit le système } (\mathcal{S}_{13}) : \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 5y + z = 4 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \text{ d'inconnue } (x; y; z) \in \mathbb{R}^3.$$

$$(\mathcal{S}_{13}) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ y + 3z = 10 \\ y - 2z = -5 \end{cases} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ y + 3z = 10 \\ 5z = 15 \end{cases} L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

L'unique solution de (\mathcal{S}_{13}) est donc le triplet $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (0)_{\mathbb{R}^3}$.

Solution
particulière

Solution
homogène

III. Ensemble des solutions

1. Linéarité et conséquences

Exemple 14 :

Enlevons une équation au système précédent. La résolution est identique :

$$(\mathcal{S}_{14}) : \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 5y + z = 4 \end{cases}$$

III. Ensemble des solutions

1. Linéarité et conséquences

Exemple 14 :

$$(\mathcal{S}_{14}) : \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 5y + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ y + 3z = 10 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

III. Ensemble des solutions

1. Linéarité et conséquences

Exemple 14 :

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{14}) : \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 5y + z = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ y + 3z = 10 \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -23 + 7z \\ y = 10 - 3z \\ z = z \end{cases} \end{aligned}$$

III. Ensemble des solutions

1. Linéarité et conséquences

Exemple 14 :

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{14}) : \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 5y + z = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ y + 3z = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -23 + 7z \\ y = 10 - 3z \\ z = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -23 + 7z \\ y = 10 - 3z \\ z = z \end{cases} . \end{aligned}$$

III. Ensemble des solutions

1. Linéarité et conséquences

Exemple 14 :

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{14}) : \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 5y + z = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ y + 3z = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -23 + 7z \\ y = 10 - 3z \\ z = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -23 + 7z \\ y = 10 - 3z \\ z = z \end{cases} . \end{aligned}$$

Remarque : Les inconnues x et y sont les inconnues **principales** et l'inconnue z est l'inconnue **secondaire**.

III. Ensemble des solutions

1. Linéarité et conséquences

Exemple 14 :

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}_{14}) : \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 5y + z = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ y + 3z = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -23 + 7z \\ y = 10 - 3z \\ z = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -23 + 7z \\ y = 10 - 3z \\ z = z \end{cases} .\end{aligned}$$

Remarque : Les inconnues x et y sont les inconnues **principales** et l'inconnue z est l'inconnue **secondaire**.

Les solutions de (\mathcal{S}_{14}) sont donc tous les triplets $\begin{pmatrix} -23 + 7\lambda \\ 10 - 3\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{v}} \text{ où}$

$\lambda \in \mathbb{R}$.

III. Ensemble des solutions

1. Linéarité et conséquences

Exemple 14 :

$$(\mathcal{S}_{14}) : \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 5y + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -23 + 7z \\ y = 10 - 3z \\ z = z \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -23 + 7z \\ y = 10 - 3z \\ z = z \end{cases} .$$

Remarque : Les inconnues x et y sont les inconnues **principales** et l'inconnue z est l'inconnue **secondaire**.

Les solutions de (\mathcal{S}_{14}) sont donc tous les triplets $\begin{pmatrix} -23 + 7\lambda \\ 10 - 3\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ où

$\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution
particulière

Solution
homogène

III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Définition 8 (Rang d'un système linéaire) :

On appelle **rang** d'un système linéaire, le nombre de ses inconnues principales.

Exemples 15 :

- (\mathcal{S}_3) est de rang 3.

$$(\mathcal{S}_3) : \begin{cases} x + 3y - z & = & -6 \\ -y + 3z & = & 16 \\ z & = & 5 \end{cases}$$



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Définition 8 (Rang d'un système linéaire) :

On appelle **rang** d'un système linéaire, le nombre de ses inconnues principales.

Exemples 15 :

■ (\mathcal{S}_3) est de rang 3.

■ (\mathcal{S}_{13}) est de rang 3.

$$(\mathcal{S}_{13}) : \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ y + 3z = 10 \\ 5z = 15 \end{cases}$$



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Définition 8 (Rang d'un système linéaire) :

On appelle **rang** d'un système linéaire, le nombre de ses inconnues principales.

