Suites

I Suites de référence et généralités

Exercice 1 :

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n+3}{n+2}$ est majorée par 2.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{n^2+(-1)^n}{n+1}$ est minorée par 0.
3. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ est minorée par 0 et majorée par 1.
4. Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $t_0 = -\sqrt{2}$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $t_{n+1} = \dfrac{1}{4}t_n - 2$ est minorée par -3 et majorée par -1.
5. Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ par $r_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k-1}$ est bornée.
6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1+\dfrac{1}{n}$ vérifie $1 < u_n \leqslant 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
7. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{\sqrt{1+n^2}}{n}$ vérifie $1 < u_n < 1+\dfrac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 : Étudier le sens de variation des suites suivantes :

1. $u_n = n^2 - n + 2$
2. $\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = w_n - n \end{cases}$
3. $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
4. $v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
5. $\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_{n+1} = (n^2+1)\alpha_n \end{cases}$
6. $k_n = \dfrac{n!}{n^n}$.
7. $e_n = \dfrac{2^n}{(n+1)!}$.

Exercice 3 : On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6-v_n}. \end{cases}$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$.
   (b) Étudier la monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 : Déterminer la forme explicite des suites suivantes :

1. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$

Correction :

1. Cette suite est arithmético-géométrique.

   On détermine λ tel que $\lambda = 3\lambda + 2$, et on trouve $\lambda = -1$.

   La suite $(u_n - \lambda)$ est géométrique de raison 3.

   D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n - \lambda = 3^n(u_0 - \lambda)$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n - 1.$$

2. Cette suite est aussi arithmético-géométrique.

   On détermine λ tel que $\lambda = \frac{1}{3}\lambda + 2$, et on trouve $\lambda = 3$.

   La suite $(u_n - \lambda)$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

   D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n - \lambda = \left(\frac{1}{3}\right)^n (u_0 - \lambda)$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = 3 - \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Exercice 5 : On considère la suite définie par la récurrence

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 4n + 3.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + \alpha n$.

1. Déterminer α afin que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite arithmético-géométrique.
2. Expliciter u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 : Un individu I_0 dispose d'une information binaire (Vrai ou Faux).

Il la transmet à I_1, qui la transmet à I_2, ..., qui la transmet à I_n.

Chacun transmet l'information reçu (ou son inverse) avec la probabilité p (ou $1-p$). Quelle est la probabilité p_n pour que I_n dispose de l'information correcte ?

Correction : Notons V_k l'événement : « I_k apprend l'information initiale correcte », et $\overline{V_k}$ l'événement contraire.

Par la formule des probabilités totales :

$$P(V_{k+1}) = P(V_{k+1}|V_k)P(V_k) + P(V_{k+1}|\overline{V_k})P(\overline{V_k}).$$

Comme $P(V_{k+1}|V_k)P(V_k) = p$ et $P(V_{k+1}|\overline{V_k}) = 1-p$, on obtient :

$$P(V_{k+1}) = (2p-1)P(V_k) + (1-p).$$

La suite $(p_n = P(V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. On cherche le point fixe qui est $\frac{1}{2}$. D'où :

$$\begin{aligned}
p_{k+1} &= (2p-1)p_k + (1-p)\\
\frac{1}{2} &= (2p-1)\frac{1}{2} + (1-p)\\
p_{k+1} - \frac{1}{2} &= (2p-1)\left(p_k - \frac{1}{2}\right)\\
\forall\, n \in \mathbb{N},\ p_n &= (2p-1)^n\left(p_0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Or, I_0 a l'information donc $p_0 = 1$. Finalement :

$$p_n = \frac{1}{2}(2p-1)^n + \frac{1}{2}.$$

Remarque : Comme $0 < p < 1$, $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 7 : On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 &= 0 \\ z_{n+1} &= \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\, z_n + 5. \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n. On considère le nombre complexe $z_A = 4 + 2\,\mathrm{i}$ et A le point du plan d'affixe z_A.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_A$.
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{i} \times u_n$.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^n (-4-2\,\mathrm{i})$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

II COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

Exercice 8 :

1. Trouver une suite non majorée qui ne tende pas vers $+\infty$.
2. Trouver une suite non croissante tendant vers $+\infty$.
3. Trouver une suite divergente qui ne tende ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$.

Correction :

1. La suite définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_n = [1+(-1)^n]n$ convient. Faites un schéma !
2. Considérer $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_n = n + (-1)^n$. Faites un schéma !
3. La suite $((-1)^n)$ diverge.

   Or, elle est bornée, donc ne tend ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$.

Exercice 9 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [1\,;3] \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n} \end{cases}$$

1. a. Démontrer, par récurrence, que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à l'intervalle $[1\,;3]$.
   b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   c. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On conjecture que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 3, donc on étudie la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = 3 - u_n.$$

   a. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{3}}v_n$.
   b. Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}v_n.$$

   c. Montrer, par récurrence, que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n \leqslant 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n$.
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 10 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n+4} \end{cases}$.

