Suites

I Suites de référence et généralités

Exercice 1 :

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n+3}{n+2}$ est majorée par 2.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{n^2+(-1)^n}{n+1}$ est minorée par 0.
3. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ est minorée par 0 et majorée par 1.
4. Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $t_0 = -\sqrt{2}$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $t_{n+1} = \dfrac{1}{4}t_n - 2$ est minorée par -3 et majorée par -1.
5. Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ par $r_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k-1}$ est bornée.
6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1+\dfrac{1}{n}$ vérifie $1 < u_n \leqslant 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
7. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{\sqrt{1+n^2}}{n}$ vérifie $1 < u_n < 1+\dfrac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 : Étudier le sens de variation des suites suivantes :

1. $u_n = n^2 - n + 2$
2. $\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = w_n - n \end{cases}$
3. $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
4. $v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
5. $\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_{n+1} = (n^2+1)\alpha_n \end{cases}$
6. $k_n = \dfrac{n!}{n^n}$.
7. $e_n = \dfrac{2^n}{(n+1)!}$.

Exercice 3 : On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$.
   (b) Étudier la monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 : Déterminer la forme explicite des suites suivantes :

1. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$

Exercice 5 : On considère la suite définie par la récurrence

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 4n + 3.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + \alpha n$.

1. Déterminer α afin que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite arithmético-géométrique.
2. Expliciter u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 : Un individu I_0 dispose d'une information binaire (Vrai ou Faux).

Il la transmet à I_1, qui la transmet à I_2, ..., qui la transmet à I_n.

Chacun transmet l'information reçu (ou son inverse) avec la probabilité p (ou $1-p$). Quelle est la probabilité p_n pour que I_n dispose de l'information correcte ?

Exercice 7 : On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 &= 0 \\ z_{n+1} &= \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\,z_n + 5. \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n. On considère le nombre complexe $z_{\mathrm{A}} = 4 + 2\,\mathrm{i}$ et A le point du plan d'affixe z_{A}.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_{\mathrm{A}}$.
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i} \times u_n$.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^n (-4-2\,\mathrm{i})$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

II Comportement asymptotique

Exercice 8 :

1. Trouver une suite non majorée qui ne tende pas vers $+\infty$.
2. Trouver une suite non croissante tendant vers $+\infty$.
3. Trouver une suite divergente qui ne tende ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$.

Exercice 9 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [1\,;3] \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n} \end{cases}$$

1. a. Démontrer, par récurrence, que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à l'intervalle $[1\,;3]$.
   b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   c. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On conjecture que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 3, donc on étudie la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = 3 - u_n.$$
   a. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{3}}v_n$.
   b. Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel n,
$$0 \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}v_n.$$
   c. Montrer, par récurrence, que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n \leqslant 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n$.
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 10 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n+4} \end{cases}$.

1. Démontrer que pour tout naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.
2. Prouver que la suite est strictement croissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 11 :

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Remarque : Vous montrerez plus tard et par bien des méthodes que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 12 : Pour chacune des suites dont on donne le terme général, étudier la convergence, et donner la limite lorsqu'elle existe.

1. $u_n = n + \sin(n)$
2. $\displaystyle\left(\frac{3n+(-1)^n}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
3. $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$
4. $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$
5. $w_n = \displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$
6. $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)$
7. $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$
8. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$
9. $v_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$

Exercice 13 : Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point

1. $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left[3\,;3+\frac{1}{n^2}\right[$.
2. $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left]-2-\frac{1}{n}\,;4+n^2\right]$.
3. $\mathrm{I}_3 = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left[-\frac{1}{n}\,;2+\frac{1}{n}\right[$.
4. $\mathrm{I}_4 = \displaystyle\bigcup_{n=2}^{+\infty}\left[1+\frac{1}{n}\,;n\right]$.

Exercice 14 (Lemme de Cesàro - complément de cours) : Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite complexe et c la suite de terme général

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En utilisant la définition de la limite, montrer que $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. En déduire que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{C}$, alors $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
3. La réciproque est-elle vraie ?
4. On suppose maintenant que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer qu'il en est de même pour c_n.
5. Application : montrer que si une suite vérifie $a_{n+1} - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{C}^*$, alors $\dfrac{a_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Exercice 15 : On considère la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $e_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)! > 2^n$.
2. En déduire que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
3. Conclure quant à la convergence de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque : On montrera ultérieurement que cette suite converge vers e.

Exercice 16 (Constante d'EULER) : On considère la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, par $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n) \leqslant \mathrm{H}_n \leqslant \ln(n+1)$.
   - a) En déduire la limite de $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - b) Montrer que la suite $(\mathrm{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, par $\mathrm{K}_n = \mathrm{H}_n - \ln n$ est convergente.

     Sa limite, notée γ, est appelée constante d'Euler.
   - c) Justifier que $\dfrac{\mathrm{H}_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

     On dit que H_n est équivalent à $\ln(n)$ et on note $\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 17 :

1. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire la nature des suites de terme général :
   - a) $\mathrm{T}_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$ (pour $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ fixé).
   - b) $\mathrm{U}_n = \displaystyle\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p\ln p}$.