Exemples 15 :

■ (\mathcal{S}_3) est de rang 3.

■ (\mathcal{S}_{13}) est de rang 3.

■ (\mathcal{S}_{14}) est de rang 2.

$$(\mathcal{S}_{14}) : \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ y + 3z = 10 \end{cases}$$



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Définition 8 (Rang d'un système linéaire) :

On appelle **rang** d'un système linéaire, le nombre de ses inconnues principales.

Exemples 15 :

- (\mathcal{S}_3) est de rang 3.
- (\mathcal{S}_{13}) est de rang 3.
- (\mathcal{S}_{14}) est de rang 2.

Le **théorème (5)** a immédiatement une conséquence importante :

Corollaire 7.4 :

Le rang d'un système linéaire est égal au nombre de ses pivots après échelonnement.



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Définition 8 (Rang d'un système linéaire) :

On appelle **rang** d'un système linéaire, le nombre de ses inconnues principales.

Exemples 15 :

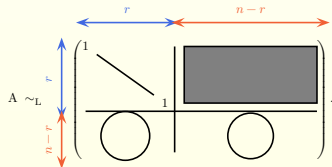
■ (S_3) est de rang 3.

■ (S_{13}) est de rang 3.

■ (S_{14}) est de rang 2.

Corollaire 1.5 :

Le rang d'un système linéaire est égal au nombre de ses pivots après échelonnement.



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Exemples 16 (Systèmes échelonnés) :

En reprenant les systèmes de l'exemple (7) on a :

① Rang 3.

② Rang 2.

③ Rang 1.

④ Rang 4.

⑤ Rang 4.



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Exemple 17 :

Supprimons encore une équation à (\mathcal{S}_{14}) pour former (\mathcal{S}_{17}) :

$$(\mathcal{S}_{17}) : \{ x + 2y - z = -3$$



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Exemple 17 :

Supprimons encore une équation à (\mathcal{S}_{14}) pour former (\mathcal{S}_{17}) :

$$(\mathcal{S}_{17}) : \{ x + 2y - z = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 2y + z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Exemple 17 :

Supprimons encore une équation à (S_{14}) pour former (S_{17}) :

$$(S_{17}) : \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ x + y - z = -3 \\ x + y - z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 2y + z \\ y = \\ z = \end{cases}$$

Les solutions de (S_{17}) sont donc tous les triplets de la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Exemple 17 :

Supprimons encore une équation à (\mathcal{S}_{14}) pour former (\mathcal{S}_{17}) :

$$(\mathcal{S}_{17}) : \{ x + 2y - z = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 2y + z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

Les solutions de (\mathcal{S}_{17}) sont donc tous les triplets de la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Solution
particulière

Solution
homogène



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Exemple 17 :

Supprimons encore une équation à (\mathcal{S}_{14}) pour former (\mathcal{S}_{17}) :

$$(\mathcal{S}_{17}) : \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ y = y \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 2y + z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

Les solutions de (\mathcal{S}_{17}) sont donc tous les triplets de la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Solution
particulière

Solution
homogène

x est la seule inconnue principale donc le système (\mathcal{S}_{17}) est de rang 1.



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Exemple 17 :

Supprimons encore une équation à (\mathcal{S}_{14}) pour former (\mathcal{S}_{17}) :

$$(\mathcal{S}_{17}) : \{ x + 2y - z = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 2y + z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

Les solutions de (\mathcal{S}_{17}) sont donc tous les triplets de la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Solution
particulière

Solution
homogène

x est la seule inconnue principale donc le système (\mathcal{S}_{17}) est de rang 1.

Remarque : On aurait tout aussi bien pu choisir y ou z comme inconnue principale.



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Définition 9 (Espace vectoriel engendré par une partie) :

Soient $X_1, \dots, X_r \in \mathbb{K}^n$.