1. Démontrer que pour tout naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.

2 Prouver que la suite est strictement croissante.

3 En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 11 :

1 Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

2 En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

Remarque : Vous montrerez plus tard et par bien des méthodes que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 12 :

Pour chacune des suites dont on donne le terme général, étudier la convergence, et donner la limite lorsqu'elle existe.

1 $u_n=n+\sin(n)$

2 $\displaystyle\left(\frac{3n+(-1)^n}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

3 $u_n=\dfrac{\cos(n)}{n}$

4 $v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$

5 $w_n=\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor$

6 $p_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)$

7 $u_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^2}$

8 $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$

9 $v_n=\dfrac{\lfloor nx\rfloor}{n}$

Correction :

3 On a :

- $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|\cos n|\leqslant 1$, donc $|u_n|\leqslant\dfrac{1}{n}$ (en divisant par $n>0$)
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

4 Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
&\forall k\in[\![1,n]\!],\quad 2\leqslant 2k\leqslant 2n\\
&\text{donc } n^2+2\leqslant n^2+2k\leqslant n^2+2n\\
&\text{donc } 0<\sqrt{n^2+2}\leqslant\sqrt{n^2+2k}\leqslant\sqrt{n^2+2n}\ \text{ car la fonction racine est croissante}\\
&\text{donc } \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}
\end{aligned}$$

En additionnant, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$$

C'est-à-dire

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}}\leqslant v_n\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$$

On a :

- $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\quad\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}}\leqslant v_n\leqslant\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2}}$
- $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}}=\dfrac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$
- $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2}}=\dfrac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

5 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\forall\, k \in [\![1,n]\!], \quad kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leqslant kx$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{n}(kx-1) < \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \leqslant \sum_{k=1}^{n} kx$$

i.e.

$$\frac{n(n+1)}{2}x - n < \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \leqslant \frac{n(n+1)}{2}x$$

En divisant par $n > 0$:

$$\frac{(n+1)}{2n}x - \frac{1}{n} < w_n \leqslant \frac{(n+1)}{2n}x$$

On a :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star, \quad \dfrac{(n+1)}{2n}x - \dfrac{1}{n} < w_n \leqslant \dfrac{(n+1)}{2n}x$
- $\dfrac{(n+1)}{2n}x - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{2} - \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{x}{2}$
- $\dfrac{(n+1)}{2n}x = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{x}{2}$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{x}{2}$.

6 On a :

$$\begin{aligned} p_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right) &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\right) + \cdots \\ &\geqslant 1 + \frac{1+2+\cdots+n}{n} \\ &\geqslant 1 + \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{n+1}{2}\right) = +\infty$.

D'après le théorème de comparaison, on a donc $\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$.

7 Très pénible à étudier avec sa somme à nombre de termes variable, mais si on ne veut que la limite, c'est beaucoup plus facile.

Chacun des termes de la somme est compris entre le plus petit, en l'occurrence $\dfrac{1}{(2n)^2}$, et le plus grand, à savoir $\dfrac{1}{(n+1)^2}$, donc

$$\frac{n}{2n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{n+1)^2}.$$

D'après le théorème d'encadrement, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 13 : Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point

1 $\mathrm{I}_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\left[3\,;3+\dfrac{1}{n^2}\right[$.

2 $\mathrm{I}_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\left]-2-\dfrac{1}{n}\,;4+n^2\right]$.

3 $\mathrm{I}_3 = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\left[-\dfrac{1}{n}\,;2+\dfrac{1}{n}\right[$.

4 $\mathrm{I}_4 = \bigcup_{n=2}^{+\infty}\left[1+\dfrac{1}{n}\,;n\right]$.

Correction :

1. $I_1 = \{3\}$. 2. $I_2 = [-2\,;5]$. 3. $I_3 = [0\,;2]$. 4. $I_4 =]1\,;+\infty[$.

Exercice 14 (Lemme de Cesàro - complément de cours) : Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite complexe et c la suite de terme général

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En utilisant la définition de la limite, montrer que $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. En déduire que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{C}$, alors $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
3. La réciproque est-elle vraie ?
4. On suppose maintenant que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer qu'il en est de même pour c_n.
5. Application : montrer que si une suite vérifie $a_{n+1} - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{C}^*$, alors $\dfrac{a_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Exercice 15 : On considère la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $e_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)! > 2^n$.
2. En déduire que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
3. Conclure quant à la convergence de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque : On montrera ultérieurement que cette suite converge vers e.

Exercice 16 (Constante d'EULER) : On considère la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, par $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n) \leqslant \mathrm{H}_n \leqslant \ln(n+1)$.
   a. En déduire la limite de $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b. Montrer que la suite $(\mathrm{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, par $\mathrm{K}_n = \mathrm{H}_n - \ln n$ est convergente.

      Sa limite, notée γ, est appelée constante d'Euler.
   c. Justifier que $\dfrac{\mathrm{H}_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

      On dit que H_n est équivalent à $\ln(n)$ et on note $\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 17 :

1. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire la nature des suites de terme général :

   a. $\mathrm{T}_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$ (pour $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ fixé).
   b. $\mathrm{U}_n = \displaystyle\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p\ln p}$.