L'ensemble des combinaisons linéaires de X_1, \dots, X_r est noté $\text{vect}(X_1, \dots, X_r)$:

$$\text{Vect}(X_1, \dots, X_r) = \left\{ \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_r X_r \right\}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}}$$



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Exemples 18 :

En reprenant les exemples précédents :

■ Les solutions de (\mathcal{S}_{10}) s'écrivent $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Exemples 18 :

En reprenant les exemples précédents :

■ Les solutions de (\mathcal{S}_{10}) s'écrivent $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

■ Les solutions de (\mathcal{S}_9) s'écrivent $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Exemples 18 :

En reprenant les exemples précédents :

- Les solutions de (\mathcal{S}_{14}) s'écrivent $\begin{pmatrix} -23 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Exemples 18 :

En reprenant les exemples précédents :

■ Les solutions de (\mathcal{S}_{14}) s'écrivent $\begin{pmatrix} -23 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

■ Les solutions de (\mathcal{S}_{17}) s'écrivent $\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Définition 10 (Notion de dimension d'un SEV) :

On appelle **dimension** de l'ensemble $E = \text{vect}(X_1, \dots, X_r)$, notée $\dim(E)$, le nombre de vecteurs indépendants de E .



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Définition 10 (Notion de dimension d'un SEV) :

On appelle **dimension** de l'ensemble $E = \text{vect}(X_1, \dots, X_r)$, notée $\dim(E)$, le nombre de vecteurs indépendants de E .

Remarque : La dimension d'un vect n'est pas forcément égale au nombre de ses vecteurs.



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Définition 10 (Notion de dimension d'un SEV) :

On appelle **dimension** de l'ensemble $E = \text{vect}(X_1, \dots, X_r)$, notée $\dim(E)$, le nombre de vecteurs indépendants de E .

Remarque : La dimension d'un vect n'est pas forcément égale au nombre de ses vecteurs.

Exemples 19 :

- Deux vecteurs sont indépendants si, et seulement si ils ne sont pas colinéaires.



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Définition 10 (Notion de dimension d'un SEV) :

On appelle **dimension** de l'ensemble $E = \text{vect}(X_1, \dots, X_r)$, notée $\dim(E)$, le nombre de vecteurs indépendants de E .

Remarque : La dimension d'un vect n'est pas forcément égale au nombre de ses vecteurs.

Exemples 19 :

- Deux vecteurs sont indépendants si, et seulement si ils ne sont pas colinéaires.
- Trois vecteurs le sont s'ils ne sont pas coplanaires.



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Exemples 20 (Dimension de sev dans \mathbb{R}^2) :

- $A = \text{vect}((2;3)) = \{(2x;3x)\}_{x \in \mathbb{R}}$. C'est la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x$.

$$\dim(A) = 1.$$



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Exemples 20 (Dimension de sev dans \mathbb{R}^2) :

- $A = \text{vect}((2;3)) = \{(2x;3x)\}_{x \in \mathbb{R}}$. C'est la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x$.

$$\dim(A) = 1.$$

- $B = \text{vect}((1;0), (0;1)) = \{x(1;0) + y(0;1)\}_{x,y \in \mathbb{R}} = \{(x;y)\}_{x,y \in \mathbb{R}}$.

C'est le plan (xOy) et $\dim(B) = 2$.



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Exemples 20 (Dimension de sev dans \mathbb{R}^2) :

■ $A = \text{vect}((2;3)) = \{(2x;3x)\}_{x \in \mathbb{R}}$. C'est la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x$.

$$\dim(A) = 1.$$

■ $B = \text{vect}((1;0), (0;1)) = \{x(1;0) + y(0;1)\}_{x,y \in \mathbb{R}} = \{(x;y)\}_{x,y \in \mathbb{R}}$.

C'est le plan (xOy) et $\dim(B) = 2$.

■ $C = \{(2 + 2x; 1 + y - x)\}_{x,y \in \mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 + 2x \\ 1 - x + y \end{pmatrix} \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}_{x,y \in \mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

C'est le plan passant par le point $(2;1)$ et dirigé par les deux vecteurs

indépendants $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i.e. c'est le plan \mathbb{R}^2 lui-même et $\dim(C) = 2$.



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Exemples 21 (Dimension de sev dans \mathbb{R}^3) :

- Soit D le plan passant par l'origine du repère et dirigé par les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \dim(D) = 2 \text{ et on a :}$$

$$D = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}_{\lambda, \mu \in \mathbb{R}} = \{(\lambda + \mu; 2\lambda; \mu)\}_{\lambda, \mu \in \mathbb{R}}.$$

Remarque : $2x = y + 2z$ donc D est aussi le plan d'équation $2x - y - 2z = 0$.



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Exemples 21 (Dimension de sev dans \mathbb{R}^3) :

$$\begin{aligned} \blacksquare E = \{(x + y - z; 2x - y; 3y + z)\}_{x, y, z \in \mathbb{R}} &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}_{x, y, z \in \mathbb{R}} \\ &= \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Les trois vecteurs étant indépendants, c'est l'espace \mathbb{R}^3 lui-même : $\dim(E) = 3$.

III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Exemples 21 (Dimension de sev dans \mathbb{R}^3) :

$$\begin{aligned} \blacksquare E = \{(x + y - z; 2x - y; 3y + z)\}_{x, y, z \in \mathbb{R}} &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}_{x, y, z \in \mathbb{R}} \\ &= \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Les trois vecteurs étant indépendants, c'est l'espace \mathbb{R}^3 lui-même : $\dim(E) = 3$.

$$\begin{aligned} \blacksquare F = \{(3 + x; 3x + 7; 1 + 2x)\}_{x \in \mathbb{R}} &= \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}_{x \in \mathbb{R}} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

(1)

III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

La notation $\text{vect}()$ permet une expression agréable de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Théorème 8 (Rang d'un système) :

Le rang d'un système linéaire est égal au nombre d'inconnues retranché de la dimension de l'ensemble des solutions du système homogène associé.



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

La notation $\text{vect}(\)$ permet une expression agréable de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Théorème 8 (Rang d'un système) :

Le rang d'un système linéaire est égal au nombre d'inconnues retranché de la dimension de l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Exemples 22 :

Notons \mathcal{H}_0 , l'espace vectoriel des solutions du système homogène associé à (\mathcal{S}) .

- À l'exemple (13), $\dim \mathcal{H}_0 = 0$ d'où $\text{rg } \mathcal{S}_3 = 3 - 0 = 3$.



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

La notation $\text{vect}()$ permet une expression agréable de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Théorème 8 (Rang d'un système) :

Le rang d'un système linéaire est égal au nombre d'inconnues retranché de la dimension de l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Exemples 22 :

Notons \mathcal{H}_0 , l'espace vectoriel des solutions du système homogène associé à (\mathcal{S}) .

- À l'exemple (13) , $\dim \mathcal{H}_0 = 0$ d'où $\text{rg } \mathcal{S}_3 = 3 - 0 = 3$.
- À l'exemple (14) , $\dim \mathcal{H}_0 = 1$ d'où $\text{rg } \mathcal{S}_2 = 3 - 1 = 2$.



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

La notation $\text{vect}()$ permet une expression agréable de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Théorème 8 (Rang d'un système) :

Le rang d'un système linéaire est égal au nombre d'inconnues retranché de la dimension de l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Exemples 22 :

Notons \mathcal{H}_0 , l'espace vectoriel des solutions du système homogène associé à (\mathcal{S}) .

- À l'exemple (13) , $\dim \mathcal{H}_0 = 0$ d'où $\text{rg } \mathcal{S}_3 = 3 - 0 = 3$.
- À l'exemple (14) , $\dim \mathcal{H}_0 = 1$ d'où $\text{rg } \mathcal{S}_2 = 3 - 1 = 2$.
- À l'exemple (17) , $\dim \mathcal{H}_0 = 2$ d'où $\text{rg } \mathcal{S}_1 = 3 - 2 = 1$.



III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

Exercice 4 :

Résoudre et discuter le système suivant d'inconnue (x, y, z) et de paramètre a :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

- 1 Systèmes linéaires et matrices
- 2 Résolution pratique
- 3 Ensemble des solutions
- 4 Systèmes linéaires et matrices inversibles**
 - Systèmes de Cramer
 - Inversibilité



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

1. Systèmes de Cramer

Définition II (Système de Cramer) :

Un système linéaire est dit de **Cramer** si sa matrice est inversible.

En particulier, un système de Cramer est nécessairement carré : autant d'inconnues que d'équations.



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

1. Systèmes de Cramer

Définition II (Système de Cramer) :

Un système linéaire est dit de **Cramer** si sa matrice est inversible.

En particulier, un système de Cramer est nécessairement carré : autant d'inconnues que d'équations.

Théorème 9 :

Tout système de Cramer $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une unique solution :

$$X = A^{-1}B.$$



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Le théorème qui suit fait définitivement le lien entre inversibilité d'une matrice et la résolubilité des systèmes linéaires.

Théorème 10 (Matrices inversibles et systèmes linéaires) :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La matrice A est inversible si, et seulement si $\forall Y \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire $Y = AX$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une unique solution.



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

On peut être un peu plus explicite :

Corollaire IOI :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ❶ $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Corollaire 10.3 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ① $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.
- ② $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Corollaire 10.5 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ① $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.
- ② $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.
- ③ $\text{rg}(A) = n$.



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Corollaire 10.1 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ① $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.
- ② $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.
- ③ $\text{rg}(A) = n$.



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Corollaire 10.9 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ① $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.
- ② $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.
- ③ $\text{rg}(A) = n$.
- ④ $A \sim_L I_n$.



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Corollaire 10.11 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1 $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.
- 2 $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.
- 3 $\text{rg}(A) = n$.
- 4 $A \sim_L I_n$.
- 6 A est inversible.



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Corollaire 10.13 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ① $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.
- ② $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.
- ③ $\text{rg}(A) = n$.
- ④ $A \sim_L I_n$.
- ⑤ A est inversible.
- ⑥ Le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle.



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Corollaire IOIS :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1 $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.
- 2 $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.
- 3 $\text{rg}(A) = n$.
- 4 $A \sim_L I_n$.
- 5 A est inversible.
- 6 Le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle.



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Corollaire 10.17 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1 $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.
- 2 $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.
- 3 $\text{rg}(A) = n$.
- 4 $A \sim_L I_n$.
- 5 A est inversible.
- 6 Le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle.

On retrouve un résultat démontré dans un chapitre précédent :

Corollaire 10.18 (Inversibilité des matrices triangulaires et diagonales) :

Une matrice triangulaire (ou diagonale) est inversible si, et seulement si ses coefficients diagonaux sont **tous** non nuls.

IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Ce théorème va donc nous permettre à la fois de savoir si oui ou non une matrice est inversible et, le cas échéant, de calculer son inverse. Le mot d'ordre est simple : résoudre un système linéaire !



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Exemple 23 :

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Exemple 23 :

En effet, pour tous $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Exemple 23 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = a \\ x + y + 2z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$$



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Exemple 23 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = a \\ x + y + 2z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$$
$$L_2 \leftrightarrow L_1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{choix d'un pivot} \\ \text{simple de valeur 1} \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = b \\ 2x + 3y + z = a \\ x + y + z = c \end{cases}$$



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Exemple 23 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = a \\ x + y + 2z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$$

$$L_2 \leftrightarrow L_1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{choix d'un pivot} \\ \text{simple de valeur 1} \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = b \\ 2x + 3y + z = a \\ x + y + z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = b \\ y - 3z = a - 2b \\ z = b - c \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Exemple 23 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = a \\ x + y + 2z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$$

$$L_2 \leftrightarrow L_1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{choix d'un pivot} \\ \text{simple de valeur 1} \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = b \\ 2x + 3y + z = a \\ x + y + z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = b \\ y - 3z = a - 2b \\ z = b - c \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -b + 2c \\ y = a + b - 3c \\ z = b - c \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \end{array}$$



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Exemple 23 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = a \\ x + y + 2z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$$

$$L_2 \leftrightarrow L_1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{choix d'un pivot} \\ \text{simple de valeur 1} \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = b \\ 2x + 3y + z = a \\ x + y + z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = b \\ y - 3z = a - 2b \\ z = b - c \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -b + 2c \\ y = a + b - 3c \\ z = b - c \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -a - 2b + 5c \\ y = a + b - 3c \\ z = b - c \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Exemple 23 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = a \\ x + y + 2z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$$

$$L_2 \leftrightarrow L_1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{choix d'un pivot} \\ \text{simple de valeur 1} \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = b \\ 2x + 3y + z = a \\ x + y + z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = b \\ y - 3z = a - 2b \\ z = b - c \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -b + 2c \\ y = a + b - 3c \\ z = b - c \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -a - 2b + 5c \\ y = a + b - 3c \\ z = b - c \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Exemple 23 :

En effet, pour tous $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Exemple 23 :

En effet, pour tous $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Nous avons ainsi réussi à résoudre le système linéaire initial pour TOUT second membre (a, b, c) . Cela prouve que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Exemple 23 :

En effet, pour tous $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Nous avons ainsi réussi à résoudre le système linéaire initial pour TOUT second membre (a, b, c) . Cela prouve que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

Son inverse $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ apparaît naturellement en fin de résolution.



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Méthode 6 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comment déterminer l'inversibilité de A et calculer son inverse éventuel ?

Par résolution du système $AX = Y$ pour tout second membre Y : On pose

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ et on résout } AX = Y \text{ d'inconnue}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ avec la méthode du pivot.}$$

IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Méthode 6 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comment déterminer l'inversibilité de A et calculer son inverse éventuel ?

Par résolution du système $AX = Y$ pour tout second membre Y : On pose

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ et on résout } AX = Y \text{ d'inconnue}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ avec la méthode du pivot.}$$

- ❶ Si y a une solution, on l'écrit matriciellement comme $X = BY$: on a alors $B = A^{-1}$.

IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Méthode 6 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comment déterminer l'inversibilité de A et calculer son inverse éventuel ?

Par résolution du système $AX = Y$ pour tout second membre Y : On pose

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ et on résout } AX = Y \text{ d'inconnue}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ avec la méthode du pivot.}$$

- 1 Si y a une solution, on l'écrit matriciellement comme $X = BY$: on a alors $B = A^{-1}$.
- 2 Si le système $AX = Y$ n'est pas compatible pour au moins un Y , alors A n'est pas inversible.

IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Méthode 6 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comment déterminer l'inversibilité de A et calculer son inverse éventuel ?

Par la méthode du pivot sur la matrice concaténée $(A \mid \mathbf{I}_n)$: On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice concaténée $(A \mid \mathbf{I}_n)$ selon la méthode du pivot afin d'échelonner A : on aboutit à une matrice du type $(A' \mid *)$ avec A' échelonnée.

IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Méthode 6 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comment déterminer l'inversibilité de A et calculer son inverse éventuel ?

Par la méthode du pivot sur la matrice concaténée $(A \mid \mathbf{I}_n)$: On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice concaténée $(A \mid \mathbf{I}_n)$ selon la méthode du pivot afin d'échelonner A : on aboutit à une matrice du type $(A' \mid *)$ avec A' échelonnée.

- ❶ Si A' a strictement moins de n pivots, alors A n'est pas inversible.

IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Méthode 6 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comment déterminer l'inversibilité de A et calculer son inverse éventuel ?

Par la méthode du pivot sur la matrice concaténée $(A \mid \mathbf{I}_n)$: On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice concaténée $(A \mid \mathbf{I}_n)$ selon la méthode du pivot afin d'échelonner A : on aboutit à une matrice du type $(A' \mid *)$ avec A' échelonnée.

- ❶ Si A' a strictement moins de n pivots, alors A n'est pas inversible.
- ❷ Si A' a n pivots, alors A est inversible. On réduit alors A' par opérations élémentaires, pour obtenir une matrice équivalente par lignes $(\mathbf{I}_n \mid B)$.
On conclut alors que $A^{-1} = B$.

IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Exercice 5 :

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et donner son inverse.



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Exercice 5 :

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et donner son inverse.

Correction :

Soient $(x; y; z)$ et $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$.

On applique les deux méthodes en parallèles :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}^A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Correction :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}^A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^A$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} x + 3y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ -x + 4y + 5z = c \end{cases}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_3}$$



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Correction :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}^A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ -x + 4y + 5z = c \end{cases} \quad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_3}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = a \\ y - z = a - b \\ y = a - b - c \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Correction :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}^A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^A \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ -x + 4y + 5z = c \end{cases} \quad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_3} \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = a \\ y - z = a - b \\ y = a - c \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array} \quad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = a \\ y - z = a - b \\ z = b - c \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \quad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}} \end{array}$$



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Correction :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}^A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^A \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ -x + 4y + 5z = c \end{cases} \\ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^A \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = a \\ y - z = a - b \\ y = a - b - c \end{cases} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array} \\ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^A \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = a \\ y - z = a - b \\ z = b - c \end{cases} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \\ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^A \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = a - b + c \\ y = a - c \\ z = b - c \end{cases} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} \end{array}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Correction :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}^A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^A \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ -x + 4y + 5z = c \end{cases} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_3} \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = a \\ y - z = a - b \\ y = a - c \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = a \\ y - z = a - b \\ z = b - c \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = a - b + c \\ y = a - c \\ z = b - c \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2a - b + 4c \\ y = a - c \\ z = b - c \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \end{array}$$

IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Correction :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}^A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^A$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ -x + 4y + 5z = c \end{cases}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_3}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & & & = & -2a & - & b & + & 4c \\ & y & & = & a & & & - & c \\ & & z & = & & b & - & & c \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}^{A^{-1}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Correction :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}^A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^A$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ -x + 4y + 5z = c \end{cases}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2a - b + 4c \\ y = a - c \\ z = b - c \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_3}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}^{A^{-1}}$$

Transformation de A en I_3 par des opérations élémentaires sur les lignes

Transformation de I_3 en A^{-1} par report des opérations élémentaires qui ont changé A en I_3 .

IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Correction :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}^A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

D'après le **corollaire (10.1)** , A est inversible si, et seulement si le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle $X = (0)_{\mathbb{K}^n}$.



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

D'après le **corollaire (10.1)**, A est inversible si, et seulement si le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle $X = (0)_{\mathbb{K}^n}$.

Par la contraposée, on a le résultat très intéressant en pratique :

Corollaire 10.20 (Lire la non inversibilité sur les colonnes) :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1 A N'est PAS inversible.



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

D'après le **corollaire (10.1)**, A est inversible si, et seulement si le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle $X = (0)_{\mathbb{K}^n}$.

Par la contraposée, on a le résultat très intéressant en pratique :

Corollaire 10.21 (Lire la non inversibilité sur les colonnes) :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1 A N'est PAS inversible.
- 2 Il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $X \neq (0)_{\mathbb{K}^n}$ et $AX = (0)_{\mathbb{K}^n}$.



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

D'après le **corollaire (10.1)**, A est inversible si, et seulement si le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle $X = (0)_{\mathbb{K}^n}$.

Par la contraposée, on a le résultat très intéressant en pratique :

Corollaire 10.22 (Lire la non inversibilité sur les colonnes) :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1 A N'est PAS inversible.
- 2 Il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $X \neq (0)_{\mathbb{K}^n}$ et $AX = (0)_{\mathbb{K}^n}$.
- 3 Il existe une combinaison linéaire nulle des colonnes de A avec des coefficients non tous nuls :

$$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, \quad \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_n A_n = 0_{n,1},$$

où A_1, \dots, A_n désignent les colonnes de A .



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Exemples 24 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \notin \mathcal{GL}_3(\mathbb{R}).$$



IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

2. Inversibilité

Exemples 24 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \notin \text{GL}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 6 :

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

